VIDYA UNIVERSITY PRESS

TOUCH n PASS

सर्वश्रेष्ठ परीक्षा पथ-प्रदर्शक

B.A.
तृतीय वर्ष
(डिग्री कोर्स)
सेमेस्टर–V

शिक्षा

शैक्षिक सांख्यिकी

SYLLABUS

UNIT-I Introduction to Statistics
- History of Statistics
- Definition and Need of Statistics.
- Types of Statistycics
- Symbols in Statistics.

UNIT-II Presentation and Organization of Data
- Organization of data :
  - Simple array
  - Frequency array
  - Frequency Distribution
- Class Interval :
  - Inclusive
  - Exclusive

UNIT-III Graphical Representation of Data
- Bar diagram
- Histogram
- Pie chart

UNIT-IV Measures of Central Tendency
- Definition, Uses, Computation of : Mean, Median, Mode

UNIT-V Measures of Relative Position
- Concept of Relative Position
- Percentile Rank
- Percentile

UNIT-VI Measures of Variability
- Definition, Uses, Computation : Range, Mean Deviation, Standard Deviation.

UNIT-VII Correlation
- Meaning, Types, Uses
- Computation of Coefficient of Correlation-Spearman's Rank Difference Method.

UNIT-VIII Normal Probability Curve
- Concept and Characteristics.

VIDYA®
UNIVERSITY PRESS

पंजीकृत कार्यालय
विद्या एम्पायर, बागपत रोड,
मेरठ, उत्तर प्रदेश (NCR) 250 002
www.vidyauniversitypress.com

लेखन एवं सम्पादन
शोध एवं अनुसन्धान प्रकोष्ठ

मुद्रक
विद्या यूनिवर्सिटी प्रेस

विषय-सूची

UNIT-I

सांख्यिकी का परिचय
Introduction to Statistics

खण्ड-अ अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. सांख्यिकी का अर्थ लिखिए।
Write the meaning of statistics.

उत्तर सांख्यिकी अंग्रेजी भाषा के स्टेटिस्टिक्स (Statistics) का हिन्दी रूपान्तर है। इसे जर्मन भाषा में स्टेटिस्टिक (Statistik), इटैलियन भाषा में स्टेटिस्टा (Statista) एवं लैटिन भाषा में स्टेटस (Status) कहा जाता है। इन सभी शब्दों का अर्थ है—राजनैतिक राज्य। Statistics शब्द का उपयोग जर्मन विद्वान गॉटफ्राइड एकैनवाल ने सन् 1750 में किया जिनको सांख्यिकी का पिता कहा जाता है। प्राचीन समय में राज्य की जनशक्ति, धनशक्ति, सैन्यशक्ति, पशुशक्ति, जमीन, उत्पादन से सम्बन्धित अनेक सूचनाओं का संकलन राजाओं के माध्यम से करवाया जाता था। कर्मचारी राज्य की प्रगति एवं व्यवस्था की योजनाएँ बनाने हेतु भी सांख्यिकी का उपयोग होता था अत: इसे 'राज्यतन्त्र का विज्ञान' या 'सम्राटों का विज्ञान' भी कहा जाता था।

प्र.2. सांख्यिकी की पाँच विशेषताएँ लिखिए।
Write the five characteristics of statistics.

उत्तर सांख्यिकी की निम्नलिखित विशेषताएँ हैं—
1. सांख्यिकी में आँकड़ों को संख्या के रूप में व्यक्त करते हैं। संख्या मात्रा को दर्शाती है।
2. सांख्यिकी तथ्यों के समूह का योग है। किसी एक मनुष्य को हम सांख्यिकी नहीं कहेंगे। सांख्यिकी हेतु आँकड़ों का समूह होना जरूरी है।
3. आँकड़ों का संकलन पहले से निर्धारित उद्‌देश्य हेतु होना चाहिए।
4. आँकड़े अनेक कारकों से प्रभावित होते हैं।
5. आँकड़ों का संकलन क्रमबद्ध तरीके से किया जाना चाहिए।

प्र.3. सांख्यिकी की उत्पत्ति को लिखिए।
Write the origin of statistics.

उत्तर सांख्यिकी का सबसे पहले 16वीं सदी में प्रयोग ज्योतिष विज्ञान के क्षेत्र में हुआ। 17वीं सदी में इसे प्रत्येक राष्ट्र ने जन्म-मृत्यु सारणी बनाने हेतु अपनाया। 18वीं सदी में सांख्यिकी तथा गणित के बीच सम्बन्ध शुरू हुआ। 19वीं सदी में इसका सम्बन्ध रसायन विज्ञान, शिक्षा, कृषि, चिकित्सा इत्यादि क्षेत्रों से स्थापित हुआ एवं 20वीं सदी में इसका उपयोग हर एक क्षेत्र में किया जाने लगा। इस कारण 20वीं सदी को सांख्यिकी का युग भी कहा जाता है।

प्र.4. सांख्यिकी के कार्य लिखिए।
Write the functions of statistics.

उत्तर
1. कई आँकड़ों, तथ्यों अथवा समस्याओं से सह-सम्बन्ध कायम करना।
2. कई आँकड़ों, तथ्यों अथवा समस्याओं का तुलनात्मक दृष्टि से अध्ययन करना।
3. समस्या से सम्बन्धित आँकड़ों का वर्गीकरण तथा सारणीयन करना।
4. कई आँकड़ों, तथ्यों से समस्याओं से सम्बन्धित पुराने नियमों की समीक्षा करके नये नियमों का निर्माण करना।
5. निष्कर्ष सम्बन्धी आँकड़ों अथवा तथ्यों को सुगम व सुबोध तरीके से प्रस्तुत करना।
6. किसी समस्या अथवा परीक्षण के सम्बन्ध में तथ्यों व आँकड़ों का संकलन करना।

7. समस्या सम्बन्धी आँकड़ों व तथ्यों की व्याख्या तथा विश्लेषणोपरान्त निष्कर्ष प्राप्त करना।
8. समस्या सम्बन्धी आँकड़ों को समय व स्थान के अनुसार व्यवस्थित रूप देना।

प्र.5. आँकड़ों का सांख्यिकीय प्रतिनिधित्व क्या है?
What is statistical representation of data?

उत्तर डेटा का सांख्यिकीय प्रतिनिधित्व आँकड़ों में डेटा का प्रतिनिधित्व करने का एक ग्राफिकल तरीका है। यह डेटा के वितरण को समझने और किसी पैटर्न की पहचान करने में मदद करता है। प्रस्तुत किए जा रहे डेटा के प्रकार के आधार पर विभिन्न प्रकार के ग्राफ का उपयोग किया जा सकता है।

प्र.6. सांख्यिकीय गुण क्या हैं?
What are statistical properties?

उत्तर सांख्यिकी के महत्त्वपूर्ण सम्भावित युग्मों में पूर्णता, स्थिरता, पर्याप्तता, निष्पक्षता, न्यूनतम माध्य वर्ग त्रुटि, कम विचरण, मजबूती और कम्प्यूटेशनल सुविधा शामिल हैं।

प्र.7. सांख्यिकी का उपयोग क्या है?
What is the use of statistics?

उत्तर उनका उपयोग अनुसन्धान करने, परिणामों का मूल्यांकन करने, आलोचनात्मक सोच विकसित करने और सूचित निर्णय लेने के लिए किया जाता है। सांख्यिकी का उपयोग अध्ययन के लगभग किसी भी क्षेत्र के बारे में पूछताछ करने के लिए किया जा सकता है ताकि यह पता लगाया जा सके कि चीजें क्यों घटित होती हैं, कब घटित होती हैं और क्या उनकी पुनरावृत्ति का अनुमान लगाया जा सकता है।

प्र.8. सांख्यिकी आँकड़ों का क्या अर्थ है?
What is the meaning of statistical data?

उत्तर सांख्यिकी गणित की वह शाखा है जिसमें आँकड़ों का संग्रहण, प्रदर्शन, वर्गीकरण और उसके गुणों के आकलन का अध्ययन किया जाता है। सांख्यिकी एक गणितीय विज्ञान है जिसमें किसी वस्तु/अवयव/तन्त्र/समुदाय से सम्बन्धित आँकड़ों का संग्रह, विश्लेषण, व्याख्या या स्पष्टीकरण और प्रस्तुति की जाती है।

प्र.9. सांख्यिकी में अनुसन्धान क्या है?
What is research in statistics?

उत्तर सांख्यिकीय अनुसन्धान संभाव्यता और सांख्यिकीय सिद्धान्त पर आधारित बेहतर या नये सांख्यिकीय तरीकों का कठोर विकास है। हम सांख्यिकीय अनुसन्धान के आठ क्षेत्रों में तरीकों पर ध्यान केन्द्रित करते हैं और प्रत्येक में विशेषज्ञता बनाये रखते हैं।

खण्ड-ब लघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. सांख्यिकी के प्रकारों का उल्लेख कीजिए।
Explain the types of statistics.

उत्तर

सांख्यिकी के प्रकार
(Types of Statistics)

सांख्यिकी को मुख्यत: पाँच भागों में विभाजित किया गया है। इनका वर्णन निम्न प्रकार से है—

(i) **वर्णनात्मक सांख्यिकी**—वर्णनात्मक सांख्यिकी में समंकों के लक्षणों का ज्ञान प्राप्त करने की दृष्टि से उनका संक्षिप्तीकरण व उचित प्रस्तुतीकरण किया जाता है। इसमें औसत सूचकांक, उपनति, अपकिरण, विषमता आदि को सम्मिलित किया जा सकता है। वर्णनात्मक विधियाँ सांख्यिकीय विश्लेषण के आधार स्तम्भ हैं। यही कारण है कि इसे निर्वचन व निर्णयन के प्रारम्भिक चरण के रूप में स्वीकार किया जाता है।

(ii) **विश्लेषणात्मक सांख्यिकी**—चरों में क्रियात्मक सम्बन्ध स्थापित करने की दृष्टि से जिन विधियों का प्रयोग किया जाता है उन्हें विश्लेषणात्मक सांख्यिकी में सम्मिलित किया जा सकता है। सह-सम्बन्ध, समाश्रयण, विचरण विश्लेषण व गुण

साहचर्य इसके अन्तर्गत सम्मिलित किये जा सकते हैं। वे सभी विधियाँ जो तुलना करने के काम में आती हैं, इसके अन्तर्गत सम्मिलित की जा सकती हैं।

(iii) **आगमन सांख्यिकी**—आगमन सांख्यिकी में विशिष्ट से सामान्य की ओर जाने की प्रक्रिया को सम्मिलित किया जाता है। इस प्रकार, अधूरे समंकों के आधार पर पूरे समूह के सम्बन्ध में निष्कर्ष निकालने की विधियाँ इसमें सम्मिलित की जाती हैं। कालश्रेणी विश्लेषण में भविष्य के बारे में पूर्वानुमान लगाने का आगमन सांख्यिकी का एक उचित उदाहरण माना जा सकता है।

(iv) **आनुमानिक सांख्यिकी**—समग्र के बारे में अनुमान लगाने के लिए न्यादर्श का चुनाव किया जाता है तथा समग्र के प्राचलों के आधार पर प्रतिदर्शजों के सम्बन्ध में परिकल्पना का परीक्षण किया जाता है तथा पता लगाया जाता है कि प्राचल व प्रतिदर्शजों में अन्तर सार्थक है अथवा नहीं। यह सभी कार्य आनुमानिक सांख्यिकी के अन्तर्गत सम्मिलित किये जाते हैं।

(v) **व्यावहारिक सांख्यिकी**—किसी क्षेत्र अथवा विषय पर सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग किया जाता है तो उसे व्यावहारिक सांख्यिकी के अन्तर्गत सम्मिलित किया जाता है। उदाहरण के लिए कृषि, उद्योग, राष्ट्रीय आय, जीवन स्तर आदि का विश्लेषण तथा अनुमान करने में सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग करना। किस्म नियन्त्रण, परिमाणात्मक विधियाँ, व्यावसायिक निर्णयन आदि भी व्यावहारिक सांख्यिकी में सम्मिलित किए जा सकते हैं।

उपर्युक्त के अतिरिक्त सांख्यिकी के दो भाग और किये जा सकते हैं—गणितीय सांख्यिकी (अथवा सैद्धान्तिक सांख्यिकी) व व्यावसायिक सांख्यिकी। गणितीय सांख्यिकी गणित की एक शाखा है तथा यह सैद्धान्तिक है। इसमें सूत्रों की व्युत्पत्ति व विभिन्न सूत्रों को सिद्ध किया जाता है। यह व्यावहारिक सांख्यिकी का आधार है। दूसरी ओर, व्यावसायिक सांख्यिकी व्यावहारिक सांख्यिकी ही है जिसका प्रयोग व्यावसायिक समस्याओं को हल करने में करते हैं। व्यावसायिक सांख्यिकीय में कालश्रेणी विश्लेषण, सूचकांक आदि तकनीकों को सम्मिलित किया जा सकता है।

प्र.2. सांख्यिकी के उद्देश्यों का उल्लेख कीजिए।
Explain the objectives of statistics.

उत्तर

सांख्यिकी के उद्देश्य
(Objectives of Statistics)

सांख्यिकी के निम्नलिखित उद्देश्य हैं—

1. **सांख्यिकी के उचित तथा अनुचित प्रयोगों के विषय में सीखना** (To Learn where to Apply Statistics and Where not to)—सामान्यत: देखा गया है कि हर एक सांख्यिक प्रणाली से प्रदत्तों को प्रकाशित किया जा सकता है लेकिन फिर भी हर एक प्रणाली की कुछ सीमाएँ होती हैं, क्योंकि यह किसी–न–किसी धारणा पर विकसित होती है।
2. **सांख्यिकी में उपयोग किये जाने वाले गणितशास्त्र को समझना** (To Understand the Mathematics used in Statistics)—सांख्यिकी के इस उद्देश्य को वे परीक्षार्थी पूर्ण कर सकते हैं जिन्हें गणित का पूर्ण ज्ञान हो, क्योंकि अधिकतर विद्यार्थी गणित की पूर्ण जानकारी नहीं रखते हैं अत: उनके लिए इसको समझना कठिन होता है।
3. **सांख्यिकी की तर्क प्रणाली को ग्रहण करना** (To Grasp the Logic of Statistics)—सांख्यिकी के द्वारा विद्यार्थी भाषा व शब्द भण्डार के साथ–साथ सोचने का नया तरीका भी सीखते हैं। यह गणित की तरह ही एक विषय है जिसे समस्त स्थलों पर सहजता से उपयोग में लाया जा सकता है। किसी भी तरह के प्रदत्तों को एकत्रित करने से पहले यह विचार करना जरूरी है कि हमारी मुख्य समस्या क्या है तथा हमें समस्या का हल निकालने के लिए किन प्रदत्तों की जरूरत होगी।
4. **सांख्यिकी के शब्द भण्डार का ज्ञान प्राप्त करना** (To Master the Vocabulary of Statistics)—आधुनिक समय में किसी भी भाषा का अध्ययन करने तथा उसे समझने के लिए अच्छे शब्द भण्डार का होना अधिक जरूरी है। सांख्यिकी भी नवीन सीखने वालों के लिए एक भाषा की भाँति है। इसमें नवीन पदों, संकेतों व सूत्रों का उपयोग किया जाता है। विद्यार्थी जितनी जल्दी इनका उपयोग करेंगे उतनी ही जल्दी से उसे सीखने में परिपक्व हो जाएँगे।

5. **सांख्यिकी परिणामों की उचित व्याख्या करना सीखना** (To Learn to Interpret Statistical Results Correctly)—सांख्यिकी परिणाम उसी स्थिति में उपयोगी हो सकते हैं जब उनकी सही तरीके से व्याख्या की जा सके। अगर उन्हें सही तरह से समझने में विद्यार्थी असफल हो जाता है तो फिर से सीखा हुआ ज्ञान व्यर्थ हो जाता है।
6. **हल करने की कुशलता को प्राप्त करना, दोहराना तथा उनमें वृद्धि करना** (To Acquire, to Review and to Extend Skill in Computation)—हर एक नये विषय का पूर्ण ज्ञान प्राप्त करने के लिए उसको व्यावहारिक रूप में प्रयुक्त करना जरूरी है क्योंकि इससे ज्ञान बढ़ता है तथा सीखे हुए ज्ञान का प्रयोग होता है।

प्र.3. सांख्यिकी के महत्त्वों का उल्लेख कीजिए।
Explain the importance of statistics.

उत्तर

सांख्यिकी का महत्त्व
(Importance of Statistics)

सांख्यिकी के महत्त्व को निम्नवत् ढंग से प्रस्तुत किया गया है—

1. **समूह तुलना** (Group Comparison)—कोई भी शिक्षक विद्यालय की दो या अनेक कक्षाओं की उपलब्धियों की तुलना सांख्यिकी के सहयोग से ही आसानीपूर्वक करने में सक्षम हो सकता है। इसके साथ वह समूहों की भिन्नता अथवा सजातीयता का ज्ञान भी सांख्यिकी की सहायता से सहजतापूर्वक कर सकता है। अत: विद्यार्थियों के प्राप्तांक अर्थपूर्ण बन जाते हैं एवं शिक्षण की दृष्टि से कारगर व महत्त्वपूर्ण निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं।
2. **व्यक्तिगत तुलना** (Individual Comparison)—सांख्यिकी की मदद से किन्हीं दो समान या असमान योग्यता, बुद्धि, आयु वाले विद्यार्थियों के स्तर का वैयक्तिक रूप से तुलनात्मक अध्ययन सम्भव होता है।
3. **शैक्षिक प्रशासन** (Education Administration)—शिक्षा के शासन व प्रशासन शिक्षा से सम्बन्धित हर एक समस्या की जानकारी सांख्यिकी के सौजन्य से ही मिलती है। आँकड़ों की कमी में उचित नीति का निर्माण नहीं हो सकता है। इसलिए सफल शैक्षिक प्रशासन के लिए सांख्यिकी का सहयोग अपरिहार्य है।
4. **शैक्षिक नियोजन** (Educational Planning)—जब राष्ट्रीय स्तर पर शैक्षिक योजनाओं का निर्माण होता है तब योजनाकारों को अनेक तथ्यों की जानकारी रखना जरूरी हो जाता है। यह जानकारी सांख्यिकी द्वारा ही मिल सकती है। इसके अभाव में प्रभावी योजना बनाना सम्भव नहीं है। योजना के क्रियान्वयन के पश्चात् उसका मूल्यांकन करने में भी सांख्यिकी उपयोगी होती है। इसलिए शिक्षा के क्षेत्र में सांख्यिकी बहुत अधिक उपयोगी है।
5. **शैक्षिक तथा व्यावसायिक मार्ग-प्रदर्शन** (Educational and Commercial Path demonstration)—विद्यालय में अध्ययन कर रहे विद्यार्थियों की रुचियाँ, मानसिक योग्यताएँ अलग-अलग होती हैं। आधुनिक समय में इनके मापन के लिए सांख्यिकी का प्रयोग किया जाता है तथा सांख्यिकीय गणना के आधार पर विद्यार्थियों को उनकी योग्यतानुसार शैक्षिक व व्यावसायिक मार्ग-प्रदर्शन किया जाता है।
6. **मानसिक योग्यताओं का ज्ञान** (Knowledge of mental ability)—विद्यार्थियों की मानसिक योग्यताओं के ज्ञानार्जन हेतु सांख्यिकी विधि का प्रयोग होता है। अनेक प्रकार की बुद्धि, रुचि इत्यादि परीक्षाओं के परिणामों के विश्लेषण करने में समय व श्रम की बचत होती है।

खण्ड-स विस्तृत उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. सांख्यिकी का इतिहास एवं विभिन्न परिभाषाओं का वर्णन कीजिए।
Describe the history and different definitions of Statistics.

उत्तर

सांख्यिकी का इतिहास
(History of Statistics)

ऐसा माना जाता है कि आंग्ल भाषा के स्टैटिस्टिक्स (STATISTICS) शब्द की उत्पत्ति परोक्ष रूप से लैटिन भाषा के स्टैटस (STATUS) शब्द से हुई है जिसका अर्थ 'राजनीतिक राज्य' (Political State) है। अधिक प्रत्यक्ष रूप से 'STATISTICS' शब्द की व्युत्पत्ति इटैलियन भाषा के शब्द स्टैटिस्टिका (STATISTICA) से हुई है। इस शब्द का प्रयोग

पन्द्रहवीं शताब्दी में राजनीतिक अर्थ में राज्य के लिए किया जाता था। जर्मन विद्वानों ने भी इस शब्द को इसी आशय में अपनाया था तथा उन्होंने स्टैटिस्टिक (STATISTIK) शब्द का प्रयोग किया था। इन शब्दों का अर्थ 'राजनीतिक राज्य' (Political State) अथवा 'राजनीतिज्ञों की कला' (Statesmen's Art) था। सत्रहवीं शताब्दी में प्रसिद्ध आंग्ल नाटककार **शेक्सपियर** (Shakespeare) तथा महाकवि **मिल्टन** (Milton) ने अपनी रचनाओं में इस शब्द का प्रयोग इसी अर्थ में किया था। शेक्सपियर ने अपने प्रसिद्ध नाटक 'हैम्लेट' (Hamlet) तथा 'साइम्बलाइन' (Cymbeline) में तथा मिल्टन ने अपने महाकाव्य 'पैराडाइज रीगेण्ड' (Paradise Regained) में इस शब्द का प्रयोग किया था। सुप्रसिद्ध आंग्ल कवि **वर्ड्सवर्थ** (Wordsworth) ने भी इस शब्द का प्रयोग इसी अर्थ में किया था। सांख्यिकी के आदि जनकों में **गाटफ्राइड आकेनवाल** (Gottfried Achenwall, 1719-1772), जो **गोटिनजेन** (Gottingten) में विधि तथा राजनीतिक विज्ञान के अध्यापक थे, का नाम उल्लेखनीय है जिन्होंने 1749 में सांख्यिकी को मानव ज्ञान की एक विशिष्ट शाखा माना था। 1770 में **बेरन जे०एफ० वॉन बॉयलफील्ड** (Baron j. F. Von Bielfield) ने अपनी पुस्तक *'The Elements of Universal Erdition'* में सांख्यिकी पर एक अध्याय सम्मिलित किया था जिसमें सांख्यिकी को **''ज्ञात संसार के आधुनिक राज्यों की राजनीतिक व्यवस्था सिखाने वाले विज्ञान''** के रूप में परिभाषित किया था। कुछ वर्षों पश्चात् 1787 में **ई०ए० डब्ल्यू० जिम्मे/रमन** (E.A.W. Zimmermann) ने अपनी पुस्तक *'A Political Survey of the Present State of Europe'* की प्रस्तावना में सांख्यिकी को एक नवगठित विज्ञान बताया है जो जर्मनी में अध्ययन का प्रिय विषय बन गया है। मई, 1770 में **सर जॉन सिन्कलेयर** (Sir John Sinclair) ने स्कॉटलैण्ड के गिरजे के पादरी को लिखा था कि ''सांख्यिकीय जाँचें काफी सीमा तक की गयी हैं।'' उन्होंने यह समझाया था कि वे सांख्यिकी जाँचें जनसंख्या, राजनीतिक परिस्थितियों, देश के उत्पादनों तथा राज्य के अन्य मामलों में सम्बन्धित थीं।

शासकीय-समंकों का विधिवत् संग्रहण सर्वप्रथम जर्मनी में अठारहवीं शताब्दी के अन्त में प्रारम्भ हुआ था। इंग्लैण्ड में नेपोलियन युद्धों के समय समंकों का संग्रहण शुरू हुआ क्योंकि युद्ध-व्यय की पूर्ति के लिए नये करों से आय प्राप्त करने के लिए यह आवश्यक समझा गया कि समंकों के विधिवत् संकलन से शासकीय आय व व्यय के पूर्वानुमानों में परिशुद्धता लाई जाए। भारत में भी समंक-संकलन की प्रथा अत्यन्त प्राचीन है। मनुस्मृति, शुक्र नीति आदि ग्रन्थों में शासन-व्यवस्था के लिए समंकों के संकलन करने की रीति तथा संगठन विधि का उल्लेख मिलता है। यूनानी राजदूत मेगस्थनीज ने चन्द्रगुप्त मौर्य के शासनकाल में आय-व्यय, जन्म-मरण, सेना, भूमि आदि से सम्बन्धित समंकों के संकलन की प्रचलित विधि का उल्लेख किया है। कौटिल्य का अर्थशास्त्र उस समय से सम्बन्धित समंकों का उल्लेख करता है। मुगल सम्राटों के काल में भी समंकों के संकलन की प्रथा का प्रचलन था, ऐसा उल्लेख **'तुजुके-बाबरी'** और **'आइन-ए-अकबरी'** में मिलता है। अकबर के शासनकाल में उसके राजस्व मन्त्री राजा टोडरमल ने लगान निर्धारित करने के लिए भूमि सम्बन्धी समंकों का संकलन कराया था। ये सभी समंक विवरणात्मक प्रकृति (Descriptive Nature) के थे।

आधुनिक सांख्यिकी का जन्म औद्योगिक क्रान्ति (Industrial Revolution) के पश्चात् हुआ। अमेरिकन सांख्यिकीय संघ (American Statistical Association) के 1952 के अध्यक्षीय भाषण में **ए०जे० विकिन्स** (A.J. Wickens) ने कहा था कि ''यद्यपि समंकों का इतिहास प्राचीन काल में पाया जाता है परन्तु उनका विकास औद्योगिक क्रान्ति में हुआ है। उन्नीसवीं शताब्दी के प्रारम्भ में, उस समय के समाज का विवरण प्रस्तुत करने के लिए सांख्यिकीय अभिलेख विकसित हुए थे, न कि आर्थिक व सामाजिक समस्याओं का प्रकाश डालने के लिए। नि:सन्देह उन्होंने तब मानवीय विचारधारा को प्रभावित किया था और उसके परिणामस्वरूप कुछ नयी नीतियाँ और नये अधिनियम बने हों परन्तु मुख्य रूप से उसके प्रयोग विवरणात्मक थे। बीसवीं शताब्दी में और विशेषकर प्रथम विश्वयुद्ध के पश्चात् से समंकों का प्रयोग समस्याओं को हल करने और कार्यों का क्रम निर्धारित करने में किया जाने लगा। निजी उपक्रम में गुण नियन्त्रण जाँचों से औद्योगिक उपक्रम की उत्पादन-लाइन परिवर्तित की जाती है। सांख्यिकीय विधियों से नये उत्पादों का विकास व उनका परीक्षण किया जाता है। सांख्यिकी से वैज्ञानिक प्रयोग किये जाते हैं।''

भारत में **प्रो० पी०सी० महलानोबिस** (Prof. P.C. Mahalanobis) ने सैद्धान्तिक एवं व्यावहारिक सांख्यिकी के विकास में महत्त्वपूर्ण कार्य किया है। कोलम्बिया विश्वविद्यालय के प्रोफेसर होटलिंग ने प्रोफेसर महलानोबिस की योग्यता की प्रशंसा करते हुए कहा था कि ''आज अमेरिका या कहीं भी कोई ऐसी योजना नहीं बनी जो यथार्थता तथा मितव्ययिता में इनकी प्रणाली का मुकाबला कर सके।'' व्यावहारिक सांख्यिकी के क्षेत्र में डॉ० वी० के०आर० वी राव, डॉ० आर०सी० देसाई, डॉ० पी०वी० सुखात्मे आदि के नाम उल्लेखनीय हैं।

पिछले तीन–चार दशकों में सांख्यिकी के सैद्धान्तिक एवं व्यावहारिक क्षेत्र में निरन्तर व अपार प्रगति हुई है। सांख्यिकी प्रत्येक क्षेत्र में उपयोग किया जाने वाला विज्ञान बन गया है। यह एक सर्वत्र उपयोगी विज्ञान बन गया है जिसकी सहायता से विभिन्न क्षेत्रों की समस्याओं पर प्रकाश डाला जा सकता है। जहाँ भी जानकारी को संख्यात्मक रूप दिया जा सकता है, सांख्यिकीय विधियाँ एवं समंक, सभी क्षेत्रों में कार्य करने का आधार बन गये हैं।

सांख्यिकी की परिभाषाएँ
(Definitions of Statistics)

कुछ विद्वानों ने सांख्यिकी की निम्नलिखित परिभाषाएँ दी हैं—

1. **बाउले** के अनुसार, "आँकड़े अनुसन्धान के किसी विभाग से सम्बन्धित तथ्यों के ऐसे संख्यात्मक विवरण हैं जिन्हें एक–दूसरे के सम्बन्ध में रखा जा सके।"
2. **डब्ल्यू० जी० एटक्लिफ** के अनुसार, "सांख्यिकी उन तथ्यों के संकलन, वर्गीकरण, प्रस्तुतीकरण तथा विश्लेषण को कहते हैं जो विधिपूर्वक संकलित किये जाते हैं, जिनके संकलन में किसी प्रकार का पक्षपात नहीं किया जाता है और जो पूर्व निर्धारित उद्देश्य हेतु संकलित किये जाते हैं।"
3. **क्रॉक्सटन और काउडेन** (Croxton and Cowden) के अनुसार, "सांख्यिकी को आँकड़ों के संकलन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण एवं विवेचन के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।"
4. **टाटे** (Tate) के अनुसार, "सांख्यिकी अनुसन्धान का एक उपकरण है, जिसका सम्बन्ध आंकिक तथ्यों के संग्रह एवं व्याख्या की विधियों से है।"
5. **गिलफोर्ड** (Guilford) के अनुसार, "सांख्यिकी गणित की एक शाखा है, जिसका सम्बन्ध अंकों की गणना से है।"
6. **लोविट** (Lovitt) के अनुसार, "सांख्यिकी वह विज्ञान है, जो घटनाओं की व्याख्या, उनका वर्णन तथा उनकी तुलना के लिए आवश्यक आंकिक तथ्यों के संग्रह, वर्गीकरण एवं सारणीयन से सम्बन्ध रखता है।"
7. **ऑक्सफोर्ड शब्दकोश** (Oxford Dictionary) के अनुसार, "सांख्यिकी प्रदत्तों के संकलन, वर्गीकरण एवं प्रयोग का विज्ञान है।"
8. **किंग** (King) के अनुसार, "सांख्यिकी विज्ञान गणना अथवा अनुमानों के द्वारा एकत्रित सूचनाओं के संग्रह के विश्लेषण के द्वारा सामूहिक, प्राकृतिक या सामाजिक घटनाओं का विवेचन करने की विधि है।"

उपरोक्त परिभाषाओं से स्पष्ट है कि सांख्यिकी वह विज्ञान है जो किसी समस्या से सम्बन्धित समंकों को एकत्रित व विश्लेषित करके जरूरी निष्कर्ष ज्ञात करने से सम्बन्ध रखता है। सांख्यिकी के माध्यम से प्राप्त निष्कर्ष समस्या का हल निकालने की प्रक्रिया में वैज्ञानिक आधार की भूमिका निभाता है।

प्र.2. सांख्यिकी का स्वभाव एवं क्षेत्र का वर्णन कीजिए।
Describe the nature and scopes of Statistics.

उत्तर

सांख्यिकी का स्वभाव
(Nature of Statistics)

सांख्यिकी एक विज्ञान है (Statistics is a Science)—विज्ञान वह शास्त्र है जिसमें हमें क्रमबद्ध अथवा व्यवस्थित ज्ञान की प्राप्ति होती है। विज्ञान की निर्धारित शर्तों को देखते हुए सांख्यिकी को निम्न आधारों पर विज्ञान कहा जा सकता है—

1. इसकी अनेक रीतियों का समस्त क्षेत्रों में व्यापक उपयोग होता है। सम्भावना का सिद्धान्त, सांख्यिकीय नियमितता नियम, महांक जड़ता नियम इत्यादि सार्वभौमिक नियम हैं।
2. सांख्यिकी ज्ञान का नियमबद्ध समूह है तथा बड़ी तेज गति से विकसित हो रहा है।
3. समंकों का संकलन करना इसके बाद उनके विश्लेषण द्वारा **'कारण'** तथा **'परिणाम'** का सम्बन्ध बताते हुए निर्वचन करना सांख्यिकी की प्रमुख क्रियाएँ हैं।
4. भूतकाल तथा आधुनिक समय के तथ्यों के आधार पर भविष्य की प्रवृत्तियों का पूर्वानुमान अनेक सांख्यिकीय विधियों द्वारा किया जाता है जिनमें काल श्रेणियों का विश्लेषण, बाह्यगणन, प्रतीपगमन इत्यादि प्रमुख हैं।

अत: हम कह सकते हैं कि सांख्यिकी को विज्ञान कहना सर्वथा उचित है। लेकिन कुछ विद्वानों जिनमें **क्रॉक्सटन** तथा **काउडेन** प्रमुख हैं, ने कहा है, ''सांख्यिकी विज्ञान नहीं, बल्कि यह एक वैज्ञानिक विधि है।'' ऐसा इसलिए कहा जाता है कि अन्य समस्त विज्ञानों में एक साधन के रूप में सांख्यिकी का प्रयोग होता है लेकिन इसका तात्पर्य यह नहीं है कि सांख्यिकी विज्ञान नहीं है।

सांख्यिकी कला है (Statistics in an Art)

''यदि विज्ञान ज्ञान है तो कला क्रिया है'' अर्थात् कला से अभिप्राय ज्ञान की उस शाखा से है जो अनेक समस्याओं को हल करने के लिए सर्वोत्तम रीतियों को बदलती है एवं तथ्यों को प्राप्त करने के उपाय भी बताती है।
सांख्यिकी कला भी है, क्योंकि—

1. कई समस्याओं के समाधान हेतु पृथक्-पृथक् सांख्यिकीय रीतियों व नियमों का उपयोग कैसे किया जाए? इस बात का अध्ययन भी सांख्यिकी में प्रमुख रूप से किया जाता है। उदाहरणार्थ, सांख्यिकी हमें बताती है कि अंकगणितीय माध्य का प्रयोग कहाँ उत्तम है तथा मध्यका का प्रयोग किस स्थिति में उत्तम रहेगा? सूचकांक कैसे बनाएँ तथा किस माध्य का प्रयोग किया जाए?
2. सांख्यिकीय विधियों के व्यवहार हेतु व्यक्ति में विशेष निपुणता, अनुभव व आत्म-संयम की जरूरत होती है जो किसी विषय को कला कहने के लिए अत्यधिक आवश्यक है।
3. सांख्यिकी कई समस्याओं का समाधान करने हेतु आँकड़ों के उपयोग, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण तथा निष्कर्ष निकालने के लिए उपाय व साधन प्रस्तुत करती है।

सांख्यिकी विज्ञान एवं कला दोनों है। निष्कर्षत: हम कह सकते हैं कि सांख्यिकी विज्ञान एवं कला दोनों ही है। जैसा कि **टिपेट** ने कहा है, ''सांख्यिकी विज्ञान तथा कला दोनों हैं। यह विज्ञान इसलिए है, क्योंकि इसकी विधियाँ मौलिक रूप से व्यवस्थित हैं और उनका प्रयोग सर्वत्र होता है और वह एक कला भी है, क्योंकि इसकी पद्धतियों का सफल उपयोग पर्याप्त सीमा तक सांख्यिकी की योग्यता, विशेष अनुभव व उनके प्रयोग क्षेत्र के ज्ञान पर आश्रित होता है, जैसे—अर्थशास्त्र।

सांख्यिकी एक वैज्ञानिक विधि है (Statistics is a Scientific Method)

उपरोक्त विवेचन से यह स्पष्ट है कि सांख्यिकी की प्रकृति के सन्दर्भ में विद्वानों में मतैक्य नहीं है। कुछ विद्वान इसे मात्र विज्ञान बताते हैं, कुछ कला के पोषक हैं तथा कुछ विद्वान इसे विज्ञान एवं कला दोनों मानते हैं, परन्तु वर्तमान विचारधारा के अनुसार सांख्यिकी को एक वैज्ञानिक विधि के रूप में लिया जाना ज्यादा उचित है। **श्री वालिस एवं रॉबर्ट्स** के अनुसार, ''सांख्यिकी मूलभूत ज्ञान का समूह नहीं अपितु ज्ञान प्राप्त करने की रीतियों का समूह है।'' इसलिए इसे ज्ञान प्राप्त करने की सामान्य वैज्ञानिक रीतियों के सन्दर्भ में समझना चाहिए। वैज्ञानिक अनुसन्धान के अन्तर्गत चार अवस्थाएँ—(i) अवलोकन (Observation), (ii) परिकल्पना (Hypothesis), (iii) पूर्वानुमान (Prediction) एवं (iv) परीक्षण (Verification) होती हैं तथा सांख्यिकी का उपयोग इन समस्त अवस्थाओं में होता है। अत: इसे विज्ञान अथवा कला की अपेक्षा वैज्ञानिक विधि कहना ज्यादा श्रेयस्कर होगा।

सांख्यिकी का क्षेत्र
(Scope of Statistics)

सांख्यिकी का क्षेत्र प्रारम्भ में बहुत सीमित था इसको शासन कला का विज्ञान समझा जाता था। इस विज्ञान का उद्देश्य अपराध, सैनिकों की संख्या, जन्म, मृत्यु, जनसंख्या इत्यादि सम्बन्धी सूचनाएँ पाना था। आधुनिक युग में सांख्यिकीय प्रविधियों में पर्याप्त विकास हो जाने की वजह से आज इसका क्षेत्र और अत्यधिक विस्तृत हो गया है।

1. **योजना एवं नीति**—यह सांख्यिकी का प्रधान क्षेत्र है। आधुनिक समय में राज्य, व्यापार, अर्थशास्त्र इत्यादि क्षेत्रों में बिना सांख्यिकी के योजना एवं नीति का निर्धारण असम्भव है।
2. **राज्य**—राज्य सांख्यिकीय प्रविधियों का मौलिक क्षेत्र था। वर्तमान में भी राज्य सम्बन्धी अनेक सूचनाओं को पाने में सांख्यिकीय प्रविधियों का उपयोग किया जाता है। उदाहरण—जन्म, मृत्यु, जनसंख्या एवं उसका वितरण, जातिगत संघर्ष, साम्प्रदायिक दंगे इत्यादि सम्बन्धी सूचनाओं के संग्रह में अनेक सांख्यिकी प्रविधियों का उपयोग होता है।
3. **सामान्य विज्ञान तथा मानव विज्ञान**—इन विज्ञानों की अनेक समस्याओं से सम्बन्धित आँकड़ों का संग्रह, विश्लेषण एवं व्याख्या हेतु सांख्यिकी प्रविधियों का उपयोग किया जाता है।

4. **मनोविज्ञान तथा शिक्षा**—सांख्यिकी विस्तृत रूप से मनोविज्ञान तथा शिक्षा से सम्बन्धित है। अलग-अलग मनोवैज्ञानिक तथा शैक्षिक समस्याओं के निवारण हेतु सांख्यिकी प्रविधियों का उपयोग किया जाता है। मनोविज्ञान तथा शिक्षा में वैयक्तिक विविधता, बुद्धिचिन्तन, सीखना, विस्मरण, प्रत्यक्षीकरण इत्यादि तथ्यों का मापन भी सांख्यिकी विधियों के माध्यम से सम्भव है।
   सांख्यिकी के माध्यम से ही निदानात्मक, परीक्षा, उपलब्धि परीक्षा, व्यक्तित्व परीक्षा एवं अभिक्षमता परीक्षा इत्यादि का निर्माण होता है तथा इन परीक्षाओं से जो परिणाम प्राप्त होता है, उसका भी सांख्यिकी के माध्यम से विश्लेषण होता है। सांख्यिकी का महत्त्व मनोविज्ञान तथा शिक्षा में इतना ज्यादा बढ़ गया है कि यह अब इसकी नवीन शाखा बन गयी है जिसको मनोमिति कहा जाता है।
5. **जीव विज्ञान तथा चिकित्सा विज्ञान**—सांख्यिकी ने जीव विज्ञान के क्षेत्र में वंश परम्परा सम्बन्धी आँकड़ों के संग्रह, व्याख्या एवं विश्लेषण में एक महत्त्वपूर्ण भूमिका निभायी है। आज भी सांख्यिकी का चिकित्सा शास्त्र के क्षेत्र में अलग-अलग रोगों के प्रसार व कारण से सम्बन्धित आँकड़ों के संग्रह, व्याख्या एवं विश्लेषण में व्यापक उपयोग किया जा रहा है।
6. **व्यापार तथा प्रबन्ध**—सांख्यिकी का व्यापार तथा प्रबन्ध के क्षेत्र में व्यापक रूप से उपयोग किया जाता है। सांख्यिकी प्रविधियों का विपणन, उत्पादन, बिक्री एवं खरीद इत्यादि के समुचित संचालन हेतु उपयोग जरूरी है।
7. **ज्योतिष तथा भौतिक विज्ञान**—सांख्यिकीय विधियों का ज्योतिष विद्या के क्षेत्र में शुरू में ही तारे व ग्रह की चाल से सम्बन्धित समस्याओं के निवारण में उपयोग होता रहा है। इसी तरह सांख्यिकी का भौतिक विज्ञान में मात्रात्मक मापन की शुद्धता को बढ़ाने हेतु उपयोग किया जाता है।
8. **लेखा विद्या तथा लेखा परीक्षण**—सांख्यिकीय विधियों को लेखा विद्या के क्षेत्र में कठिन व्यवहार में लाया जाता है। इस क्षेत्र में प्रतीपगमन विश्लेषण के सिद्धान्त का प्रयोग विशेषत: महत्त्वपूर्ण है। प्रतिचयन विधियों का व्यवहार लेखा परीक्षण में ज्यादा किया जाता है।
9. **गणित**—सांख्यिकी तथा गणित के मध्य घनिष्ठ सम्बन्ध है। सांख्यिकी गणित की ही एक शाखा है। सांख्यिकी की एक नवीन शाखा का विकास हो गया है जिसको गणितीय सांख्यिकी कहा जाता है।
10. **उद्योग तथा बीमा**—सांख्यिकी का महत्त्व विशेषत: औद्योगिक संगठनों में प्रतिचयन प्रविधि के रूप में देखा जाता है। अलग-अलग औद्योगिक समस्याओं के निवारण से उपलब्ध आँकड़ों के संग्रह, व्याख्या एवं विश्लेषण हेतु सांख्यिकी की जरूरत होती है। बीमा के क्षेत्र में विशेषत: सम्भाव्यता सिद्धान्त का उपयोग ज्यादा किया जाता है।

प्र.3. सांख्यिकी की आवश्यकता एवं शोध में सांख्यिकी की आवश्यकता का वर्णन कीजिए।
Describe the need of statistics and need of statistics in research.

उत्तर

सांख्यिकी की आवश्यकता
(Need of Statistics)

शिक्षा एवं मनोविज्ञान के क्षेत्र में कार्य करने वाले अधिकाधिक लोग सांख्यिकी को इस क्षेत्र के अनिवार्य भाग के रूप में अपना लेते हैं। कभी-कभी आरम्भिक कार्यकर्ता सांख्यिकी से भयभीत से दिखाई देते हैं और प्राय: पूछ लेते हैं कि, ''सांख्यिकी के बारे में अच्छा क्या है?'' ऐसा उन लोगों के साथ हमेशा सत्य ठहरता है जो अपने सम्बन्ध में यह जानकारी रखते हैं कि उन्हें अंकों से कार्य करने में समस्या होती है। शिक्षा व मनोविज्ञान के प्रथम पाठ्यक्रम का अध्ययन करने वालों में से बहुधा कुछ लोगों को गणित विषय बहुत आसान लगता है जबकि कुछ लोगों को $2 + 2$ की गणना करना भी कठिन लगता है। किन्तु शिक्षा अथवा मनोविज्ञान का अध्ययन करने वाले ऐसे व्यक्तियों को सांख्यिकीय विधियों को सीख लेना चाहिए, क्योंकि इसके बिना उच्च स्तर का अध्ययन करना जटिल होता है।

एक वस्तु को समझने की कई विधियाँ होती हैं। सांख्यिकी द्वारा मिले नये विचारों को एक छात्र उसी रूप में समझेगा जैसे कि एक गणितज्ञ समझता है, दूसरा छात्र, सांख्यिकी द्वारा मिले तार्किक नियमों की सराहना करेगा तथा उसे उन प्रत्ययों को देने वाले विषय के रूप में देखेगा जो चिन्तन में मदद करता है, जबकि तीसरा मात्र गणना को समझेगा और उसमें सन्निहित तर्क को कदापि नहीं समझेगा।

सम्भवत: किसी भी दूसरे विषय द्वारा इतने स्पष्ट रूप से यह मालूम नहीं होता है कि 'बुद्धि' (Intelligence) कई प्रकार की होती है। **चार्ल्स डारविन** जैसे बुद्धिमान व्यक्ति को भी सांख्यिकीय विधियों से कार्य करने में समस्या होती थी, जैसा कि स्वयं वह मानते थे। उन्हीं के प्रसिद्ध चचेरे भाई **सर फ्रांसिस गाल्टन,** जो मनोविज्ञान में सांख्यिकीय विधियों को लाने के लिए बहुत कुछ उत्तरदायी हैं, को भी कुछ गणितीय समस्याओं के समाधान के लिए दूसरे लोगों से मदद लेनी पड़ती थी।

अन्तर्दृष्टि एवं समझ के बिना किसी वस्तु का अधिगम उसे पूर्ण अभिप्रेरणा व उत्सुकता के बिना सीखने की भाँति है। सामान्य विद्यार्थी को एक गणितज्ञ की अपेक्षा कम अन्तर्दृष्टि से ही सन्तुष्ट रहना पड़ता है, किन्तु उसे एक स्तर–विशेष तक तो ज्ञान अर्जित करना ही चाहिए। यह ध्यान रखना चाहिए कि एक गणितज्ञ भी अपनी पूरी अन्तर्दृष्टि का प्रयोग नहीं कर पाता है। एक होशियार विद्यार्थी को अपने स्वयं के ढंग से इन विधियों के महत्त्व व अर्थों तथा प्रयोगों को समझने की कोशिश करनी चाहिए। सांख्यिकीय विधियों व चिन्तन के उचित प्रयोग के लिए एक विशेष उपलब्धि स्तर वांछित होता है। एक लिपिक को 'गणना' की विभिन्न विधियाँ सिखाई जा सकती हैं।

सांख्यिकी की आवश्यकता के सन्दर्भ में निम्न कारण सार्थक रूप में हैं—

1. **उन्हें उच्च पाठ्यक्रम हेतु महत्त्वपूर्ण तकनीकियों का पूर्णतः ज्ञान होना चाहिए** (They should have Complete Knowledge of Important Techniques for Advanced Courses)—उच्च पाठ्यक्रम की अपनी कुछ सामान्य विधियाँ होती हैं जिन्हें उपयोग में लाना पड़ता है चाहे वह प्रयोगशाला अध्ययन हो। प्रयोगशाला अध्ययनों के परिणामों को बिना सांख्यिकीय प्रत्ययों के ज्ञान के नहीं समझा जा सकता है। इसी तरह क्षेत्र अध्ययन अथवा सर्वेक्षण के परिणामों के लिए भी सांख्यिकीय प्रत्ययों के ज्ञान की जरूरत पड़ती है।
2. **वे व्यावसायिक साहित्य का अध्ययन कर सकें** (They can study Professional Literature)—इसमें कोई सन्देह नहीं है कि किसी भी क्षेत्र का ज्ञान अधिकतम अध्ययन करने से आता है। अच्छे विद्यार्थी अपनी क्षमता का पूर्ण ह्रास पठन की निपुणता में नहीं करते। किसी भी विशेष क्षेत्र में पढ़ने से उनकी शब्दावली में वृद्धि होती है। व्यवहार पर विज्ञानों के लेखों का पठन बिना सांख्यिकीय प्रत्ययों, प्रतीकों और विचारों का सामना किये हुए नहीं हो सकता। बच्चों की भाँति कोई भी पाठक इन कठिन भागों को छोड़कर आगे पढ़ना आरम्भ कर सकता है। लेकिन वयस्कों की स्थिति में यह स्वीकार्य नहीं है, क्योंकि कठिन भाग बहुधा अत्यन्त महत्त्वपूर्ण होता है। लेकिन जो लोग ऐसे कठिन भाग को छोड़ देते हैं वे अपने निष्कर्षों के लिए दूसरे लोगों के निष्कर्षों पर निर्भर करते हैं। इस प्रकार स्वतन्त्र रूप से निर्णय लेने के लिए यह अनिवार्य है कि सांख्यिकी के मूलभूत सिद्धान्तों से व्यक्ति अवगत हो।
3. **शोध कार्यों के लिए सांख्यिकी आधारभूत है** (Statistics is Basic to Research Activities)—शिक्षाविद् एवं मनोवैज्ञानिक यद्यपि अपनी रुचि को शोध क्षेत्र में बनाये रखना चाहते हैं तो उन्हें सांख्यिकीय विधियों में निपुण होना होगा। शोध एवं सांख्यिकीय विधियों के सम्बन्धों पर आगे बताया जाएगा। यहाँ यह बताने का प्रयास किया जा रहा है कि शोध के लिए सांख्यिकीय विधियों का ज्ञान अनिवार्य है। प्रत्येक शोधकर्ता को इनका अवश्य ज्ञान होना चाहिए।
4. **सांख्यिकीय व्यावसायिक प्रशिक्षण का महत्त्वपूर्ण भाग है** (Statistics is an Important Part of Professional Training)—प्रशिक्षित शिक्षाविद् व मनोवैज्ञानिक स्वयं को व्यावसायिक समझना पसन्द करते हैं। कुछ हद तक सांख्यिकीय तर्क, सांख्यिकीय चिन्तन एवं सांख्यिकीय क्रियाएँ उनके व्यवसाय का महत्त्वपूर्ण अंग हैं। वे लोग जहाँ तक परीक्षणों का उपयोग करते हैं, वहाँ तक उन्हें इन परीक्षणों के प्रशासन व इनके परिणामों की विवेचना हेतु सांख्यिकीय प्रत्ययों पर निर्भर रहना होता है। बिना सांख्यिकीय तर्कों के ज्ञान के मनोवैज्ञानिक परीक्षणों का उपयोग, जिन पर यह आधारित होते हैं, उसी तरह है जैसे बिना भौतिक ज्ञान के एक चिकित्सक द्वारा नैदानिक परीक्षणों का उपयोग।
5. **इसके द्वारा सामान्य निष्कर्ष निकालने में मदद मिलती है** (It Helps in Drawing General Conclusions)—इनसे न सिर्फ सामान्य निष्कर्ष निकालने में मदद मिलती है अपितु निष्कर्ष निकालने की प्रक्रिया का निर्धारण निश्चित ग्राह्य नियमों के आधार पर होता है। इसके अलावा सांख्यिकीय चरणों के माध्यम से हम यह बता सकते हैं कि हम अपने निष्कर्षों में किस सीमा तक विश्वास रख सकते हैं और अपने सामान्यीकरण में किस सीमा तक वृद्धि कर सकते हैं।

6. **इसके द्वारा सर्वोत्तम उचित विवरण सम्भव है** (It Permits the most Exact Kind of Description)—सभी कुछ कहने व करने के बाद विज्ञान का लक्ष्य प्रत्यय का विवरण देना होता है, जो कि इतना पूर्ण व उचित हो कि उसे समझने वाले प्रत्येक व्यक्ति के लिए वह लाभकारी हो। गणित और सांख्यिकी हमारी विवरणात्मक भाषा के अंग हैं, विशेषत: वैज्ञानिकों द्वारा प्रयोग की गई यह भाषा अत्यन्त महत्त्वपूर्ण है। वैज्ञानिकों ने इसे इनकी उचित व उत्तम प्रकृति के कारण ही अपनाया है।
7. **सांख्यिकी हमें अपने परिणामों को सार्थक एवं सरल रूप में सारगर्भित करने में सहायक होती है** (Statistics Enable us to Summarize our Results in a Meaningful and Convenient Form)—निरीक्षणों का पुञ्ज अपने आप में निरर्थक व उलझाने वाला होता है। इन प्रदत्तों से अर्थ ग्रहण करने के लिए इन्हें व्यवस्थित करना जरूरी होता है। प्रदत्तों का व्यवस्थापन सांख्यिकी के माध्यम से ही मिलता है।

शोध में सांख्यिकी की आवश्यकता
(Need of Statistics in Research)

शोध में सांख्यिकी की आवश्यकता क्यों होती है, इसको निम्नवत् समझाया गया है—

1. **यह हमें पूर्वकथन करने में सहायक होते हैं** (It Enables us to Predict)—सांख्यिकी हमें यह बताने में योग्य बनाती है कि किन्हीं स्थितियों में जिन्हें हम जानते हैं तथा जिन्हें हमने मापा है, कोई वस्तु अथवा घटना 'कितनी घटेगी'। उदाहरण के लिए, अगर हम यह जानते हैं कि किसी विद्यार्थी के सामान्य शैक्षिक अभिक्षमता में कितने अंक हैं अथवा उसके गणित में कितने अंक हैं, तो हम बीजगणित में उसके सम्भावित अंकों का पूर्वकथन कर सकते हैं। हमारे पूर्वकथन में कुछ ऐसे कारकों के कारण जिन पर हमने ध्यान नहीं दिया है, कुछ गलती हो सकती है, किन्तु सांख्यिकीय विधियाँ यह बता सकती हैं कि हम अपने पूर्वकथन में कितनी गलती को स्वीकार कर सकते हैं। इस प्रकार हम न सिर्फ पूर्वकथन कर सकते हैं अपितु यह भी बता सकते हैं कि उनमें कितना विश्वास किया जा सकता है।
2. **सांख्यिकीय विधियाँ हमें अपनी प्रक्रिया तथा चिन्तन में सही होने के लिए बाध्य करती हैं** (Statistical Methods Compel us to be Correct in our Procedures and in our Thinking)—एक बार एक लेखक ने एक मनोवैज्ञानिक को अपने निष्कर्षों की पुष्टि में यह कहते हुए सुना कि वह 'सही व अस्पष्ट' रहना पसन्द करेगा बजाय 'गलत व विशिष्ट' (Definite and Wrong) होने के। लेकिन 'सही व अस्पष्ट' (Vague and Right) अथवा 'गलत व विशिष्ट' (Definite and Wrong) में से कोई भी विकल्प उचित नहीं है। सही व विशिष्ट भी हो सकता है तथा लेखक के मत में विशिष्ट होने पर ही अधिक सही हो सकता है।
3. **सांख्यिकी हमें कुछ उलझे हुए तथा कठिन प्रत्ययों के कारक घटकों के विश्लेषण के उपयुक्त बनाती है** (Statistics enables us to Analyze some Complex and typical terms)—समाज विज्ञानों व विशेषकर शिक्षा एवं मनोविज्ञान के क्षेत्र में यह सामान्यत: उचित है कि कोई घटना कई कारक घटकों के फलस्वरूप घटित होती है। इन कारक घटकों को प्रयोगात्मक विधि द्वारा सबसे उत्तम रूप में जाना जा सकता है। अगर यह प्रदर्शित किया जा सके कि, अन्य समस्त घटकों को नियन्त्रित कर लिया गया था अथवा समान रखा गया था। अतएव X विशेषता के व्यक्तित्व वाले व्यक्ति व्यापार में विफल हुए थे, तो कहा जा सकता है कि 'X' व्यक्तित्व वाले व्यक्ति व्यापार के लिए नुकसानदेह हैं।

दुर्भाग्यवश समाज विज्ञानों में ऐसे शुद्ध प्रयोगों का व्यवस्थापन सम्भव नहीं है। इस प्रकार एक अन्य उत्तम मार्ग सांख्यिकीय अध्ययन करना है। जहाँ प्रयोगात्मक अध्ययन सम्भव है वहाँ भी प्रदत्तों के उचित सांख्यिकीय विश्लेषण द्वारा निष्कर्ष ग्रहण किये जाते हैं। अतएव सांख्यिकी व प्रयोगात्मक विधि का चोली-दामन का साथ है।

प्र.4. सांख्यिकी में प्रतीक एवं महत्त्वपूर्ण सांख्यिकी प्रत्यय का वर्णन कीजिए।
Describe the symbols and important statistics terms.

उत्तर

सांख्यिकीय में प्रतीक
(Symbols in Statistics)

सांख्यिकी में कुछ प्रतीक हैं जिनके द्वारा सांख्यिकी नियमों को स्पष्ट एवं मितव्ययी रूप से प्रदर्शित किया जा सकता है। चूँकि शब्दों द्वारा कथनों को उतनी स्पष्टतया से नहीं कहा जा सकता जितना कि चिह्नों द्वारा स्पष्टत: बताया जा सकता है, विशेष रूप से

गणित व सांख्यिकी में। **वोलटाने** (Voltane) के अनुसार, "One merit of poetry few will deny, it says more and in fewer words than prose." इसी बारे में **डेविड ईग्युन स्मिथ** (David Eigen Smith) ने कहा है, "One merit of mathematics few will deny, it says more and in fewer words than any other science." अर्थात् गणित की एक विशेषता जिसे शायद ही कोई अस्वीकार कर सके यह है कि वह कुछ शब्दों में ही इतना कह जाती है जितना और कोई वैज्ञानिक भाषा नहीं कह पाती है।

प्रतीकात्मक प्रतिनिधित्व के सामान्य सिद्धान्त निम्नलिखित हैं—

(i) नम्बर अथवा मात्रा को वर्णमाला के अक्षरों से प्रदर्शित किया जाता है, उदाहरण के लिए h ऊँचाई का प्रतिनिधित्व करता है, X, Y व Z सामान्य चरों का प्रतिनिधित्व करते हैं।

(ii) +, –, ×, ÷ व अन्य प्रतीकों द्वारा मूल क्रियाओं को प्रदर्शित किया जा सकता है। प्रतीक (.) का उपयोग भी गुणा (Multiplication) के लिए होता है।

(iii) Σ (Sigma) योग का प्रतीक है। X_1, X_2, X_3, X_4 का योग होगा—

$$\sum_{i=1}^{4} Xi$$

(iv) बड़े (Capital), छोटे व ग्रीक अक्षरों के उपयोग से विभेद किया जा सकता है, जैसे—दो क्रमिक परीक्षण पर बालक के अंकों को A, a अथवा B, b से प्रदर्शित किया जा सकता है।

(v) समूहबद्धता के लिए कोष्ठक ( ), वर्ग कोष्ठक [ ], ब्रास (Brace) { }, क्षैतिज रेखा – आदि का उपयोग होता है।

(vi) आच्छादन को $N_{|}, N_{||}, N_{|||}, N_{||||}$ जैसे प्रतीकों में प्रदर्शित किया जाता है, जैसे—Ng (बालिकाओं की संख्या) एवं Nm (पुरुषों की संख्या)। दूसरी अवस्था, जैसे—A और B नगरों में पुरुष तथा स्त्रियों के वेतन को Sm A, Sw A, Sm B तथा Sw B से प्रदर्शित किया जाता है।

(vii) अंकों में सम्बन्धों को निम्नलिखित पारम्परिक प्रतीकों से प्रदर्शित किया जाता है—

प्रतीक	**वाचिक समानता**
=	बराबर अथवा समान
<	इससे कम अथवा छोटा
>	इससे बड़ा अथवा बड़ा
≤	इसके बराबर अथवा कम
≥	इसके बराबर अथवा बड़ा
≠	बराबर नहीं

(viii) कुछ सांख्यिकी प्रतीक हैं, जैसे—f = आवृत्तियाँ, Σf = आवृत्तियों का योग, F = संचयी आवृत्तियाँ, N = अंकों की संख्या, X = प्राप्तांक, $\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}$ = औसतांक (M), x = औसतांक से विचलन, d = काल्पनिक औसतांक से विचलन।

(ix) कुछ प्रतीक हैं जिनका उपयोग बहुविकल्प अवस्थाओं के लिए होता है, जैसे—एक गणितीय परीक्षण, जिसमें तीन उपपरीक्षण, बीजगणित, अंकगणित व रेखागणित हैं लेकिन व्यक्ति के अंक निम्नांकित हैं—

व्यक्ति	उप-परीक्षण			कुल प्राप्तांक
	1	2	3	
1	8	5	7	20
2	2	9	3	14
3	10	5	6	21
4	16	8	7	31
5	7	9	9	25

इसमें अगर S = व्यक्ति, J = उपपरीक्षण, तब व्यक्तियों के प्राप्तांकों का योग होगा—

$$= \sum_{i=1}^{S}$$

उप-परीक्षणों के प्राप्तांकों का योग— $\sum_{j=i}^{3} \text{Ji}$

कुल योग $\sum_{i=1}^{S} = \sum_{j=i}^{5}$

महत्त्वपूर्ण सांख्यिकीय प्रत्यय
(Important Statistical Terms)

प्रदत्त का अर्थ (Meaning of Data)—जिस तथ्य अथवा सूचना के आधार पर निष्कर्ष निकाला जाता है इसे प्रदत्त कहा जाता है। उपयोगों, सर्वेक्षणों तथा अनुसन्धान में जो आँकड़े अथवा सूचनाएँ इकट्ठी की जाती हैं उन्हें प्रदत्त कहा जाता है। Data के प्रदत्त शब्द का उपयोग किया जाता है। Data शब्द बहुवचन है तथा इसके Datum को बहुवचन कहते हैं। अंकात्मक प्रदत्त के दो प्रकार हैं—(i) गणनाश्रित प्रदत्त जैसे—10 छात्राएँ, 8 छात्र, 10 पेन तथा 4 पेन्सिल इत्यादि, (ii) मीट्रिक प्रदत्त—वे प्रदत्त हैं, जिनको गिन नहीं सकते, लेकिन उनको मापा जा सकता है, जैसे—दो किलो, पाँच मीटर इत्यादि।

प्राप्तांक का अर्थ (Meaning of Score)—प्राप्तांक का आशय उस इकाई से है जो दो सीमान्तों के बीच होती है। किसी भी परीक्षण पर 130 प्राप्तांक का आशय है। 129.5—130.5 का मध्य बिन्दु। 130 प्राप्तांकों को एक अन्य दृष्टिकोण से भी प्रस्तुत किया जा सकता है कि किसी व्यक्ति ने 130 प्रश्नों का उत्तर दिया।

सांख्यिकीय शृंखला (Statistical Series)—जब वस्तुओं को गिनकर अथवा उनका मापन करके उन्हें किसी निश्चित क्रम में व्यवस्थित कर दिया जाता है तो उस शृंखला को सांख्यिकीय शृंखला कहा जाता है। अत: सांख्यिकीय शृंखला वह प्रत्यय है जिसमें प्रदत्तों को एक सुनिश्चित तथा तार्किक क्रम में दर्शाते हैं। कुछ प्रमुख शृंखलाएँ निम्नवत् हैं—

1. **खण्डित शृंखला** (Discrete Series)—जब दो बटे हुए समूहों में अन्तर तो वास्तविक हो, लेकिन इस अन्तर को मापना सम्भव हो, तो इस तरह के प्रदत्तों को खण्डित शृंखला की संज्ञा प्रदान की जा सकती है। उदाहरण—पाँच विद्यार्थियों के समूह में क्रमश: 40, 45, 50, 55, 60 अंक परीक्षा में मिले हैं। यहाँ 40 से 45 अंक प्राप्त करने वाले छात्रों में जो अन्तर है उतना अन्तर 55 तथा 60 में नहीं है। अतएव इन पाँचों विद्यार्थियों के अंक खण्डित शृंखला में आते हैं।
2. **निरन्तर शृंखला** (Continuous Series)—जब अंकों को कम अथवा ज्यादा किया जा सके अर्थात् जिस माप में विभिन्न खण्ड होने के गुण हों, उसे निरन्तर शृंखला कहते हैं। इस शृंखला के अन्तर्गत आने वाले प्राप्तांक को किसी भी सीमा तक उपविभाजित कर सकते हैं। जैसे—पाँच मीटर रस्सी को एक-एक मीटर के पाँच टुकड़ों में बाँट दिया जाए तो पाँचों टुकड़ों की लम्बाई एक जैसी होगी। इसी तरह बुद्धि, भार, लम्बाई, ऊँचाई इत्यादि का मापन तथा उपविभाज्य सम्भव है। मनोविज्ञान तथा शिक्षा की समस्याओं से सम्बन्धित विभिन्न चरों को मापा जा सकता।
3. **व्यक्तिगत शृंखला** (Individual Series)—जब दिये हुए आँकड़ों से समूह या वर्ग बनाना असम्भव हो अथवा हर एक पद को महत्त्व देना हो तो इस तरह की शृंखला तैयार की जाती है। इस तरह की श्रेणी में हर एक पद स्वतन्त्र होता है। ऐसी शृंखला आरोही तथा अवरोही दोनों क्रमों में तैयार की जा सकती है।

पूर्ण संख्याएँ (Rounded Number)—सांख्यिकी में गणना करते वक्त दशमलव के चार स्थान तक परिणाम निकाल सकते हैं, लेकिन परिणाम लिखते समय दशमलव चिह्न के पश्चात् कितनी संख्याओं का मान निकालना चाहिए यह जानना जरूरी है। प्राय: दशमलव के पश्चात् दो अंक तक की गणना की जाती है तथा तीसरे अंक की तुलना में दूसरे अंक को महत्त्व दिया जाता है—जैसे 0.469 को 0.47 लिखा जाएगा। दशमलव के पश्चात् के अंकों को हटाने में निम्नवत् नियमों का उपयोग किया जाता है—

(क) दशमलव के पश्चात् के अंकों में आखिरी अंक 5 अथवा 5 से ज्यादा होने की अवस्था में उसे हटाकर उससे पूर्व वाले अंक में एक जोड़ देते हैं जैसे—

0.475 = 0.48

4.806 = 4.81

8.186 = 8.19

(ख) अगर दशमलव के पश्चात् अंकों में आखिरी अंक 5 से कम हो, तो उस अंक को हटा देते हैं तथा उससे पूर्व वाले अंक में एक नहीं जोड़ते हैं जैसे—3.753 = 3.75

वास्तविक तथा लगभग संख्याएँ (Exact and Approximate Numbers)—वास्तविक अंक वे अंक होते हैं जिन्हें गिना जा सकता है जैसे—एक सभागार में 628 व्यक्ति उपस्थित हैं। यह वास्तविक अंक हैं। वास्तविक अंकों को व्यावहारिक रूप में बाँटा नहीं जा सकता। यह माप यथार्थ होते हैं। लगभग अंक वे अंक होते हैं जिनको मापा जा सकता है, लेकिन गिना नहीं जा सकता। जैसे—1.7 मीटर कागज, 1.6 एवं 1.75 मीटर का लगभग मान है।

सार्थक अंक (Significant Numbers)—दशमलव अंक के माध्यम से अंकों की स्थिति तथा सत्यता के स्तर का ज्ञान होता है। किसी वस्तु का 22.5 माप इस बात को बताता है कि वस्तु का मापन सेन्टीमीटर के दसवें भाग तक किया गया। अत: तीनों अंक सार्थक हैं। अगर किसी वस्तु की माप 22.005 है तो इसमें मात्र तीन अंक सार्थक हैं। दशमलव के पश्चात् वाले दोनों शून्य 5 अंक की स्थिति के द्योतक हैं। निम्नवत् उदाहरणों के माध्यम से अंकों की सार्थकता बतायी गयी है, जो निम्नवत् हैं—

411 में तीनों अंक सार्थक हैं।

411.000 में भी तीन (411) सार्थक अंक है, क्योंकि दशमलव के पश्चात् के शून्य अंक हमें पता हैं।

4110.00 में चार सार्थक अंक हैं, क्योंकि दशमलव के पश्चात् के शून्य अंक हमें मालूम हैं।

0.411 में तीनों सार्थक अंक हैं।

0.4110 में चार सार्थक अंक हैं। शून्य चौथे अंक की स्थिति को प्रदर्शित करता है।

0.00411 में तीन (411) सार्थक अंक हैं। पहले दो शून्य दशमलव लगाने हेतु लगा दिये गये हैं। यह शून्य आखिरी तीन अंकों की स्थिति को प्रदर्शित करने हेतु लगा दिये गये हैं।

बहुविकल्पीय प्रश्न

प्र.1. ''सांख्यिकी गणना का विज्ञान है।'' यह परिभाषा है—

(क) किंग (ख) सैलिगमैन

(ग) बाउले (घ) लोविट

उत्तर (ग) बाउले

प्र.2. सांख्यिकी को लैटिन भाषा में कहते हैं—

(क) स्टेटिस्टा (ख) स्टेट्स

(ग) स्टेटिस्टिक (घ) सांख्यिकीय

उत्तर (ख) स्टेट्स

प्र.3. सांख्यिकी को माना जाता है—

(क) विज्ञान (ख) कला

(ग) वैज्ञानिक विधि (घ) ये सभी

उत्तर (घ) ये सभी

प्र.4. ''सांख्यिकी गणित की वह शाखा है, जिसका सम्बन्ध अंकों की गणना से है।'' यह परिभाषा है—

(क) बाउले (ख) लोविट (ग) गिलफोर्ड (घ) किंग

उत्तर (ग) गिलफोर्ड

प्र.5. सांख्यिकी शब्द का अर्थ है—

(क) गणित से सम्बन्धित
(ख) संख्याओं से सम्बन्धित
(ग) ग्राफ से सम्बन्धित
(घ) जोड़ने से सम्बन्धित

उत्तर (ख) संख्याओं से सम्बन्धित

प्र.6. सांख्यिकी के मुख्य कार्य से भिन्न चयन कीजिए—

(क) प्रदत्तों का विभाजन करना
(ख) प्रदत्तों का निष्पक्षत: विश्लेषण करना
(ग) प्रदत्तों को व्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करना
(घ) घटनाओं से सम्बन्धित तथ्यों को संख्यात्मक रूप प्रदान कर उनका अध्ययन करना

उत्तर (क) प्रदत्तों का विभाजन करना

प्र.7. सांख्यिकी तथा गणित के बीच सम्बन्धों की स्थापना किस सदी में हुई?

(क) 16वीं
(ख) 18वीं
(ग) 19वीं
(घ) 17वीं

उत्तर (ख) 18वीं

प्र.8. निम्नलिखित में से किस मान का उपयोग किसी नमूने के लिए सारांश माप के रूप में किया जाता है, जैसे नमूना माध्य?

(क) जनसंख्या पैरामीटर
(ख) नमूना पैरामीटर
(ग) नमूना आँकड़ा
(घ) जनसंख्या का मतलब है

उत्तर (ग) नमूना आँकड़ा

प्र.9. निम्नलिखित में से कौन-सा सांख्यिकी की एक शाखा है?

(क) वर्णनात्मक आँकड़े
(ख) अनुमानात्मक आँकड़े
(ग) उद्योग आँकड़े
(घ) (क) और (ख) दोनों

उत्तर (घ) (क) और (ख) दोनों

प्र.10. किसी प्रक्रिया को बढ़ाने के लिए उपयोग किये जाने वाले वर्णनात्मक आँकड़ों के नियन्त्रण चार्ट और प्रक्रियाओं को इनमें से किस श्रेणी में वर्गीकृत किया जा सकता है?

(क) व्यवहार उपकरण
(ख) सीरियल उपकरण
(ग) उद्योग आँकड़े
(घ) सांख्यिकीय उपकरण

उत्तर (घ) सांख्यिकीय उपकरण

प्र.11. निम्नलिखित में से किसे नमूना सांख्यिकीय के रूप में भी दर्शाया जा सकता है?

(क) लोअरकेस ग्रीक अक्षर
(ख) रोमन अक्षर
(ग) सम्बद्ध रोमन वर्णमाला
(घ) अपरकेस ग्रीक अक्षर

उत्तर (ख) रोमन अक्षर

प्र.12. व्यक्तिगत उत्तरदाता, फोकस समूह और उत्तरदाताओं के पैनल निम्नलिखित में से किस विकल्प से सम्बन्धित है?

(क) प्राथमिक डेटा स्रोत
(ख) द्वितीयक डेटा स्रोत
(ग) मदबद्ध डेटा स्रोत
(घ) इंगित डेटा स्रोत

उत्तर (क) प्राथमिक डेटा स्रोत

प्र.13. वे चर क्या कहलाते हैं जिनकी गणना वजन, ऊँचाई और लम्बाई के अनुसार की जाती है?

(क) फ्लोचार्ट चर
(ख) असतत चर
(ग) निरन्तर चर
(घ) चर मापना

उत्तर (ग) निरन्तर चर

प्र.14. उत्पादों के उत्पादन के लिए मुद्रास्फीति दर प्रत्याशा, बेरोजगारी दर और क्षमता उपयोग की जाँच करने के लिए किस पद्धति का उपयोग किया जाता है?

(क) डेटा निर्यात तकनीक
(ख) डेटा आयात तकनीक
(ग) पूर्वानुमान तकनीक
(घ) डेटा आपूर्ति तकनीक

उत्तर (ग) पूर्वानुमान तकनीक

प्र.15. ग्राफिकल और संख्यात्मक तरीकों जैसी विशिष्ट प्रक्रियाओं का उपयोग निम्नलिखित में से किसमें किया जाता है?

(क) शिक्षा आँकड़े
(ख) वर्णनात्मक आँकड़े
(ग) व्यावसायिक आँकड़े
(घ) सामाजिक आँकड़े

उत्तर (ख) वर्णनात्मक आँकड़े

प्र.16. सांख्यिकी में प्रयुक्त वह पैमाना, जो परिमाण एवं अनुपात में अन्तर बताता है, क्या माना जाता है?

(क) घातांकीय पैमाना
(ख) अच्छाई का पैमाना
(ग) अनुपात पैमाना
(घ) सन्तोषजनक पैमाना

उत्तर (ग) अनुपात पैमाना

प्र.17. प्रदर्शन मूल्यांकन की समीक्षा, श्रम टर्नओवर दर, प्रोत्साहन की योजना और प्रशिक्षण कार्यक्रम निम्नलिखित में से किसके उदाहरण हैं?

(क) उत्पादन में सांख्यिकी
(ख) विपणन में सांख्यिकी
(ग) वित्त में सांख्यिकी
(घ) कार्मिक प्रबन्धन में सांख्यिकी

उत्तर (घ) कार्मिक प्रबन्धन में सांख्यिकी

UNIT-II

आँकड़ों का प्रस्तुतीकरण एवं व्यवस्थापन

Presentation and Organisation of Data

खण्ड-अ अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. विस्तार को परिभाषित कीजिए।

Define range.

उत्तर **विस्तार** (Range)—किसी आवृत्ति-विवरण के विस्तार को अन्तिम वर्गान्तर की ऊपरी सीमा तथा प्रथम वर्गान्तर की निचली सीमा के अन्तर के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। उपर्युक्त आवृत्ति-वितरण का विस्तार 2000 – 500 = 1500 है।

प्र.2. वर्ग सीमाएँ क्या हैं?

What is the class limits?

उत्तर प्रत्येक वर्गान्तर की ऊपरी तथा निचली सीमाओं को आवृत्ति वितरण की वर्ग सीमाओं के रूप में जाना जाता है। चूँकि प्रत्येक वर्गान्तर के अन्तर्गत उसकी निचली सीमा से प्रारम्भ होने वाले तथा अगले वर्गान्तर की निचली सीमा तक आने वाले अनन्त तक सभी सम्भावित मूल्य आते हैं, इसलिए एक वर्गान्तर की निचली सीमा तथा उससे अगले वर्गान्तर की निचली सीमा को वर्ग-सीमाएँ माना जाता है। उक्त उदाहरण में 500, 750, 1000, 1250, 1500 तथा 1750 सम्बन्धित वर्गों की निचली सीमाएँ (Lower Limits) तथा 750, 1000, 1250, 1500, 1750 तथा 2000 ऊपरी सीमाएँ (Upper Limits) हैं। सांख्यिकीय गणना की सुविधा के लिए निचली सीमा को 'L_1' तथा ऊपरी सीमा को 'L_2' कहते हैं।

प्र.3. वर्गान्तर किसे कहते हैं?

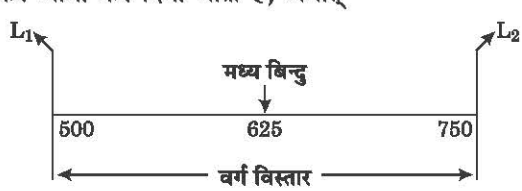
What is called class-intervals?

उत्तर **वर्गान्तर** (Class-Intervals)—आवृत्ति-वितरण के प्रत्येक वर्ग के आकार को वर्गान्तर कहा जाता है। उपर्युक्त आवृत्ति-वितरण में 500–750, 750–1000, ...1750–2000 वर्गान्तर हैं। प्रत्येक समूह या वर्ग का वर्गान्तर निचली सीमा से प्रारम्भ होकर वर्गान्तर की ऊपरी सीमा पर समाप्त होता है।

प्र.4. मध्य-मूल्य या मध्य-बिन्दु किसे कहते हैं?

What is called mid value or mid point?

उत्तर वर्ग सीमाओं के मध्य स्थान को मध्य-मूल्य अथवा मध्य-बिन्दु कहते हैं। मध्य-बिन्दु ज्ञात करने के लिए वर्ग की निचली-ऊपरी सीमाओं को जोड़कर आधा कर दिया जाता है, अर्थात्



मध्य-बिन्दु (Mid Value) = $\frac{L_1 + L_2}{2}$, उक्त उदाहरण में प्रथम वर्ग (500–750) का मध्य-मूल्य $\frac{500 + 750}{2}$ = 625 है, इसी प्रकार अन्य वर्गों के मध्य-मूल्य 875, 1125, 1375, 1625, 1875 होंगे।

प्र.5. वर्ग आवृत्ति या बारम्बारता क्या है?

What is frequency?

उत्तर समग्र के जितने अवलोकन किसी विशेष वर्ग की सीमाओं के अन्तर्गत आते हैं, उस वर्ग की बारम्बारता कहलाते हैं। उक्त उदाहरण में 500–750 वर्ग की बारम्बारता 200 है। इससे तात्पर्य यह है कि 500 से लेकर ₹ 750 तक व्यय करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 200 है।

आवृत्ति (Frequency)—आवृत्ति (Frequency) शब्द Flactuation (उतार–चढ़ाव) शब्द से बना है अर्थात् आवृत्ति वह है जिसमें उतार–चढ़ाव अवश्य होना चाहिए। अन्यथा वह आवृत्ति नहीं हो सकती। आवृत्ति के योग को अंग्रेजी के बड़े अक्षर 'N' से प्रदर्शित किया जाता है। जबकि व्यक्तिगत श्रेणी में आवृत्ति न होने के कारण मानी गई आवृत्ति के योग अंग्रेजी के छोटे अक्षर 'n' से प्रदर्शित किया जाता है अर्थात्

n = पदों की संख्या

N = आवृत्तियों का योग

प्र.6. डेटा संगठन और डेटा विश्लेषण क्या है?

What is data organization and data analysis?

उत्तर डेटा संगठन कच्चे डेटा को समझने योग्य क्रम में व्यवस्थित करने का तरीका है। डेटा को व्यवस्थित करने में वर्गीकरण, आवृत्ति वितरण तालिका, चित्र प्रतिनिधित्व, ग्राफिकल प्रतिनिधित्व आदि शामिल हैं। डेटा संगठन हमें डेटा को व्यवस्थित करने में मदद करता है ताकि हम आसानी से पढ़ सकें और काम कर सकें।

प्र.7. डेटा विश्लेषण का मुख्य उद्देश्य क्या है?

What is the main purpose os data analysis?

उत्तर डेटा विश्लेषण के कुछ प्रमुख उद्देश्यों में शामिल हैं—रुझानों और पैटर्न की पहचान करना, डेटा–संचालित निर्णय लेना, सहसम्बन्ध और सम्बन्धों का पता लगाना, विसंगतियों का पता लगाना, प्रदर्शन में सुधार करना और पूर्वानुमानित मॉडलिंग।

प्र.8. डेटा संग्रह का प्राथमिक उद्देश्य क्या है?

What is the primary purpose of data collection?

उत्तर **डेटा संग्रहण**—डेटा संग्रह एक स्थापित व्यवस्थित तरीके से रुचि के चर पर जानकारी इकट्ठा करने और मापने की प्रक्रिया है जो किसी को बताए गए शोध प्रश्नों के उत्तर देने, परिकल्पनाओं का परीक्षण करने और परिणामों का मूल्यांकन करने में सक्षम बनाता है।

खण्ड-ब लघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. वर्गान्तरों अथवा समूहों का संक्षिप्त वर्गीकरण दीजिए।

Give the short classification of by class-intervals or groups.

उत्तर

वर्गान्तरों अथवा समूहों में वर्गीकरण
(Classification By Class-Intervals or Groups)

सांख्यिकीय तथ्यों की प्रत्यक्ष संख्यात्मक माप सम्भव होने पर ही वर्गान्तरों में वर्गीकरण सम्भव होता है। ऊँचाई, भार, आय, निर्यात, उत्पाद आदि से सम्बन्धित समंकों का ही इस प्रकार का वर्गीकरण सम्भव होता है। उदाहरणस्वरूप, यदि किसी विश्वविद्यालय के 1,000 विद्यार्थियों के मासिक व्यय का अध्ययन किया जाए तो लगभग ₹ 500 से लकर ₹ 2,000 तक की 1,000 संख्याओं का संकलन हो जाएगा। इन संख्याओं को इस प्रकार वर्गान्तरों में विभाजित किया जाएगा जिससे वे सूक्ष्म हो जाएँ और उनको आसानी से समझा जा सके। यदि व्यय के वर्गों को ₹ 250 के अन्तर से बनाया गया तो निम्न प्रकार श्रेणी का निर्माण होगा—

वर्गान्तर (Class-intervals) व्यय ₹ में (Expenses in ₹)	आवृत्ति (Frequencies) विद्यार्थियों की संख्या (No. of Students)
न्यूनतम मूल्य (Lowest value)→500–750	200
750–1000	150
1000–1250	300
1250–1500	150
1500–1750	150
1750–2000←अधिकतम मूल्य (Largest value)	50
योग (Total)	1000

प्र.2. समावेशी श्रेणी को अपवर्जी श्रेणी में परिवर्तित कीजिए।

Explain the conversion of inclusive series into exclusive series.

उत्तर

समावेशी श्रेणी को अपवर्जी श्रेणी में परिवर्तित करना
(Conversion of Inclusive Series into Exclusive Series)

सांख्यिकी माध्य के अन्तर्गत मध्यिका (Median) तथा बहुलक (Mode) ज्ञात करने के लिए समावेशी श्रेणी (Inclusive Series) को अपवर्जी श्रेणी (Exclusive Series) में परिवर्तित करने की आवश्यकता पड़ती है, क्योंकि मध्यिका तथा बहुलक के सूत्रों में वर्ग-अन्तराल की निम्न सीमा या उच्च सीमा का प्रयोग किया जाता है। अत: वर्गान्तर की निम्न सीमा (L_1) तथा उच्च सीमा (L_2) का मान सही होना चाहिए।

समावेशी रीति में वास्तविक वर्ग सीमाएँ तथा मध्य बिन्दु ज्ञात करने में समस्या आती है। साथ ही द्वितीय वर्ग के L_1 और प्रथम वर्ग के L_2 के दशमलव मूल्यों का समायोजन नहीं हो सकता है। ऐसी स्थिति में समावेशी वर्गान्तरों को अपवर्जी वर्गान्तरों में बदल लेना चाहिए। समावेशी वर्गान्तरों को अपवर्जी बनाने की विधि निम्न प्रकार है—

$$\text{Correction Factor} = \frac{L_1 \text{ of 2nd Class} - L_2 \text{ of 1st Class}}{2}$$

इस Correction Factor को प्रत्येक वर्ग के L_1 से घटा देने और प्रत्येक वर्ग के L_2 में जोड़ देने से समावेशी वर्गान्तर अपवर्जी वर्गान्तर में परिवर्तित हो जाते हैं। परन्तु वर्गों की आवृत्तियों को नहीं बदला जाएगा। नीचे के उदाहरणों में (अ) और (ब) कालान्तरों के Correction Factor क्रमश: 0.5 और 0.05 होंगे, जिसे प्रत्येक वर्ग के L_1 से घटाने और प्रत्येक वर्ग के L_2 में जोड़ने से श्रेणी समावेशी से अपवर्जी हो जाएगी। यह आगे दर्शाया गया है—

	दी गयी सीमाएँ (Stated Limits)	वास्तविक सीमाएँ (Real Limits)	मध्य बिन्दु (Mid Point)
(अ)	50–54	49.5–54.5	52
	55–59	54.5–59.5	57
	60–64	59.5–64.5	62
	65–69	64.5–69.5	67
	70–74	69.5–74.5	72
(ब)	50–54.9	49.95–54.95	52.45
	55–59.9	54.95–59.95	57.45
	60–64.9	59.95–64.95	62.45
	65–69.9	64.95–69.95	67.45
	70–74.9	69.95–74.95	72.45

(स)	50.00–54.99	49.995–54.995	52.495
	55.00–59.99	54.995–59.995	57.495
	60.00–64.99	59.995–64.995	62.495
	65.00–69.99	64.995–69.995	67.495
	70.00–74.99	69.995–74.995	72.495

उदाहरण (Illustration)

निम्न समावेशी श्रेणी को, अपवर्जी श्रेणी मे बदलिए—

Convert the following inclusive series into exclusive series :

Class-Interval	C.I.	0–9	10–19	20–29	30–39	40–49
Frequency	F	2	4	15	6	3

हल (Solution) :

Given Inclusive Series as per question		Conversion procedure of L_1 and L_2		Exclusive series prepared	
Class Interval	Freq.	Correction factor of L_1	Correction factor of L_2	True C.I.	F
0–9	2	0 – 0.5 = (–) 0.5	9 + 0.5 = 9.5	(–) 0.5–9.5	2
10–19	4	10 – 0.5 = 9.5	19 + 0.5 = 19.5	9.5–19.5	4
20–29	15	20 – 0.5 = 19.5	29 + 0.5 = 29.5	19.5–29.5	15
30–39	6	30 – 0.5 = 29.5	39 + 0.5 = 39.5	29.5–39.5	6
40–49	3	40 – 0.5 = 39.5	49 + 0.5 = 49.5	39.5–49.5	3

Correction Factor = 1/2 of Difference = $\frac{10-9}{2}$ या $\frac{20-19}{2}$ या $\frac{30-29}{2}$ या $\frac{40-39}{2}$ = 0.5

उक्त Correction Factor को, प्रत्येक वर्गान्तर के L_1 में से घटाया जाएगा तथा L_2 में जोड़ा जाएगा तभी अपवर्जी श्रेणी को सही सीमाएँ (L_1 तथा L_2) ज्ञात होंगी।

प्र.3. खुले सिरे वाले या विवर्तमुखी वर्ग का उल्लेख कीजिए।

Explain the open and class intervals.

उत्तर

खुले सिर वाले या विवर्तमुखी वर्ग (Open and Class Intervals)

कुछ परिस्थितियों में श्रेणी के प्रथम वर्ग की निचली सीमा (L_1) तथा अन्तिम वर्ग की ऊपरी सीमा (L_2) नहीं दी जाती, ऐसे वर्गों को खुले सिर वाले वर्ग कहते हैं। इन वर्गों को पूर्ण करने हेतु इनका विस्तार वही रखा जाता है, जो उसके निकटतम वर्ग का रहता है इसके लिए प्रथम वर्ग की ऊपरी सीमा में वर्ग विस्तार घटाकर 'निचली सीमा' और 'अन्तिम वर्ग की निचली सीमा में वर्ग विस्तार को जोड़कर ऊपरी सीमा निर्धारित कर ली जाती है। जैसा कि निम्नलिखित श्रेणी में दिया गया है—

वर्ग (Class)	बारम्बारता (Frequency)
Below 10	7
10–15	10
15–20	13
20–25	18

25–30	8
30–35	5
Above 35	3
योग (Total)	64

ऐसी दशा में श्रेणी की रचना के आधार पर वर्गों की सीमाओं को लिख लिया जाता है। उक्त उदाहरण में 'Below' के स्थान पर '5' तथा 'Above' के स्थान पर '40' लिखा जाना चाहिए। ऐसी वर्ग-सीमाओं को निर्देशित सीमाएँ (Directed Boundaries) भी कहते हैं। यहाँ पर यह ध्यान रहे कि वर्ग विस्तार कितना भी हो, प्रथम वर्ग की निचली सीमा ऋणात्मक नहीं हो सकती, हाँ शून्य हो सकती है। एक उदाहरण द्वारा इसे स्पष्ट किया जा सकता है—

वर्ग (Class)	बारम्बारता (Frequency)
Below 5	6
5–15	15
15–25	28
25–35	16
Above 35	7

उपर्युक्त उदाहरण में प्रथम वर्ग के ठीक अगले वर्ग का विस्तार 10 है अत: प्रथम वर्ग की निचली सीमा 5 – 10 = –5 न होकर शून्य (0) होगी।

प्र.4. मध्य-मूल्य से अपवर्जी श्रेणी किस प्रकार तैयार की जाती है? उल्लेख कीजिए।

Explain, how to prepare exclusive series from mid-value.

उत्तर

मध्य-मूल्य से अपवर्जी श्रेणी तैयार करना
(Prepare Exclusive Series from Mid-Value)

मध्य-मूल्य (M.V.) का आशय किसी भी वर्ग की उच्च सीमा (L_2) तथा निम्न सीमा (L_1) के औसत मूल्य से है। यदि सतत् मूल्यों को मध्य-मूल्य (M.V.) के रूप में व्यक्त किया जाता है, तो मध्य-मूल्य ज्ञात करने के लिए निम्न सीमा एवं निम्न सीमा के जोड़ को 2 से भाग दिया जाता है। सूत्र के रूप में,

$$\text{Mid-point of Mid-value} = \frac{L_1 + L_2}{2}$$

यह ध्यान रहे कि मध्य-बिन्दु पर वास्तविक वर्ग सीमाओं का प्रभाव नहीं पड़ता है।

आवृत्ति वितरण में वर्गान्तरों को वर्ग सीमाओं के स्थान पर मध्य मूल्य के रूप में भी दिया जा सकता है। मध्य-मूल्य (Mid-value) को वर्गान्तर के रूप में परिवर्तित करने के लिए प्रत्येक मध्य-बिन्दु का अन्तर निकालिए। इस अन्तर का आधा करके मध्य-मूल्य में एक बार घटाइए एवं दूसरी बार जोड़िए अत:

वर्गान्तर की निम्न सीमा (L_1) तथा उच्च सीमा (L_2) निम्न सूत्र के द्वारा ज्ञात की जाएगी—

$$L_1 \text{ (निम्न सीमा)} = \left[MV - \frac{i}{2}\right] \qquad L_2 \text{ (उच्च सीमा)} = \left[MV + \frac{i}{2}\right]$$

यहाँ i = दो माध्य मूल्यों का अन्तर है।

प्रत्येक M.V. में अन्तर का 1/2 घटाने पर L_1 तथा जोड़ने पर L_2 ज्ञात हो जाएगा।

उदाहरण (Illustration)

निम्न वर्गान्तरों में मध्य-बिन्दु ज्ञात कीजिए—

Locate the mid-points of the following class-intervals :

(i) 0–5 (ii) 20–30 (iii) 1–7 (iv) 10–14
15–19
20–24

हल (Solution) :

Calculation of Mid-point :

(i) 0–5

$$\text{Mid-point} = \frac{L_1 + L_2}{2} = \frac{0+5}{2} = 2.5$$

(ii) 20–30

$$\text{Mid-point} = \frac{20+30}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

(iii) 1–7

$$\text{Mid-point} = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

(iv)

Class-Intervals	Mid-point
10–14	$\frac{10+14}{2} = 12$
15–19	$\frac{15+19}{2} = 17$
20–24	$\frac{20+24}{2} = 22$

प्र.5. असमान वर्गान्तरों को समान वर्गान्तरों में बदलिए।

The conversion of unequal class-intervals to equal class-intervals.

उत्तर

असमान वर्गान्तरों को समान वर्गान्तरों में बदलना

(Conversion of Unequal Class-Intervals to Equal Class-Intervals)

अनेक दशाओं में वर्गान्तर असमान होते हैं। ऐसी दशा में श्रेणियों के रूप इस प्रकार के हो सकते हैं—

A		B		C	
C.I.	**Frequency**		**Frequency**		
0–5	X	2	X	2–4	X
5–10	Y	5	Y	2–6	X + Y
10–20	Z	7	Z	2–8	X + Y + Z
20–30	A	7–20	A	8–10	A
30–50	B	20–40	B	10–12	B
50–75	C	40–60	C	12–14	C

समंकों में अधिक उच्चावचन होने की दशा में इस प्रकार की श्रेणियों की रचना की जाती है।

उदाहरण (Illustration)

निम्नलिखित असमान वर्गान्तर है। निम्न असमान वर्गान्तरों को समान वर्गान्तरों में बदलिए—

The following is the unequal class-interval. Convert the following unequal class-intervals into equal class-intervals.

Class-Intervals	0–3	3–5	5–10	10–11	11–13	13–15	15–20
Frequency	2	4	8	15	6	10	5

हल (Solution) :

Given		Converted Equal Class-Intervals	
Class-Intervals	F	Class-Intervals	Frequency
0–3	2	0–5	6
3–5	4		
5–10	8	5–10	8
10–11	15		
11–13	6	10–15	31
13–15	10		
15–20	5	15–20	5

खण्ड-स विस्तृत उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. आँकड़ों के व्यवस्थापन में सरल और आवृत्ति प्रबन्ध का वर्णन कीजिए।

Describe the simple and frequency array in organisation of data.

उत्तर

आँकड़ों का व्यवस्थापन
(Organisation of Data)

मापन का प्रयोग द्वारा प्राप्त मूल्यों का मूल आँकड़े (Raw score या Data) कहते हैं। इन आँकड़ों को बोधगम्य तथा ग्राह्य बनाने के लिए एवं इनसे सार्थक सूचनाएँ एकत्र करने के लिए इनका व्यवस्थापन करना पड़ता है। आँकड़ों का व्यवस्थापन मुख्यत: तीन प्रकार से कर सकते हैं—

I. सरल प्रबन्ध (Simple Array)।
II. आवृत्ति प्रबन्ध (Frequency Array)।
III. आवृत्ति वितरण (Frequency Distribution)।

I. सरल प्रबन्ध (Simple Array)

यह आँकड़ों को व्यवस्थित करने की सबसे सरलतम विधि है। किन्तु इसका उपयोग केवल उस समय किया जाना चाहिए जब आँकड़ों की संख्या कम हो। आँकड़ों की संख्या 20 से अधिक होने पर इस विधि का प्रयोग कदापि नहीं करना चाहिए। उन स्थितियों में भी इस विधि का उपयोग नहीं करना चाहिए। जब एक ही मूल्य की आवृत्ति अनेक बार हुई हो। इस विधि में आँकड़ों को केवल आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करना होता है। इसको नीचे सारणी में दिये गये उदाहरण द्वारा और भी स्पष्ट रूप से समझा जा सकता है।

सारणी—सरल प्रबन्ध

मूल आँकड़े (Basic Data)	आरोही क्रम (Ascending Order)	अवरोही क्रम (Descending Order)
7	12	2
8	9	3
5	8	4
4	7	5
2	5	7

9	4	8
12	3	9
3	2	12

II. आवृत्ति प्रबन्ध (Frequency Array)

ऐसी अवस्था में जब अंकों की आवृत्ति अनेक बार होती है तो सरल प्रबन्ध की अपेक्षा आवृत्ति प्रबन्ध द्वारा आँकड़ों को व्यवस्थित करना अधिक उपयोगी होता है तथा इसके द्वारा प्रदत्तों की प्रकृति को अधिक सरलता से समझा जा सकता है। उदाहरणार्थ, बीस लोगों की आयु के आँकड़े दिए हुए हैं—

(i) **आयु—** 14, 13, 13, 13, 13, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11,
11, 10, 10, 10, 10, 10, 9, 9

उक्त आँकड़ों को यदि व्यवस्थित करना हो तो निम्नांकित विधि द्वारा इन्हें प्रस्तुत किया जा सकता है—

(ii) **आयु—** 14
13 13 13 13
11 11 11 11 11 11 11 11
10 10 10 10 10
9 9

इस विधि द्वारा जो व्यवस्थापन किया गया है उससे सूचनाएँ स्पष्ट रूप से प्रस्तुत नहीं होती हैं क्योंकि इस विधि में मूल प्रदत्तों की स्थिति में अधिक अन्तर नहीं है। अत: इनको व्यवस्थित करने की सर्वश्रेष्ठ विधि निम्न प्रकार है—

सारणी–आवृत्ति प्रबन्ध

आयु	टेली	आवृत्तियाँ (f)
14	|	1
13	||||	4
11	~~||||~~ |||	8
10	~~||||~~	5
9	||	2
		N = 20

इस प्रकार अंकों के निकट उनकी आवृत्ति के अनुरूप टेलीज (Tallies) (|) लगाकर उनका योग किया जाता है। प्रत्येक अंक की टेलीज का योग उस अंक की आवृत्ति होती है। इस प्रकार आँकड़ों का आवृत्ति व्यवस्थापन प्राप्त होता है जिसे निम्न सारणी में बताया गया है—

सारणी

आयु	आवृत्तियाँ (f)
14	1
13	4
11	8
10	5
9	2
	N = 20

400 व्यक्तियों को उनके सामाजिक-आर्थिक स्तर के अनुरूप प्रस्तुत करना हो तो उन्हें आवृत्ति व्यवस्थापन के रूप में निम्न प्रकार प्रस्तुत किया जा सकता है—

सामाजिक-आर्थिक स्तर	आवृत्तियाँ	प्रतिशत आवृत्तियाँ
उच्च सामाजिक स्तर	80	20%
मध्य सामाजिक स्तर	80	20%
निम्न सामाजिक स्तर	240	60%
	400	**100%**

इसमें इस बात का ध्यान रखना है कि यदि वर्गों की संख्या बहुत अधिक हो तो इस विधि का प्रयोग सम्भव नहीं है। ऐसी अवस्था में आवृत्ति वितरण का प्रयोग किया जाता है।

प्र.2. आवृत्ति व आवृत्ति वितरण का अर्थ व इसके चरणों का वर्णन कीजिए।

Describe the meaning of frequency and frequency distribution and its steps.

उत्तर

आवृत्ति व आवृत्ति वितरण का अर्थ
(Meaning of Frequency and Frequency Distribution)

आवृत्ति का आशय है किसी संख्या का बारम्बार आना। अगर किसी समूह में कोई संख्या एक ही बार आती है तो उसकी आवृत्ति एक बार तथा अगर कोई संख्या 5 बार आती है तो उसकी आवृत्ति 5 बार होगी। अत: कोई प्राप्तांक अथवा घटना जितनी बार घटती है उसकी संख्या को आवृत्ति कहा जाता है।

संख्याओं की आवृत्तियों को स्पष्ट करने हेतु अनेक वर्गों अथवा समूहों में उनको दर्शाने की क्रिया को आवृत्ति वितरण (Frequency Distribution) कहा जाता है। प्राप्तांकों के प्रसार या वर्ग (Classes) के अनुसार आवृत्ति का वितरण होता है। जिससे ज्ञात होता है कि किस वर्ग में घटना की कितनी संख्या या आवृत्ति है। **चैपलिन** के अनुसार, "आवृत्ति वितरण से प्राप्तांकों के दिये गये वर्गान्तर या प्रसार में पड़ने वाली घटनाओं की संख्या का बोध होता है।"

आवृत्ति वितरण को निम्नवत् उदाहरण से स्पष्ट किया गया है। मान लें किसी बुद्धि परीक्षा में 50 छात्रों के प्राप्तांक निम्नांकित प्रकार से पाये गये हैं—

उदाहरण—

60	55	79	75	45	32	35	51	60	64
65	70	50	74	80	30	39	55	73	54
62	56	54	51	44	44	39	53	58	44
68	39	43	52	69	47	49	49	55	57
61	68	56	73	39	37	65	48	47	64

उपरोक्त उदाहरण के प्राप्तांकों को देखने से पता चलता है कि अंक 39 चार बार आया। इस प्रकार 39 अंक की आवृत्ति 4 हुई।

आवृत्ति वितरण के चरण
(Steps of Frequency Distribution)

1. **प्रसार** (Range)—सर्वप्रथम प्राप्तांकों के प्रसार क्षेत्र को ज्ञात करना चाहिए। इसके लिए सबसे उच्च प्राप्तांक में से न्यूनतम प्राप्तांक को घटा दिया जाता है।

   उदाहरण—90 उच्चतम एवं 40 न्यूनतम प्राप्तांक है। इस प्रकार

   प्रसार = उच्चतम अंक – न्यूनतम अंक

   Range = Highest Score — Lowest Score

   $= 90 - 40 = 50$

2. **वर्गान्तर** (Class Interval)—द्वितीय चरण में वर्गान्तरों की संख्या निश्चित की जाती है। किसी आवृत्ति वितरण में वर्गों की संख्या कितनी हो इसके लिए कोई सख्त नियम नहीं है। गैरेट ने 5 से 15 प्राप्तांकों का तथा गिलफोर्ड ने 10 से 20 प्राप्तांकों का वर्ग बनाने का सुझाव दिया।
3. **वर्गान्तरों की संख्या** (Number of Class Intervals)—वर्ग विस्तार निश्चित करने के पश्चात् वर्गों की संख्या निश्चित करनी चाहिए। इसके लिए निम्नवत् सूत्र का उपयोग होता है। प्राय: वर्गान्तरों की संख्या 5 से 20 तक हो सकती है। लेकिन परिणामों की शुद्धता को देखते हुए वर्गान्तरों की संख्या 10 से 15 रखना अधिक सही है। वर्गान्तरों की संख्या ज्ञात करने हेतु वर्गान्तर का आकार ज्ञात किया जाता है। वर्गान्तर का आकार निर्धारित करने हेतु निम्न सूत्र का उपयोग होता है—

$$\text{वर्ग विस्तार} = \frac{\text{प्रसार}}{\text{वर्ग विस्तार}} + 1$$

$$\text{Number of Class Intervals} = \frac{\text{Range}}{\text{Size of Class Intervals}} + 1$$

दिये गये उदाहरण में प्रसार 50 है। यहाँ वर्ग विस्तार रखने पर वर्गान्तर की संख्या 5 होगी।
4. **वर्गान्तर का प्रारम्भ** (Beginning of the Class-Interval)—वर्गान्तर को प्रारम्भ करने का सबसे अच्छा तरीका यह है कि दिये गये प्राप्तांकों में से न्यूनतम प्राप्तांक अथवा उससे नीचे किसी प्राप्तांक से प्रारम्भ किया जाए तथा उच्चतम प्राप्तांक अथवा उससे अधिक निकट के प्राप्तांक पर खत्म कर दिया जाए। दिये गये उदाहरण में न्यूनतम प्राप्तांक के प्रारम्भ करने पर प्रथम वर्गान्तर 30 से 34 होगा, लेकिन अगर न्यूनतम संख्या 31 होती, तो उससे नीचे के अंक 30 से ही वर्गान्तर प्रारम्भ करना सही था। आखिरी वर्गान्तर 80–84 होगा। याद रखने योग्य बात है 30–34 वर्गान्तर में से 5 अंक अर्थात् 30, 31, 32, 33 एवं 34 सम्मिलित है। प्रथम वर्गान्तर बनाने के पश्चात् दोनों तरफ वर्ग विस्तार संख्या (दिये गये उदाहरण में 5) को तब तक जोड़ते हैं जब तक कि उच्चतम प्राप्तांक प्राप्त नहीं हो जाता।
5. **मिलान चिह्न लगाना** (Making the Tallies)—सभी वर्गों को लिखने के पश्चात् वर्गान्तरों के समक्ष आवृत्तियों को चिह्नों (Tallies) के माध्यम से दर्शाते हैं। दिये गये उदाहरण में प्रथम प्राप्तांक 60 है जो 60–64 वर्गान्तर में आता है। इस प्रकार इस वर्गान्तर के सामने टैली चिह्न (|) लगा देते हैं। इस प्रकार समस्त प्राप्तांकों का टैली चिह्न लगा दिया गया। चार टैली के पश्चात् (||||) पाँचवीं टैली लिखने हेतु उन्हीं चार टैलियों को तिरछे काट दिया जाता है। जैसा कि निम्नलिखित उदाहरण के कॉलम 2 से सिद्ध होता है।
6. **बारम्बारता** (Frequency)—जब टैली चिह्न खत्म हो जाता है तब बारम्बारता (f) वाले कॉलम में प्रत्येक वर्गान्तर के समक्ष टैली को संख्या के रूप में लिख लिया जाता है। जैसा कि निम्नलिखित उदाहरण में कॉलम 3 में दर्शाया गया है। बारम्बारता की कुल संख्या N के बराबर होगी।

उदाहरण—

1	2	3
वर्गान्तर (Class-Interval)	**टैली (Tallies)**	**बारम्बारता (Frequency f)**
80–84	𝍷	1
75–79	𝍷𝍷	2
70–74	𝍷𝍷𝍷𝍷	4
65–69	𝍸	5
60–64	𝍸 𝍷	6
55–59	𝍸 𝍸	10
50–54	𝍸 𝍷𝍷	7

45–49	卌 I	6
40–44	IIII	4
35–39	III	3
30–34	II	2
		N = 50

प्र.3. आवृत्ति वितरण के प्रकारों का वर्णन कीजिए।

Describe the kinds of frequency distribution.

उत्तर उपरोक्त उदाहरण में सामोगिक शृंखला में 30–34 वर्गान्तरों की निम्नतम एवं उच्चतम सीमा क्रमश: 30–34 है। इसलिए इस वर्गान्तर का मध्य बिन्दु 32 है। इसी तरह शुद्ध वर्गीकरण शृंखला में 29.5–34.5 वर्गान्तर की निम्नतम एवं उच्चतम सीमा क्रमश: 29.5 और 34.5 है। इसलिए इस वर्गान्तर का मध्य बिन्दु 32 है। इसी तरह से निषेधात्मक शृंखला में 30–35 वर्गान्तर (नोट—35 अंक इस वर्गान्तर में शामिल नहीं है) की निम्नतम एवं उच्चतम सीमा 30 व 34 है। इसलिए इस वर्गान्तर का मध्य बिन्दु भी 32 है।

आवृत्ति वितरण के प्रकार
(Kinds of Frequency Distribution)

आवृत्ति वितरण मूल रूप से दो प्रकार का होता है—

I. एक-चरीय आवृत्ति वितरण (Univariate Frequency Distribution),

II. द्वि-चरीय आवृत्ति वितरण (Bivariate Frequency Distribution)

I. एक-चरीय वितरण (Univariate Frequency Distribution)

वह आवृत्ति वितरण जो एक चर मूल्यों तथा आवृत्तियों को दिखाता है, एक-चरीय आवृत्ति कहा जाता है। एक-चरीय आवृत्ति वितरण निम्न प्रकार का हो सकता है—

1. **व्यक्तिगत अवलोकनों की श्रेणी** (Series of Individual Observations)—व्यक्तिगत अवलोकनों की श्रेणी में प्रत्येक पद का अलग-अलग माप दिया जाता है। यदि 20 विद्यार्थियों के किसी विषय के अलग-अलग प्राप्तांक लिखे जाएँ या 10 परिवारों की मासिक आय अलग-अलग लिखी जाए या 7 व्यक्तियों की अलग-अलग लम्बाई लिखी जाए तो वह व्यक्तिगत अवलोकनों की श्रेणी कहलाएगी।

जैसे—

नाम	भौमिक	रेखा	रिया	जया	प्रिया	मीरा	मीना
लम्बाई (सेमी)	165	162	150	155	153	164	166

निम्नलिखित व्यक्तिगत अवलोकनों की श्रेणी का एक और उदाहरण निम्न है—

Roll No.	**Marks**	**Roll No.**	**Marks**
1	71	9	73
2	80	10	85
3	94	11	84
4	81	12	74
5	78	13	94
6	85	14	76
7	98	15	73
8	91	16	77

अनेक सांख्यिकीय गणनाओं के लिए व्यक्तिगत अवलोकनों की श्रेणी को क्रम से लगाना पड़ता है। इसे क्रमागत (Array) कहा जाता है। एक श्रेणी को चढ़ते हुए क्रम (Ascending Order) में अथवा घटते हुए क्रम (Descending Order) में क्रमागत किया जा सकता है।

उपर्युक्त श्रेणी को निम्नलिखित रूप से क्रमागत किया जाएगा—

बढ़ते क्रम में क्रमागत (Marks Arranged in Ascending Order)

71	76	81	91
73	77	84	94
73	78	85	94
74	80	85	98

घटते क्रम में क्रमागत (Marks Arranged in Descending Order)

98	85	80	74
94	85	78	73
94	84	77	73
91	81	76	71

आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण या वर्गीकरण हेतु व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series) एक सरल विधि है परन्तु जब मदों की संख्या अधिक होती है तो यह विधि अधिक उपयोगी नहीं होती है।

चित्र द्वारा आवृत्ति का प्रदर्शन

व्यक्तिगत श्रेणी में—व्यक्तिगत श्रेणी में पदों की संख्या (Number of Items) ही आवृत्ति (n) होती है। इसे अग्र चित्र के द्वारा दिखाया जा सकता है—

$\longrightarrow$

आवृत्ति

व्यक्तिगत श्रेणी में प्रत्येक पद की आवृत्ति समान होती है इसलिए उपरोक्त चित्र व्यक्तिगत श्रेणी की आवृत्ति को दर्शाता है। वास्तव में यह आवृत्ति नहीं होती है इसे केवल आवृत्ति मान लिया जाता है।

2. **खण्डित श्रेणी** (Discrete Series)—खण्डित अथवा विच्छिन्न सांख्यिकीय श्रेणी में प्रत्येक इकाई का यथार्थ माप (Exact Measurement) किया जा सकता है तथा विभिन्न पदों के चर मूल्यों में निश्चित अन्तर होता है। इसमें पद अधिकतर पूर्णांकों (Integral Numbers) में होते हैं। **प्रो० बॉडिंगटन** के अनुसार, "एक खण्डित श्रेणी वह है जिसमें व्यक्तिगत मूल्य एक-दूसरे से निश्चित मात्रा में भिन्न होते हैं।" (A discrete variable is one where the variates—Individual values—differ from each other by definite amount) विभिन्न पदों में निश्चित अन्तर स्पष्ट होते हैं। प्रति परिवार बच्चों की संख्या, प्रति गृह कमरों की संख्या आदि जैसे तथ्यों को इस प्रकार की श्रेणी में प्रस्तुत किया जाता है। खण्डित श्रेणी का एक उदाहरण निम्न प्रकार है—

प्रति परिवार बच्चे (X)	**परिवारों की संख्या** (f)
0	10
1	20
2	50
3	60
4	40
5	12
6	8
योग (Total)	200

कभी-कभी शब्दों के अक्षरों की गणना के आधार पर खण्डित श्रेणी का निर्माण करके विभिन्न सांख्यिकीय मापों की गणना की जाती है। ऐसी दशा में विभिन्न शब्दों के अक्षरों की गणना की जाती है, फिर उनकी आवृत्तियाँ (Frequencies) लिखकर खण्डित श्रेणी बना ली जाती है। निम्न उदाहरण में हम खण्डित श्रेणी का एक मनोरंजक प्रसंग दे रहे हैं जिसमें शब्दों के झंझटों को गिनकर खण्डित श्रेणी की रचना की गयी है। इसमें ब्रह्मा ने सृष्टि का निर्माण करते समय नारी (औरत) को बनाने में जिन औषधियों, गुणों या रसायनों का इस्तेमाल किया था, उसका सुन्दर वर्णन किया गया है। नारी यदि गुलाब की पंखुड़ी से भी अधिक कोमल और शहद से भी ज्यादा मीठी है तो वह फुँफकार मारते सर्प की तरह आक्रामक भी होती है। नारी ममता, त्याग, सहनशीलता एवं विनम्रता की प्रतिमूर्ति होती है और उसकी इसी महानता के आगे पुरुष नतमस्तक होने के लिए बाध्य होते हैं।

खण्डित या अखण्डित श्रेणी में—खण्डित या अखण्डित श्रेणी में आवृत्तियाँ अलग-अलग होती हैं तथा आवृत्तियों के योग Σf को या N से प्रदर्शित करते हैं। इसे निम्न चित्र द्वारा दिखाया जा सकता है—

आवृत्ति

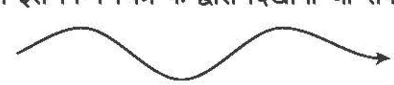
खण्डित या अखण्डित श्रेणी में आवृत्ति एक बार अवश्य बढ़ती है और एक बार अवश्य घटती है।

3. **सतत् श्रेणी** (Continuous Series)—सतत् श्रेणी में माप निश्चित नहीं होती, बल्कि दो संख्याओं के मध्य, एक वर्गान्तर में होती है। इससे माप सतत् बनी रहती है। **प्रो० बॉडिंगटन** के अनुसार, "सतत् श्रेणी में चर, वितरण के अधिकतम व न्यूनतम मूल्यों के मध्य किसी भी बीच के मूल्य को ले सकता है।" (The variable which can take any intermediate value between the smallest and largest value in the distribution.) सतत् आवृत्ति वितरण में वर्गान्तर सैद्धान्तिक रूप से, आवृत्ति वितरण के प्रारम्भ से लेकर अन्त तक बिना खण्डित हुए जारी रहते हैं। सतत् आवृत्ति वितरण और खण्डित आवृत्ति वितरण में इस प्रकार अन्तर किया जा सकता है कि पहले में माप वर्गान्तरों में विभक्त होती है और प्रत्येक वर्गान्तर की एक ऊपरी सीमा (Upper Limit) तथा एक निचली सीमा (Lower Limit) होती है, जबकि खण्डित श्रेणी में माप का वर्गीकरण एक निश्चित संख्या ही होती है।

सतत् श्रेणी का एक उदाहरण नीचे दिया जा रहा है—

Marks Obtained	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	Total
No. of Students	10	15	30	15	10	80

खण्डित या अखण्डित श्रेणी में—खण्डित या अखण्डित श्रेणी में आवृत्तियाँ अलग-अलग होती हैं तथा आवृत्तियों के योग को या से प्रदर्शित करते हैं। इसे निम्न चित्र के द्वारा दिखाया जा सकता है—



आवृत्ति

खण्डित या अखण्डित श्रेणी में आवृत्ति एक बार अवश्य बढ़ती है और एक बार अवश्य घटती है।

विच्छिन्न और अविच्छिन्न श्रेणी का अन्तर

क्र०सं०	विच्छिन्न श्रेणी	अविच्छिन्न श्रेणी
1.	इसमें पदों का आकार या मूल्य दिया होता है और उनकी आवृत्तियाँ दी होती हैं।	इसमें वर्ग और उसकी आवृत्तियाँ दी जाती हैं।
2.	इसमें पदों के यथार्थ माप होते हैं।	इसमें यथार्थ मापों के स्थान पर वर्गान्तर दिये जाते हैं।
3.	इसमें मूल्य प्राय: पूर्णांक संख्याएँ होती हैं।	इसमें मूल्य पूर्णांकों में प्रस्तुत नहीं किये जाते हैं।

4.	प्रायः ऐसी वस्तुएँ जिनका खण्डन न हो सके; जैसे—व्यक्ति, पृष्ठ संख्या आदि इस रूप में प्रस्तुत किए जाते हैं।	प्रायः ऐसी वस्तुएँ जहाँ मूल्य थोड़े-थोड़े अन्तर पर बदलकर खण्ड के रूप में हों; जैसे—वजन, ऊँचाई, आय, वेतन आदि इस रूप में प्रस्तुत किये जाते हैं।

द्वि-चरीय आवृत्ति वितरण (Bivariate Frequency Distribution)

द्वि-चरीय आवृत्ति वितरण से आशय इस प्रकार के आवृत्ति वितरण से है जिसमें समंकों का वर्गीकरण दो चरों अथवा मूल्यों को एक ही साथ ध्यान में रखकर करना पड़ता है। यह दो चरों के अवलोकित मूल्यों के युग्मों का उनकी आवृत्तियों के अनुसार वर्गीकरण होता है। उदाहरण के लिए, ऐसे पति-पत्नियों की संख्या को प्रदर्शित करना जो अमुक आयु वर्ग के मध्य हों। इसी प्रकार व्यक्तियों को उनकी ऊँचाई एवं भार के अनुसार साथ-ही-साथ प्रदर्शित करना।

द्वि-चरीय आवृत्ति वितरण के लिए द्विमार्गीय आवृत्ति सारणी का निर्माण करना होता है। एक चर को उदग्र रूप में रखा जाता है, जबकि दूसरे चर को समानान्तर रूप में रखा जाता है। निम्न उदाहरण में द्वि-चरीय आवृत्ति वितरण को स्पष्ट किया गया है—

Marks in Economics	Marks in Statistics				
	30–40	40–50	50–60	60–70	Total
30–40	3	1	1	—	5
40–50	2	6	1	2	11
50–60	1	2	2	1	6
60–70	—	1	1	1	3
Total	6	10	5	4	25

प्र.4. वर्गान्तर बनाने की विधियों का वर्णन कीजिए।

Describe the methods of forming class-intervals.

उत्तर

वर्गान्तर बनाने की विधियाँ
(Methods of Forming Class-Intervals)

वर्गान्तर दो प्रकार से बनाये जा सकते हैं—

1. अपवर्जी रीति (Exclusive Method) तथा 2. समावेशी रीति (Inclusive Method)।

1. **अपवर्जी रीति** (Exclusive Method)—अपवर्जी रीति में एक वर्ग की ऊपरी सीमा (Upper Limit) अगले वर्ग की निचली सीमा (Lower limit) समान होती है। उक्त उदाहरण में प्रथम वर्ग की ऊपरी सीमा '750' है जो अगले वर्ग की निचली सीमा है और इसी प्रकार दूसरे वर्ग की ऊपरी सीमा '1000' है जो तीसरे वर्ग की निचली सीमा है और यही क्रम अन्त तक पाया जाता है। वे सभी चर जिनका मूल्य 500 से अधिक व 750 से कम होगा, 500–750 वर्ग की बारम्बारता होंगे। '750' के मूल्य का पद 750–1000 के वर्ग में रखा जाएगा। दूसरे शब्दों में, वर्ग की ऊपरी सीमा वाले मूल्य उस वर्ग में शामिल नहीं होते।
2. **समावेशी रीति** (Inclusive Method)—समावेशी वर्ग-निर्माण की रीति सीमा के चरों के सम्बन्ध में अपवर्जी रीति में मापी जाने वाली संदिग्धता को दूर करती है। इस रीति के अनुसार उपर्युक्त वर्ग 500–740, 750–990, 1000–1240, 1250–1490, 1500–1740, 1750–1990 बनेंगे। यदि पूर्णांक संख्याएँ न हों, तो इन वर्गों को 500–749, 750–999, 1000–1249, 1250–1499, 1000–1749, 1750–1999 बनाये जा सकते हैं।

इन विधियों का स्पष्टीकरण निम्नलिखित उदाहरणों से किया जा सकता है—

(अ) अपवर्जी रीति (Exclusive Method)		(ब) समावेशी रीति (i) (Inclusive Method)		(स) समावेशी रीति (ii) (Inclusive Method)	
Class-Interval	**Frequency**	**Class-Interval**	**Frequency**	**Class-Interval**	**Frequency**
$L_1 - L_2$	(f)	$L_1 - L_2$	(f)	$L_1 - L_2$	(f)
500–750	7	500–740	7	500–749	7
750–1000	10	750–990	10	750–999	10
1000–1250	13	1000–1240	13	1000–1249	13
1250–1500	8	1250–1490	8	1250–1499	8
1500–1750	5	1500–1740	5	1500–1749	5

वर्गान्तरों में बारम्बारताओं को क्रमबद्ध करना (Sequences of Frequencies in Class-Intervals)—यदि व्यक्तिगत इकाईयों के मूल्य दिये गये हों तो उन्हें वर्गों के अनुसार वितरित करने के लिए मिलान–तालिका (Tally-Sheet) की सहायता ली जाती है। आवृत्तियों को वर्गान्तरों में क्रमबद्ध करने के लिए मिलान–तालिका बनाने की विधि इस प्रकार है—

प्रत्येक वर्ग में आने वाले अवलोकन या पद के लिए रेखा (|) उस वर्ग के सामने लगा दी जाती है। उस वर्ग में पाँचवाँ अवलोकन या पद आने पर पिछली चार रेखाओं को पाँचवीं रेखा से काट दिया जाता है (𝍸)। इस रीति को अनुमेलन विधि (Four and Cross Method) कहते हैं। अन्त में, इन रेखाओं को गिनकर वह संख्या (आवृत्ति) सम्बन्धित वर्ग के सामने लिख दी जाती है। अग्रलिखित उदाहरण से यह क्रिया स्पष्ट हो जाएगी—

उदाहरण (Illustration)

एक परीक्षा पत्र में 50 विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्न प्रकार से हैं—

The marks scored by 50 students in an examination paper are given below :

19	55	33	43	51	44	26	44	46	59
27	23	41	33	47	15	58	12	10	39
35	31	26	38	57	35	47	28	34	31
43	48	43	31	37	58	37	54	28	36
17	51	22	25	38	29	29	45	30	21

दस का वर्गान्तर लेते हुए एक आवृत्ति वितरण बनाइये।

Prepare a Frequency Table-taking a class-interval of ten.

हल (Solution) :

Tally Sheet

Marks	**Tally-Marks**	**Frequency**
10–20	𝍸	5
20–30	𝍸 𝍸 𝍷	11
30–40	𝍸 𝍸 𝍸	15
40–50	𝍸 𝍸 𝍷	11
50–60	𝍸 𝍷𝍷𝍷	8
	योग	**N or $\Sigma f = 50$**

उदाहरण (Illustration)

20 विद्यार्थियों के निम्न समंकों के आधार पर 5 के वर्गान्तर से अपवर्जी श्रेणी तालिका तैयार कीजिए—

From the following data of 20 students, prepare an Exclusive Continuous Series table with a class-interval of 5 :

20	16	14	04	09	24	05	02	10	23
22	17	15	04	06	21	12	07	03	08

हल (Solution) :

Exclusive Continuous Series

Class-Interval	**Tallies**	**Frequency (F)**
0–5	IIII	4
5–10	~~IIII~~	5
10–15	III	3
15–20	III	3
20–25	~~IIII~~	5
		N = 20

अपवर्जी एवं समावेशी रीतियों में अन्तर
(Difference between Exclusive Series and Inclusive Series)

क्र०सं०	अपवर्जी रीति	समावेशी रीति
1.	वर्ग की उच्च सीमा उस वर्ग में सम्मिलित होकर अगले वर्ग में शामिल होती है।	वर्ग की दोनों सीमाएँ इसी वर्ग में सम्मिलित होती हैं।
2.	वर्ग की उच्च सीमा एवं अगले वर्ग की निम्न सीमा एक होती है।	वर्ग की उच्च सीमा एवं अगले वर्ग की निम्न सीमा एक न होकर भिन्न होती हैं। अन्तर प्राय: 1 का होता है।
3.	प्रत्येक परिस्थिति में इसका प्रयोग उत्तम होता है।	जब पद-मूल्य पूर्ण संख्या में हों तभी यह उपयुक्त होती है।
4.	गणन क्रिया के लिए अपवर्जी को समावेशी में बदलने की आवश्यकता नहीं।	गणन क्रिया की सरलता के लिए इस रीति को पहले अपवर्जी में बदल लिया जाता है।

उदाहरण (Illustration)

निम्न समंक एक महाविद्यालय के 40 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों से सम्बन्धित हैं। इनसे 10 अंकों के अन्तर के साथ (i) अपवर्जी श्रेणी तथा (ii) समावेशी श्रेणी बनाओ—

Put the following details of marks by 40 students of a degree college in the form of frequency distribution with a difference of 10 in (i) Exclusive series and (ii) Inclusive series :

Marks Obtained out of 100 Marks

53	15	48	40	42	46	62	75	60	52
96	86	73	38	27	20	66	97	67	65
19	55	58	77	78	62	71	79	78	73
93	90	88	06	23	07	04	54	73	36

हल (Solution) :

(i) **अपवर्जी श्रेणी** (Exclusive Series) :

Frequency Distribution in teh Form of Exclusive Series

Class-Interval	Tallies	Frequency
0–10	III	3
10–20	II	2
20–30	III	3
30–40	II	2
40–50	IIII	4
50–60	~~IIII~~	5
60–70	~~IIII~~ I	6
70–80	~~IIII~~ IIII	9
80–90	II	2
90–100	IIII	4
		N = 40

(ii) **समावेशी श्रेणी** (Inclusive Series) :

Frequency Distribution in teh Form of Inclusive Series

Class-Interval	Tallies	Frequency
0–9	III	3
10–19	II	2
20–29	III	3
30–39	II	2
40–49	IIII	4
50–59	~~IIII~~	5
60–69	~~IIII~~ I	6
70–79	~~IIII~~ IIII	9
80–89	II	2
90–99	II	4
		N = 40

प्र.5. सापेक्षित आवृत्ति वितरण का विवरण दीजिए।

Give the description of relative frequency distribution.

उत्तर

सापेक्षिक आवृत्ति वितरण
(Relative Frequency Distribution)

कभी-कभी यह आवश्यक होता है कि आवृत्तियों की वास्तविक संख्या की जगह उनकी सापेक्ष संख्या दी जाए। वास्तविक आवृत्तियों को प्रतिशतों में व्यक्त करके सापेक्ष आवृत्ति-वितरण प्राप्त किया जा सकता है।

सापेक्षिक आवृत्ति वितरण तालिका सामान्यतया दो प्रकार से बनायी जा सकती है—

1. प्रतिशत आवृत्ति (Percentage Frequency), 2. सापेक्षिक आवृत्ति (Relative Frequency)।

उदाहरण (Illustration)

निम्न सामान्य आवृत्ति वितरण से सापेक्षिक आवृत्ति तथा प्रतिशत आवृत्ति वितरण तालिका बनाइए—

From the following ordinary frequency distribution, prepared relative frequency and percentage frequency distribution table :

वर्गान्तर (Class-Interval)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
आवृत्ति (Frequency)	5	16	21	30	18	10

हल (Solution) :

Class-Interval	Frequency	Relative Frequency	Percentage Frequency
0–10	5	0.05	5.0
10–20	16	0.16	16.0
20–30	21	0.21	21.0
30–40	30	0.30	30.0
40–50	18	0.18	18.0
50–60	10	0.10	10.0
	$N = \Sigma f = 100$	**1.00**	**100.0**

Working Notes :

(1) Relative Frequency $= \dfrac{f}{\Sigma f} =$

$\dfrac{5}{100}$	$\dfrac{16}{100}$	$\dfrac{21}{100}$	$\dfrac{30}{100}$	$\dfrac{18}{100}$	$\dfrac{10}{100}$
= 0.05	= 0.16	= 0.21	= 0.30	= 0.18	= 0.10

(2) Percentage Frequency $= \dfrac{f}{\Sigma f} \times 100$

$\dfrac{5}{100} \times 100$	$\dfrac{16}{100} \times 100$	$\dfrac{21}{100} \times 100$	$\dfrac{30}{100} \times 100$	$\dfrac{18}{100} \times 100$	$\dfrac{10}{100} \times 100$
= 5.0	= 16.0	= 21.0	= 30.0	= 18.0	= 10.0

वर्गान्तरों में वर्गीकरण करने की कुछ समस्याएँ (A Few Problems in Classification by Class-Intervals)—सांख्यिकीय तथ्यों को वर्गान्तरों के अनुसार वर्गीकरण करने में संख्याशास्त्री के सामने कुछ समस्याएँ उत्पन्न होती हैं, जिनका उचित समाधान किया जाना आवश्यक है। प्रमुख समस्याएँ निम्नलिखित हैं—

1. वर्गान्तर की संख्या ज्ञात करना,
2. वर्गान्तरों का आकार (Size) ज्ञात करना,
3. वर्ग सीमाओं का स्पष्ट निर्धारण करना,
4. आवृत्ति वितरण का प्रारम्भ व अन्त ज्ञात करना।

उक्त समस्याओं का उचित समाधान **प्रो० एच०ए० स्टर्जेस** (Prof. H.A. Sturges) ने किया, जिनका विवरण निम्न प्रकार है। इसे **स्टर्जेस नियम** के नाम से जाना जाता है—

1. **वर्गान्तरों की संख्या** (Number of Class-Intervals)—उपलब्ध सांख्यिकीय सामग्री को कितने वर्गों में बाँटा जाए, यह निश्चित करना आवश्यक है। वर्गान्तरों की संख्या निश्चित करने के लिए कोई दृढ़ और निश्चित नियम नहीं है। संख्याशास्त्री को यह ध्यान रखना चाहिए कि वर्गान्तरों की संख्या न तो बहुत कम हो और न बहुत अधिक। वर्गान्तरों की संख्या कम होने पर आवृत्तियों का अनावश्यक रूप से घनत्व बढ़ जाएगा, इससे तथ्यों की विशेषताओं पर प्रकाश नहीं पड़

सकेगा। वर्गों की संख्या अधिक होने पर विश्लेषण तथा गणना कार्य में कठिनाई उपस्थित होती है। **प्रोफेसर स्टर्जेस** (H.A. Sturges) ने वर्गान्तरों की संख्या ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र दिया है—

$$n = 1 + 3.322\,(\log N)$$

Here n = Number of class-intervals and N = Total number of observations.
इस सूत्र के अनुसार अवलोकनों की संख्या बहुत अधिक हो जाने पर भी वर्गों की संख्या अधिक नहीं होती। शायद ही कभी 20 वर्ग बनाये जाएँ। उदाहरणार्थ—

पदों की संख्या	**स्टर्जेस का नियम**	**वर्गों की संख्या**
50	$n = 1 + 3.322\,(1.698970 = 1 + 5.6$	$= 6.6$ or 7
500	$n = 1 + 3.322\,(2.698970) = 1 + 8.96$	$= 9.96$ or 10
5,000	$n = 1 + 3.322\,(3.698970) = 1 + 12.28$	$= 13.28$ or 13
50,000	$n = 1 + 3.322\,(4.698970) = 1 + 15.6$	$= 16.6$ or 17

स्टर्जेस के नियम के बारे में **मेयर्स** (C.H. Meyers) लिखते हैं, "इस सूत्र के लिए एक निश्चित संख्या में उत्तर देना असामान्य होगा। अत: सूत्र से कुछ भी मान निकले, अगली संख्या पर उसे उपसादित कर लेना चाहिए। कुछ दशाओं में यह भी आवश्यक हो सकता है कि एक अतिरिक्त वर्ग का समावेश समंकों के विस्तार को देखते हुए किया जाए। फलस्वरूप सूत्र को वर्गों की संख्या निश्चित करने में सहायक मानना चाहिए। सूत्र का प्रयोग कठोरता से नहीं करना है।" सामान्यत: वर्गों की संख्या दो अतिरिक्त विचारों को ध्यान में रखकर निश्चित की जानी चाहिए, प्रथम वर्गों की संख्या का चुनाव ऐसा हो जिससे श्रेणी में एक ही भूयिष्ठक बन सके (Mono-modal) तथा दूसरे अवलोकनों का केन्द्रीकरण मध्य बिन्दु के निकट हो सके।

2. **वर्गान्तरों का आकार** (Magnitude of Class-Interval)—वर्गान्तर बराबर आकार के होने चाहिए। अधिकतर दशाओं में समान आकार के वर्गान्तर बनाना सम्भव होता है। कुछ विशेष प्रकार के समंकों के लिए असमान आकार के वर्ग रखना आवश्यक हो सकता है। ऐसा तब किया जाता है जब समान आकार के वर्ग बनाने में कुछ वर्गों में आवृत्ति शून्य या नगण्य हो, जबकि अन्य वर्गों में काफी अधिक हो। वर्गान्तर के आकार का निर्धारण अवलोकनों के अधिकतम तथा न्यूनतम मूल्यों को ध्यान में रखकर किया जा सकता है—

$$\text{वर्गान्तर (Class-Interval) or } i = \frac{L - S}{n},$$

जिसमें,
L = अधिकतम मूल्य (Largest value), S = न्यूनतम मूल्य (Smallest value)
n = वर्गों की संख्या (Number of class)
प्रो० स्टर्जेस के सूत्र के आधार पर वर्गान्तर का निर्धारण इस प्रकार किया जा सकता है—

$$\text{वर्गान्तर (Class-interval) or } i = \frac{L - S}{1 + 3.322 \log N}$$

3. **वर्ग सीमाओं का स्पष्ट निर्धारण** (Determination of Class Limits)—आवृत्ति वितरण की वर्ग सीमाओं का स्पष्ट निर्धारण करना आवश्यक होता है, उनको इतने सूक्ष्मता से बताया जाना चाहिए जिससे उनमें क्या आता है? बिल्कुल असंदिग्ध हो।

4. **आवृत्ति वितरण का प्रारम्भ व अन्त** (The Beginning and Ending of Frequency Distribution)—प्रत्येक आवृत्ति वितरण का प्रारम्भ व अन्त उचित बिन्दुओं पर होना चाहिए। उदाहरणस्वरूप यदि 15 वर्ष से कम आयु के बालकों की नियुक्ति पर प्रतिबन्ध हो तो ऐसे आवृत्ति वितरण में जो इस प्रकार के समंको से सम्बन्धित हो, वर्गीकरण 15 के पूर्व ही प्रारम्भ नहीं होना चाहिए।

उदाहरण (Illustration)

जब मदों की संख्या (N) = 50 हो, तो वर्गों की संख्या ज्ञात करो।

Find out number of class-interval, when number of item (N) = 50.

हल (Solution) :

According to Sturges Formula :

$$n = 1 + 3.322 \log N$$
$$n = 1 + 3.322 \log (50)$$
$$= 1 + 3.322(1.6990) = 1 + 5.644$$
$$= 6.64 \quad \text{or} \quad 7 \text{ (Approx.)}$$

आवृत्ति वितरण का महत्त्व
(Importance of Frequency Distribution)

1. वर्गीकृत प्रदत्तों को रेखाचित्रों के माध्यम से व्यक्त करके सुगम तथा बोधगमय बनाया जा सकता है। सामान्य व्यक्तियों हेतु रेखाचित्रों के माध्यम से प्रस्तुत अंक अधिक उपयुक्त तथा आसानी से समझने योग्य होते हैं।
2. प्राय: अव्यवस्थित अंक निरर्थक होते हैं इसलिए आवृत्ति वितरण के माध्यम से प्रदत्तों को समझने में मदद मिलती है। आवृत्ति वितरण के अवलोकन से समूह के सम्बन्ध में स्पष्ट धारणा बन जाती है तथा निष्कर्ष अर्जित किये जा सकते हैं।
3. अनेक सांख्यिकीय गणनाएँ; जैसे—मध्यमान, मध्यांक, मानक विचलन, सहसम्बन्ध गुणांक इत्यादि गणनाएँ आवृत्ति वितरण बनाकर सरलता तथा शीघ्रता से की जा सकती हैं।
4. तुलनात्मक अध्ययन में सरलता मिलती है। सभी आँकड़ों को एक ही दृष्टि में देखकर उनकी तुलना की जा सकती है।

अत: आँकड़ों को व्यवस्थित करना सांख्यिकी की प्राथमिक एवं महत्त्वपूर्ण प्रक्रिया है।

बहुविकल्पीय प्रश्न

प्र.1. आवृत्ति वितरण के चरण हैं—

(क) वर्गान्तर (ख) प्रसार
(ग) मिलान चिह्न लगाना (घ) ये सभी

उत्तर (घ) ये सभी

प्र.2. प्रसार क्षेत्र ज्ञात करने के सूत्र है—

(क) उच्चतम प्राप्तांक + न्यूनतम प्राप्तांक
(ख) उच्चतम प्राप्तांक – न्यूनतम प्राप्तांक
(ग) उच्चतम प्राप्तांक × न्यूनतम प्राप्तांक
(घ) $\frac{\text{उच्चतम प्राप्तांक + न्यूनतम प्राप्तांक}}{2}$

उत्तर (ख) उच्चतम प्राप्तांक – न्यूनतम प्राप्तांक

प्र.3. किसी संख्या के बार-बार आने की प्रवृत्ति को उस संख्या की क्या कहते हैं?

(क) प्राप्तांक (ख) आवृत्ति
(ग) वितरण (घ) सारणीयन

उत्तर (ख) आवृत्ति

प्र.4. वर्गान्तरों को कितने प्रकार से लिखा जाता है?

(क) सात (ख) आठ (ग) तीन (घ) चार

उत्तर (ग) तीन

प्र.5. शिक्षा में आवृत्ति वितरण का महत्त्व है—

(क) एक दृश्य प्रस्तुत करता है
(ख) गणित रूप देता है
(ग) कक्षा के छात्रों को किसी विषय में सामान्य योग्यता का स्पष्ट ज्ञान प्रदान करता है
(घ) उपरोक्त में से कोई नहीं

उत्तर (ग) कक्षा के छात्रों को किसी विषय में सामान्य योग्यता का स्पष्ट ज्ञान प्रदान करता है

प्र.6. निम्नलिखित में से किस प्रकार टैली चिह्न लिखे जाते हैं?

(क) ||||| || (ख) || || (ग) ~~||||~~ || (घ) |||| |||

उत्तर (ग) ~~||||~~ ||

प्र.7. सांख्यिकी में F किसका प्रतीक है?

(क) प्राप्तांक का (ख) आवृत्ति का (ग) आवृत्ति के योग का (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ख) आवृत्ति का

प्र.8. निम्नलिखित कथनों में से कौन सही है?

(क) एक बार प्रश्न तैयार हो जाने पर यह सलाह दी जाती है कि प्रश्नावली का एक पायलट सर्वेक्षण एक छोटे समूह के साथ किया जाए
(ख) एक बार प्रश्न तैयार हो जाने पर यह सलाह दी जाती है कि एक छोटे समूह के साथ प्रश्नावली का सर्वेक्षण किया जाए
(ग) एक बार प्रश्न तैयार हो जाने पर यह सलाह दी जाती है कि प्रश्नावली का अवलोकन एक छोटे समूह के साथ किया जाए
(घ) उपरोक्त में से कोई नहीं

उत्तर (क) एक बार प्रश्न तैयार हो जाने पर यह सलाह दी जाती है कि प्रश्नावली का एक पायलट सर्वेक्षण एक छोटे समूह के साथ किया जाए

प्र.9. लॉटरी पद्धति के बारे में निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है?

(क) लॉटरी पद्धति को यादृच्छिक प्रतिचयन के नाम से भी जाना जाता है
(ख) लॉटरी पद्धति को जनसंख्या प्रतिचयन के नाम से भी जाना जाता है
(ग) लॉटरी पद्धति को गैर-यादृच्छिक नमूनाकरण के रूप में भी जाना जाता है
(घ) लॉटरी पद्धति को सैम्पलिंग के नाम से भी जाना जाता है

उत्तर (क) लॉटरी पद्धति को यादृच्छिक प्रतिचयन के नाम से भी जाना जाता है

प्र.10. नमूनाकरण त्रुटियों के बारे में निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सटीक है?

(क) नमूना अनुमान और सम्बन्धित पैरामीटर के बीच का अन्तर एक प्रकार की नमूना त्रुटि नहीं है
(ख) नमूनाकरण पूर्वाग्रह एक प्रकार की नमूनाकरण त्रुटि नहीं है
(ग) डेटा में त्रुटियाँ एक प्रकार की नमूनाकरण त्रुटि नहीं है
(घ) गैर-प्रतिक्रिया एक प्रकार की नमूनाकरण त्रुटि नहीं है

उत्तर (क) नमूना अनुमान और सम्बन्धित पैरामीटर के बीच का अन्तर एक प्रकार की नमूना त्रुटि नहीं है

प्र.11. डेटा के स्थानिक वर्गीकरण के बारे में निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है?

(क) स्थानिक वर्गीकरण के सन्दर्भ में डेटा को भौगोलिक स्थिति के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है
(ख) स्थानिक वर्गीकरण के सन्दर्भ में डेटा को समय शृंखला के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है
(ग) स्थानिक वर्गीकरण के सन्दर्भ में डेटा को मात्रात्मक वर्गीकरण के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है
(घ) स्थानिक वर्गीकरण के सन्दर्भ में डेटा को कालानुक्रमिक वर्गीकरण के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है

उत्तर (क) स्थानिक वर्गीकरण के सन्दर्भ में डेटा को भौगोलिक स्थिति के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है

प्र.12. निम्नलिखित में से कौन-सा कथन कच्चे डेटा को वर्गीकृत करने की प्रक्रिया का सही वर्णन करता है?

(क) विश्लेषण एक व्यापक विधि है जो कच्चे डेटा के वर्गीकरण में मदद करती है

(ख) आवृत्ति वितरण एक व्यापक विधि है जो कच्चे डेटा के वर्गीकरण में मदद करती है

(ग) वितरण एक व्यापक विधि है जो कच्चे डेटा के वर्गीकरण में मदद करती है

(घ) सूचना एक व्यापक विधि है जो कच्चे डेटा के वर्गीकरण में मदद करती है

उत्तर (ख) आवृत्ति वितरण एक व्यापक विधि है जो कच्चे डेटा के वर्गीकरण में मदद करती है

प्र.13. निम्नलिखित में से कौन-सा कथन वर्ग अन्तराल के बारे में सत्य है?

(क) निरन्तर चर के मामले में विशिष्ट वर्ग अन्तरालों का उपयोग लगातार आधार पर किया जाता है

(ख) निरन्तर चर के मामले में समावेशी वर्ग अन्तराल का उपयोग लगातार आधार पर किया जाता है

(ग) निरन्तर चर के मामले में ऑफलाइन वर्ग अन्तराल का उपयोग लगातार आधार पर किया जाता है

(घ) निरन्तर चर के मामले में ऑनलाइन कक्षा अन्तराल का उपयोग लगातार आधार पर किया जाता है

उत्तर (ख) निरन्तर चर के मामले में समावेशी वर्ग अन्तराल का उपयोग लगातार आधार पर किया जाता है

प्र.14. सतत चर के बारे में निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सटीक है?

(क) पाई चार्ट केवल सतत चरों के लिए बनाये जाते हैं

(ख) दण्ड आरेख केवल सतत चरों के लिए बनाये जाते हैं

(ग) हिस्टोग्राम केवल सतत चरों के लिए बनाये जाते हैं

(घ) आवृत्ति वक्र केवल सतत चरों के लिए खींचे जाते हैं

उत्तर (ग) हिस्टोग्राम केवल सतत चरों के लिए बनाये जाते हैं

प्र.15. डेटा संग्रह के बारे में निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है?

(क) डेटा एकत्र करने के पीछे मुख्य उद्देश्य समस्या के स्पष्ट समाधान तक पहुँचने के लिए आवश्यक साक्ष्य दिखाना है

(ख) डेटा एकत्र करने के पीछे मुख्य उद्देश्य समस्या के स्पष्ट समाधान तक पहुँचने के लिए आवश्यक गतिविधि को दिखाना है

(ग) डेटा एकत्र करने के पीछे मुख्य उद्देश्य समस्या के स्पष्ट समाधान तक पहुँचने के लिए आवश्यक डिजाइन दिखाना है

(घ) डेटा एकत्र करने के पीछे मुख्य उद्देश्य समस्या के स्पष्ट समाधान तक पहुँचने के लिए आवश्यक आँकड़े दिखाना है

उत्तर (क) डेटा एकत्र करने के पीछे मुख्य उद्देश्य समस्या के स्पष्ट समाधान तक पहुँचने के लिए आवश्यक साक्ष्य दिखाना है

प्र.16. निम्नलिखित में से कौन-सा प्रत्यक्ष जानकारी का डेटाबेस है?

(क) प्राथमिक डेटा

(ख) सहायक डेटा

(ग) (क) और (ख) दोनों सही हैं

(घ) (क) और (ख) दोनों गलत हैं

उत्तर (क) प्राथमिक डेटा

प्र.17. निम्नलिखित कथनों में से कौन सही है?

(क) सर्वेक्षण के बारे में प्रारम्भिक डेटा प्रदान करने में एक पायलट सर्वेक्षण बेहद उपयोगी है

(ख) सर्वेक्षण के बारे में प्रारम्भिक डेटा प्रदान करने में एक एयरलाइन सर्वेक्षण बेहद उपयोगी है

(ग) सर्वेक्षण के बारे में प्रारम्भिक डेटा प्रदान करने में एक मेलिंग सर्वेक्षण बेहद उपयोगी है

(घ) सर्वेक्षण के बारे में प्रारम्भिक डेटा प्रदान करने में शिपिंग सर्वेक्षण बेहद उपयोगी है

उत्तर (क) सर्वेक्षण के बारे में प्रारम्भिक डेटा प्रदान करने में एक पायलट सर्वेक्षण बेहद उपयोगी है

प्र.18. जनगणना के बारे में निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सही है?

(क) हर दस साल में एक बार जनगणना की जाती है (ख) हर बीस साल में एक बार जनगणना की जाती है

(ग) हर सात साल में एक बार जनगणना की जाती है (घ) हर पाँच साल में एक बार जनगणना की जाती है

उत्तर (क) हर दस साल में एक बार जनगणना की जाती है

प्र.19. नमूनाकरण के बारे में निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सही है?

(क) एक अच्छा नमूना जनसंख्या के बारे में यथोचित सटीक जानकारी प्रदान करने में मदद करता है

(ख) एक अच्छा नमूना जनसंख्या के बारे में पूरी तरह सटीक जानकारी प्रदान करने में मदद करता है

(ग) एक अच्छा नमूना जनसंख्या के बारे में यथोचित सटीक जानकारी प्रदान नहीं करता है

(घ) इनमें से कोई भी नहीं

उत्तर (क) एक अच्छा नमूना जनसंख्या के बारे में यथोचित स्टीक जानकारी प्रदान करने में मदद करता है

प्र.20. यदि हम .... नमूना लेते हैं तो नमूना त्रुटि की भयावहता .... सम्भव है।

(क) बढ़ाओ, छोटा करो (ख) घटाओ, बड़ा करो

(ग) घटाओ, छोटा करो (घ) इनमें से कोई भी नहीं

उत्तर (ख) घटाओ, बड़ा करो

प्र.21. डेटा के संग्रह के बारे में निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है?

(क) सूचना के उपयोग से समय और धन दोनों की बचत होती है

(ख) प्राथमिक डेटा के उपयोग से समय और धन दोनों बचाने में मदद मिलती है

(ग) द्वितीयक डेटा के उपयोग से समय और धन दोनों की बचत होती है

(घ) डेटा के उपयोग से समय और धन दोनों की बचत होती है

उत्तर (ग) द्वितीयक डेटा के उपयोग से समय और धन दोनों की बचत होती है

प्र.22. निम्नलिखित कथनों में से कौन सही है?

(क) प्रश्नावली का उपयोग करके किसी भी प्रकार की गलत बयानी और गलतफहमी से बचा जा सकता है

(ख) व्यक्तिगत बातचीत से किसी भी प्रकार की गलतबयानी और गलतफहमी से बचा जा सकता है

(ग) मेल करके किसी भी प्रकार की गलतबयानी और गलतफहमी से बचा जा सकता है

(घ) टेलीफोन के प्रयोग से किसी भी प्रकार की गलतबयानी और गलतफहमी से बचा जा सकता है

उत्तर (ख) व्यक्तिगत बातचीत से किसी भी प्रकार की गलतबयानी और गलतफहमी से बचा जा सकता है

UNIT-III

आँकड़ों का आलेखीय प्रदर्शन

Graphical Representation of Data

खण्ड-अ अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. दण्ड आरेख किसे कहते हैं?

What is bar diagram?

उत्तर वे आरेख जिनके द्वारा सांख्यिकीय आँकड़ों का प्रदर्शन एक दण्ड के रूप में किया जाता है, दण्ड आरेख कहलाते हैं। ये दण्ड समान चौड़ाई वाले क्षैतिज एवं लम्बवत् दोनों रूपों में बनाये जा सकते हैं।

प्र.2. साधारण दण्ड आरेख किसे कहते हैं?

What is simple bar diagram or graph.

उत्तर जब दण्ड आरेख द्वारा किसी एक ही वस्तु का वितरण दिखाया जाता है तो उसे साधारण दण्ड आरेख कहा जाता है।

प्र.3. मिश्रित दण्ड आरेख से क्या अभिप्राय है?

उत्तर जब किसी दण्ड आरेख द्वारा एक से अधिक वस्तुओं का वितरण अथवा एक ही वस्तु के विभिन्न उपयोग प्रदर्शित किए जाए तो उसे मिश्रित दण्ड आरेख कहा जाता है। मिश्रित दण्ड आरेख को प्रविभाजित दण्ड आरेख भी कहा जाता है।

प्र.4. चक्र आरेख किसे कहते हैं?

What is cycle or chakra diagram?

उत्तर जब सांख्यिकीय आँकड़ों का प्रदर्शन एक चक्र द्वारा किया जाए तो उसे चक्र आरेख कहा जाता है। इसमें प्रदर्शन हेतु आँकड़ों को 360° के बराबर मानकर प्रत्येक घटक के आँकड़ों के अनुसार कोण ज्ञात किये जाते हैं।

प्र.5. वृत्त आरेख क्या है?

What is circle diagram?

उत्तर वह आरेख जिसमें सांख्यिकीय आँकड़ों का प्रदर्शन वृत्त द्वारा किया जाता है, वृत्त आरेख कहलाता है। इसमें वृत्त का आनुपातिक आकार ज्ञात करना पड़ता है जिसे निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

प्र.6. यातायात प्रवाह मानारेख क्या है?

What traffic flow cartogram?

उत्तर यातायात प्रवाह मानारेख ये है जिनके द्वारा मार्ग के ऊपर किसी-न-किसी समय चलने वाली गाड़ियों की प्रवाह की मात्रा दर्शायी जाती है।

प्र.7. वितरण मानचित्र किसे कहते हैं?

What is distribution map?

उत्तर वितरण मानचित्र वे मानचित्र हैं जिनमें किसी वस्तु के वितरण क्रम को प्रदर्शित किया जाता है अर्थात् विभिन्न वस्तुओं की मात्रा, गुण अथवा घनत्व सम्बन्धी आँकड़े प्रदर्शित करने वाले मानचित्र वितरण मानचित्र कहलाते हैं।

प्र.8. वितरण मानचित्र कितने प्रकार के होते हैं?

How many types are of distribution maps?

उत्तर वितरण मानचित्र दो प्रकार के होते हैं—(1) गुण प्रधान वितरण मानचित्र (Qualitative Distribution Maps) एवं (2) मात्रा प्रधान वितरण मानचित्र (Quantitative Distribution Maps)।

प्र.9. आलेखीय निरूपण के विभिन्न प्रकार क्या हैं?

What are various types of graphical representation?

उत्तर चित्रमय प्रतिनिधित्व के विभिन्न प्रकारों में से कुछ में शामिल हैं—

1. रेखा रेखांकन, 2. बार रेखांकन, 3. हिस्टोग्राम, 4. लाइन प्लॉट, 5. आवृत्ति तालिका, 6. वृत्त ग्राफ आदि।

प्र.10. ग्राफिकल विधि के क्या लाभ हैं?

What are the advantages of graphical method?

उत्तर ग्राफिकल प्रतिनिधित्व के कुछ फायदे हैं—

1. यह डेटा को अधिक आसानी से समझने योग्य बनाता है।
2. इससे समय की बचत होती है।
3. यह डेटा की तुलना को अधिक कुशल बनाता है।

प्र.11. समंकों का आलेखीय प्रदर्शन का अर्थ लिखिए।

Write the meaning of graphical presentation of data.

उत्तर तथ्यों के चित्रमय प्रदर्शन का आशय उस कला एवं प्रविधि से है जिसमें कोई अनुसन्धानकर्ता नीरस, कठिन तथा अरुचिकर संकलित तथ्यों को देखने, समझने व ज्यादा समय तक याद किये रखने की दृष्टि से उन्हें तथा आकर्षक, सुगम, बोधगम्य तथा रुचिकर बनाने हेतु उनका प्रकृति व आवश्यकता के अनुसार अनेक चित्रों के माध्यम से प्रदर्शित करते हैं। अन्य शब्दों में, अध्ययन-कार्य से संकलित सूचनाओं एवं आँकड़ों को चित्रों के माध्यम से प्रदर्शन अथवा प्रस्तुतीकरण को तथ्यों का चित्रमय प्रदर्शन कहा जाता है। तथ्यों के चित्रमय प्रदर्शन का सामाजिक अनुसन्धान में इतना ज्यादा महत्त्व है कि इसके बिना तथ्यों की अन्तर्निहित प्रवृत्ति एवं परिणामों को अच्छी तरह समझा नहीं जा सकता। जिस तरह के चित्र के माध्यम से एक विशेष प्रकार के तथ्यों का प्रदर्शन किया जाएगा। सामान्यत: वह तथ्यों की संख्या तथा उनकी प्रकृति व अध्ययन के उद्देश्य पर विशेषत: निर्भर होता है।

प्र.12. समंकों के आलेखीय प्रदर्शन की आवश्यकता एवं उपयोगिता लिखिए।

Write the need and utility of graphical presentation of data.

उत्तर सामाजिक अनुसन्धान तथा सर्वेक्षण के तहत् अध्ययन विषय से सम्बन्धित तथ्यों को अधिक-से-अधिक बोधगम्य, आकर्षक, आसान तथा रुचिकर बनाने हेतु उन्हें कई तरह के चित्रों (Diagrams) द्वारा दर्शाया जाता है। इस सन्दर्भ में **बॉडिंगटन** (Boddington) ने चित्रों का महत्त्व प्रस्तुत करते हुए लिखा है, "भली प्रकार से रचित एक चित्र आँखों को प्रभावित करता है और मस्तिष्क को भी, क्योंकि चित्र उन व्यक्तियों के लिए भी व्यावहारिक, स्पष्ट तथा शीघ्र समझने योग्य होता है जो कि प्रदर्शन की पद्धति से अनभिज्ञ होते हैं।"

खण्ड-ब लघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. आलेखीय चित्रण के उद्देश्यों का उल्लेख कीजिए।

Explain the objectives of graphical representation.

उत्तर

आलेखीय चित्रण के उद्देश्य
(Objectives of Graphical Representation)

प्रदत्तों का आलेखीय निरूपण प्रमुखत: निम्नवत् उद्देश्यों हेतु किया जाता है—

1. **संख्यात्मक प्रदत्तों का प्रदर्शन**—आलेखीय निरूपण का सर्वप्रमुख उद्देश्य संख्यात्मक प्रदत्तों का सुगम एवं बोधगम्य प्रदर्शन करना होता है।
2. **समग्र का घटक अंशों में विभक्त करना**—आलेखीय निरूपण का एक दूसरा उद्देश्य समग्र को अनेक घटकों में विभक्त करना होता है।
3. **समय-समय पर होने वाले बदलावों को स्पष्ट करना**—आलेखीय प्रदर्शन का उद्देश्य किसी विशेष चर में समय-समय पर होने वाले बदलावों को प्रदर्शित करता हुआ करता है। कई आयु पर मानसिक विकास की गति का अगर आलेखीय निरूपण किया जाता है तो मानसिक विकास में होने वाले बदलावों का ज्ञान स्पष्टत: होता है।

4. **कई चरों के बीच सम्बन्ध व्यक्त करना**—आलेखीय निरूपण का एक प्रमुख उद्देश्य कई चरों के बीच सम्बन्धों को व्यक्त करना होता है। अगर कार्य के अनेक घण्टों में होने वाले उत्पादन को एक ग्राफ पर दर्शाया जाता है तो यह आसानी से स्पष्ट होता है कि कार्य के घण्टों के बढ़ने के साथ उत्पादन में किस तरह बदलाव होता है अर्थात् इन दोनों चरों के बीच सम्बन्ध का प्रदर्शन आलेखीय निरूपण के माध्यम से आसानी से व्यक्त किया जा सकता है।

प्र.2. तथ्यों के आलेखीय प्रदर्शन के गुण एवं उपयोगिताएँ लिखिए।
Write the merits or utilities of graphical presentation of data.

उत्तर

तथ्यों के आलेखीय प्रदर्शन के गुण एवं उपयोगिताएँ
(Merits or Utilities of Graphical Presentation of Data)

संक्षेप में तथ्यों के चित्रमय प्रदर्शन के अधोलिखित गुण अथवा लाभ हैं—

1. **तथ्यों की तुलना में आसानी** (Convenience in Comparison of Facts)—चित्रों से एक बड़ा यह लाभ है कि इनके सहयोग से दो अथवा अधिक सम्बन्धित तथ्यों की तुलना आसानी से की जा सकती है जबकि अंकों व शब्दों के आधार/ पर अनेक तथ्यों की तुलना बहुत अधिक जटिल एवं अरुचिकर होती है। एक सामान्य व्यक्ति भी चित्र को देखकर अनेक तथ्यों का तुलनात्मक महत्त्व आसानी से समझ सकता है।
2. **गुणात्मक तथ्यों के प्रदर्शन में अधिक उपयोगी** (More Helpful in Presentation of Qualitative Facts)—प्राय: सामाजिक तथ्य गुणात्मक होते हैं जिन्हें शब्दों तथा अंकों में व्यक्त नहीं किया जा सकता। लेकिन चित्रों के माध्यम से गुणात्मक तथ्यों को आसानी से व्यक्त किया जा सकता है। **श्री बाउले** (Bowley) ने तो यहाँ तक लिखा है "गुणात्मक तथ्यों को व्यक्त करने के लिए एक चित्र ही एकमात्र विधि है।"
3. **अनुसन्धान में उपयोगी** (Helpful in Research)—चित्र अनुसन्धान की दृष्टि से भी अधिक उपयोगी साबित होते हैं। क्षेत्रीय सर्वेक्षण के संगठन तथा संचालन के चित्रों की अत्यधिक जरूरत होती है। इसकी वजह यह है कि अनुसन्धानकर्ता एवं सर्वेक्षणकर्ता को चित्रों के सहयोग से न केवल भौतिक एवं भौगोलिक विशेषताओं की जानकारी होती है अपितु अनेक सूचनाओं के स्रोतों की स्थिति की भी जानकारी हो जाती है जिससे सूचनाएँ संकलित करने में सुविधा होती है।
4. **आकर्षक तथा प्रभावपूर्ण प्रदर्शन सम्भव होता है** (Attractive and Effective Presentation is Possible)—चित्रों के माध्यम से तथ्यों का प्रदर्शन बहुत अधिक आकर्षक तथा प्रभावपूर्ण तरीके से किया जाता है क्योंकि ये दोनों गुण चित्रों में विद्यमान रहते हैं। सामान्यत: व्यक्ति अंक व संख्याओं को देखकर अरुचि अनुभव करने लगते हैं लेकिन कोई भी स्वच्छ चित्र उन्हें जल्दी ही आकर्षित कर लेता है क्योंकि आँखों से चित्र देखने से चित्रों में अन्तर्निहित तथ्य स्वयं ही मस्तिष्क तक पहुँच जाते हैं तथा इसीलिए उन्हें याद करना भी आसान हो जाता है।
5. **प्रभावपूर्ण प्रचार में सहायक** (Helpful in Effective Propaganda)—उनका प्रचार कार्य तथ्यों के चित्रमय प्रदर्शन से अधिक आसान हो जाता है। इसकी प्रमुख वजह यह है कि चित्र का प्रभाव एक साधारण-से-साधारण व्यक्ति पर बहुत अधिक होता है क्योंकि चित्र की बातें दृष्टि इन्द्रिय के द्वारा प्रत्यक्षत: व प्रभावपूर्ण रूप से मस्तिष्क में प्रवेश करती हैं।
6. **समय की बचत** (Time Saving)—चित्रों से लाभ यह है कि इन्हें देखने मात्र से ही तथ्यों के लक्षण व अन्तर्निहित गुण स्पष्ट हो जाते हैं तथा निष्कर्ष निकालने हेतु ज्यादा अध्ययन करने की जरूरत नहीं होती है। अत: चित्रों के माध्यम से संकलित तथ्यों का प्रदर्शन करने से उनके समझने तथा उनका अध्ययन करने में समय व्यय नहीं करना पड़ता है।

प्र.3. आलेखीय निरूपण की सीमाओं का उल्लेख कीजिए।
Explain the limitations of graphical representation?

उत्तर

आलेखीय निरूपण की सीमाएँ
(Limitations of Graphical Representation)

आलेखीय निरूपण का उपयोग करते समय निम्नवत् सीमाओं को ध्यान में रखना चाहिए—

1. सारणी के माध्यम से जितने अधिक तथ्यों को प्रदर्शित किया जा सकता है, उतने तथ्यों का ग्राफ तथा चार्ट द्वारा प्रदर्शन असम्भव होता है।
2. ग्राफ तथा चार्टों को बनाने के लिए ज्यादा समय की जरूरत होती है।
3. इन चित्रों का सरलतापूर्वक दुरुपयोग भी किया जा सकता है। अगर अनुचित तथा अशुद्ध चित्र बनाये जाते हैं तो इस तरह के चित्रों से भ्रमपूर्ण निष्कर्ष निकाले जाएँगे। इनका विज्ञापन आदि में अधिक दुरुपयोग होता है।

4. अगर इनकी रचना समान गुण के आधार पर होती है, तभी तुलनात्मक अध्ययन किया जा सकता है।
5. चार्टों के माध्यम से वास्तविक मूल्यों का प्रदर्शन नहीं किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में आलेखीय निरूपण में मात्र अनुमानित मूल्यों को ही प्रदर्शित किया जा सकता है। इस प्रकार चार्ट विस्तृत सूचना नहीं देते हैं।
6. इनके द्वारा अधिक सूक्ष्म अन्तर प्रदर्शित करना असम्भव है।
7. चित्रों के माध्यम से आंशिक निष्कर्ष ही निकाले जा सकते हैं। दूसरे शब्दों में इनसे पूर्ण सत्य निष्कर्ष नहीं निकाले जा सकते हैं।
8. अगर चित्र बनाने वाले को विषय की पर्याप्त जानकारी नहीं है तो ऐसा चित्र बन सकता है, जो वस्तुस्थिति का सही ज्ञान न कराकर भ्रम उत्पन्न कर सकता है।

खण्ड-स विस्तृत उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. एक आयतनात्मक चित्रों का उदाहरण सहित वर्णन कीजिए।
Describe the one dimensional diagrams with examples.

उत्तर

एक आयतनात्मक चित्र
(One Dimensional Diagrams)

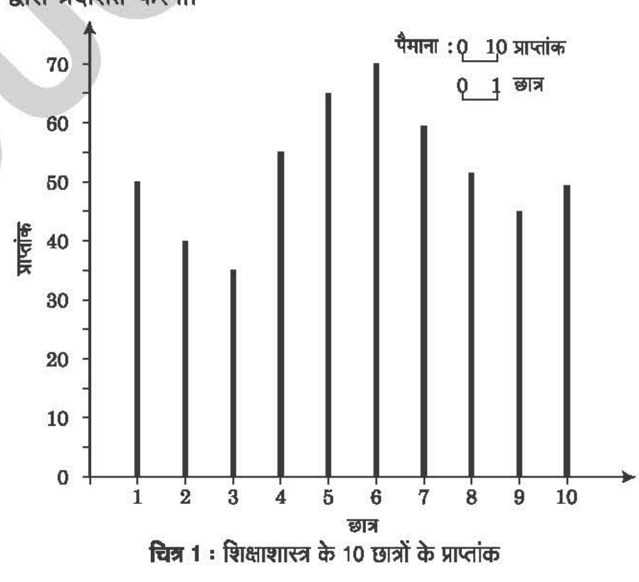
एक आयतनात्मक चित्रों का आशय उन चित्रों से है जिनमें मात्र लम्बाई के आधार पर तथ्यों अथवा आँकड़ों के परिणामों (Quantities) को अनेक तरह की छड़ों (Bars) अथवा लाइनों (Lines) के माध्यम से प्रदर्शित किया जाता है। इन चित्रों का उपयोग विशेषत: उस समय किया जाता है जबकि सबसे छोटी एवं सबसे बड़ी माप 1 : 10 से अधिक अन्तर न हो। आगे हम इन चित्रों के बनाने की विधि उदाहरण सहित प्रस्तुत करेंगे।

(i) रेखाचित्र (Line Diagram)

रेखाचित्र का आशय उस चित्र से है जिसमें तथ्यों के परिणामों को साधारण एवं सीधी रेखाओं के माध्यम से प्रदर्शित किया जाता है। ये सीधी रेखाएँ खड़ी भी हो सकती हैं तथा पड़ी भी। इस तरह के चित्रों का उपयोग उस समय किया जाता है जबकि प्रदर्शित की जाने वाली इकाईयों की संख्या ज्यादा हो तथा उन्हें थोड़े से स्थान में प्रदर्शित करना हो। इस तरह के रेखाचित्रों का निम्नलिखित उदाहरण द्वारा स्पष्टीकरण किया जा सकता है—

उदाहरण (Illustration)

एम०ए० शिक्षाशास्त्र के एक प्रश्न-पत्र की परीक्षा में 10 छात्रों को 100 में निम्नांकित अंक मिले। रेखाचित्र द्वारा स्पष्ट कीजिए—
50, 40, 35, 55, 65, 70, 58, 52, 45, 48
उपर्युक्त प्राप्तांकों को चित्र द्वारा प्रदर्शित करना।



चित्र 1 : शिक्षाशास्त्र के 10 छात्रों के प्राप्तांक

(ii) सरल छड़ चित्र (Simple Bar Diagram)

सरल छड़ चित्रों का आशय उन चित्रों से है जिनमें तथ्यों अथवा आँकड़ों के परिमाणों को सीधी रेखाओं के माध्यम से प्रदर्शित न करके चौड़ाई लिए हुए लम्बी छड़ों के माध्यम से प्रदर्शित करते हैं। इन चित्रों की छड़ों में लम्बाई–चौड़ाई दोनों के संयुक्त होने से उसमें आकर्षण की ज्यादा वृद्धि हो जाती है।

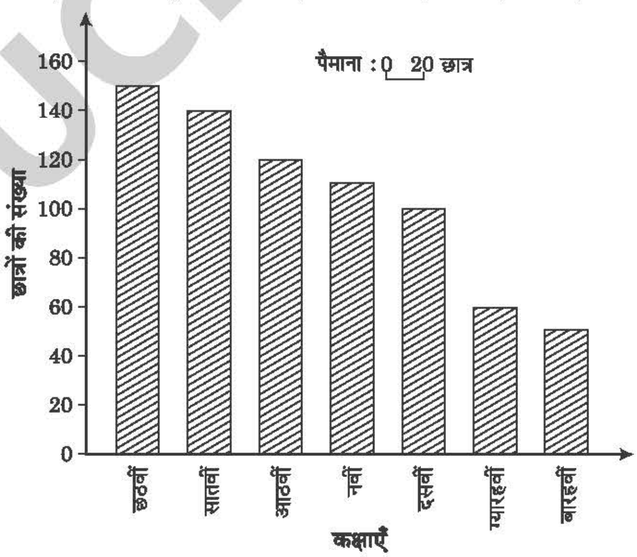
छड़ों की चौड़ाई का इन चित्रों में कोई अर्थ नहीं होता। मात्र कलात्मक दृष्टि से चित्रकार इनकी चौड़ाई निर्धारित कर लेता है। परन्तु छड़ों की लम्बाई उसी अनुपात में ही रखी जाती है जिस अनुपात में तथ्यों के परिमाणों को प्रदर्शित करना होता है। छड़ों के मध्य समान स्थान छोड़ दिया जाता है। छड़ों के अन्दर जो खाली जगह होती है उसे कोई रंग अथवा डिजाइन से भर देते हैं। कागज के आकार व छड़ों की संख्या के अनुसार उनकी लम्बाई–चौड़ाई निर्धारित की जाती है। फिर भी सामान्यत: 0.3 इंच अथवा 0.4 इंच की चौड़ाई उपयुक्त मानी जाती है। रेखाओं की तरह छड़ों को भी खड़े अथवा पड़े दोनों तरह से चित्रित किया जा सकता है परन्तु प्राय: इन्हें खड़ा चित्रित किया जाता है। निम्नवत् उदाहरण से सरल छड़ चित्र का स्पष्टीकरण हो जाएगा।

उदाहरण (Illustration)

निम्नलिखित सारणी में एक इण्टरमीडिएट कॉलेज की अनेक कक्षाओं के छात्रों की संख्या दी हुई है। सरल छड़ चित्र के माध्यम से उन्हें प्रदर्शित कीजिए—

क्रम संख्या	कक्षाएँ	छात्र संख्या
6	छठवीं	150
7	सातवीं	140
8	आठवीं	120
9	नवीं	110
10	दसवीं	100
11	ग्यारहवीं	60
12	बारहवीं	50

अगर उपर्युक्त छात्र संख्या को एक सरल छड़ चित्र में प्रदर्शित करना हो तो वह चित्र इस तरह बनेगा—



चित्र 2 : अनेक कक्षाओ मे छात्र संख्या

(iii) बहुगुणी छड़ चित्र (Multiple Bar Diagram)

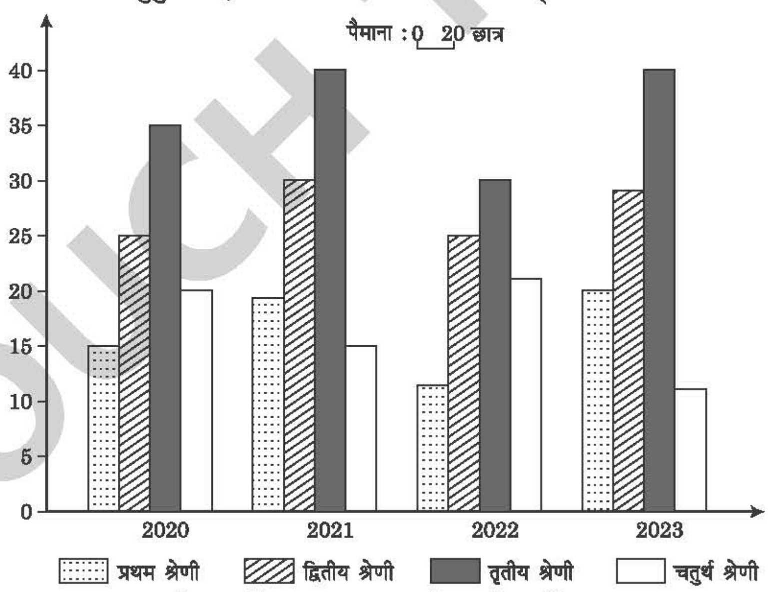
बहुगुणी छड़ चित्र का आशय उस छड़ चित्र से है जिसमें एक साथ एक से अधिक तथ्यों की तुलना प्रदर्शित करने हेतु तथ्यों की संख्या के अनुसार छड़ों को एक साथ मिलाकर बनाया जाता है। बहुगुणी छड़ चित्र सरल छड़ चित्र के ही समान होते हैं। लेकिन जहाँ सरल छड़ चित्र में मात्र एक ही तथ्य की तुलना प्रदर्शित होती है वहाँ बहुगुणी छड़ चित्र में एक से अधिक तथ्यों का तुलनात्मक प्रदर्शन होता है तथा इसीलिए ही ऐसे चित्र को 'बहुगुणी छड़ चित्र' के नाम से सम्बोधित करते हैं। इस तरह के चित्रों में जितने प्रकार के तथ्यों की तुलना होती है उतनी संख्या में छड़ों को एक साथ मिला करके बनाया जाता है। उदाहरण हेतु अगर दो तथ्यों जैसे—स्त्री-पुरुष की संख्या की तुलना की जाती है तो युगल छड़ चित्र बनाये जाते हैं। तथा तथ्यो जैसे—स्त्री, पुरुष व बच्चो की संख्या की तुलना की जानी है तो त्रिछड चित्र बनाए जाते है। सरल छड़ चित्रों की तरह ही इनमें भी छड़ों की खाली जगह को रंगों अथवा डिजाइनों से भर देते हैं। बहुमुखी छड़ चित्रों को अधोलिखित उदाहरण के माध्यम से स्पष्ट किया जा सकता है—

उदाहरण (Illustration)

निम्नलिखित सारणी में शिक्षाशास्त्र विषय के छात्रों के पिछले चार वर्षों का परीक्षाफल परिणाम दिया हुआ है। उन्हें बहुगुणी चित्र के माध्यम से प्रदर्शित कीजिए—

श्रेणी	2020	2021	2022	2023
प्रथम श्रेणी	15	18	12	20
द्वितीय श्रेणी	25	30	25	28
तृतीय श्रेणी	35	40	30	40
अनुत्तीर्ण	20	15	22	12

उपर्युक्त आँकड़ों के आधार पर बहुगुणी छड़ चित्र बनाने पर उसका निम्नवत् स्वरूप बनेगा—



चित्र 3 : शिक्षाशास्त्र का चार वर्षों का परीक्षा परिणाम

(iv) प्रतिशत छड़ चित्र (Percentage Bar Diagram)

प्रतिशत छड़ चित्र का आशय उस चित्र से है जिसमें वास्तविक आँकड़ों को प्रतिशत में बदलकर उसी के अनुसार छड़ को विभक्त करके प्रदर्शित किया जाता है। इस प्रकार प्रतिशत छड़ भी अन्तर्विभक्त छड़ ही होती है। परन्तु प्रतिशत छड़ के समान विभाजन वास्तविक आँकड़ों के आधार पर नहीं होता अपितु आँकड़ों को प्रतिशत में बदल कर उसी के अनुसार छड़ों को बाँट लिया जाता है। इसके फलस्वरूप हर एक छड़ की लम्बाई एक समान होती है क्योंकि कुल प्रतिशत प्रत्येक दशा में 100 ही होता है। इसका

आशय यह हुआ कि प्रत्येक श्रेणी अथवा वर्ग के अन्तर्गत आने वाले सभी उप-विभागों का प्रतिशत निकाल लिया तथा उसी के अनुसार ही छड़ को उप-विभागों में बाँट लिया जाता है। निम्न उदाहरण से इस बात का और अधिक स्पष्टीकरण हो जाएगा—

उदाहरण (Illustration)

सन् 2023 में उत्तर प्रदेश में तीन प्रमुख नगरों की जेलों में कई अपराधों के कारण आए हुए अपराधियों की संख्या निम्नलिखित सारणी में दी गई है उन्हें प्रतिशत छड़ के माध्यम से दर्शाइए—

अपराध के प्रकार	विभिन्न नगरों की जेलों में आए हुए अपराधियों की संख्या		
	कानपुर	आगरा	मुरादाबाद
चोरी	500	300	250
डकैती	200	150	150
हत्याएँ	300	200	100
अपहरण	150	150	100
गबन	50	100	100
योग	**1200**	**900**	**700**

प्रतिशत छड़ बनाने हेतु हमने योग को प्रत्येक दशा में 100 मानकर उसी के आधार पर प्रत्येक वर्ग के आँकड़ों को प्रतिशत में बदल दिया जिससे कि उपर्युक्त आँकड़ों की स्थिति निम्न प्रकार की हो गयी—

अपराध के प्रकार	विभिन्न नगरों की जेलों में आए हुए अपराधियों की संख्या		
	कानपुर %	आगरा %	मुरादाबाद %
चोरी	42.4	33.3	35.7
डकैती	16.4	16.7	21.4
हत्याएँ	25.0	22.2	14.3
अपहरण	12.2	16.7	14.3
गबन	4.0	11.1	14.3
योग	**100.0**	**100.0**	**100.0**

प्र.2. आवृत्ति बहुभुज के अर्थ को उदाहरण सहित लिखिए।

Write the meaning of frequency polygon with examples.

उत्तर

आवृत्ति बहभुज का अर्थ
(Meaning of Frequency Polygon)

आवृत्ति बहुभुज एक ऐसा रेखाचित्र होता है जिसमें आवृत्तियों का विभिन्न रेखाओं के माध्यम से प्रदर्शन किया जाता है। 'Polygon' का शाब्दिक अर्थ 'बहुकोण' (Many angled) से होता है। **गैरिट** ने आवृत्ति बहुभुज को 'बहुकोणीय चित्र' (Many angled figure) के नाम से सम्बोधित किया है।

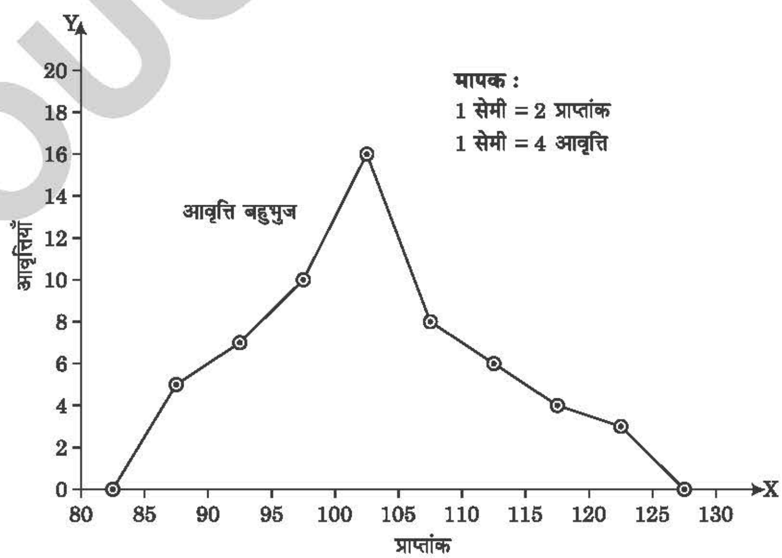
जेम्स ड्रेवर के अनुसार, "आवृत्ति बहुभुज आवृत्ति का आलेखीय निरूपण है, जो कि रेखाओं की श्रृंखला द्वारा किया जाता है।" अत: कहा जा सकता है कि एक ऐसा रेखाचित्र आवृत्ति बहुभुज कहलाता है, जो कई रेखाओं द्वारा घिरा हुआ एवं बहुकोणीय होता है।

आवृत्ति बहुभुज की रचना के नियम

1. आवृत्ति वितरण के वर्गान्तरों के समान आकार लेते हुए एक वर्गान्तर नीचे एवं एक वर्गान्तर ऊपर की तरफ बढ़ा लेते हैं, जिनकी आवृत्ति शून्य होती है। इनको अतिरिक्त वर्गान्तर कहा जाता है। इन अतिरिक्त वर्गान्तर को इस वजह से लिया जाता है जिससे कि आवृत्ति बहुभुज आधार रेखा को छू सके।
2. ग्राफ कागज पर एक पड़ी रेखा X वर्गान्तरों की संख्या एवं ग्राफ कागज के आकार के अनुसार खींचते हैं। यह रेखा न अधिक छोटी हो तथा न अधिक बड़ी हो। कुल वर्गान्तरों की संख्या के समान भाग इस रेखा के कर लिए जाते हैं। इस रेखा को OX रेखा कहा जाता है।

3. 90° का कोण OX रेखा पर बनाकर एक खड़ी रेखा OY बनाते हैं। OY रेखा की लम्बाई OX रेखा की लम्बाई की 75° होनी चाहिए। OX एवं OY रेखाओं के बीच अनुपात 60%-80% तक हो सकता है, लेकिन किसी भी स्थिति में OY रेखा को OX रेखा की लम्बाई से 50% से कम नहीं होनी चाहिए। इस OY रेखा पर आवृत्तियाँ बनायी जाती हैं। अधिकतम आवृत्तियों के समान भाग OY रेखा के करते हैं। हर एक भाग पर 1, 2, 3 इत्यादि क्रमश: लिखते हैं।
4. OX रेखा की कुल लम्बाई से कुछ स्थान छोड़कर OY रेखा खींची जाती है एवं (ss) इस तरह के चिह्न बना दिये जाते हैं। यह चिह्न इस बात को सूचित करते हैं कि OX रेखा को सुविधा हेतु बढ़ा लिया गया है।
5. OX रेखा पर हर एक वर्गान्तर की निम्न सीमाओं को लिखते हैं। सबसे छोटे वर्गान्तर की सीमा को O की तरफ से लिखना शुरू करते हैं।
6. प्रत्येक वर्गान्तर के लिए ग्राफ–कागज पर निश्चित भाग का मध्य बिन्दु निकाल लेते हैं।
7. प्रत्येक वर्गान्तर की आवृत्तियों को वर्गान्तर के मध्य बिन्दु पर दर्शाते हैं। इसके लिए मध्य बिन्दु पर वर्गान्तर की आवृत्ति की ऊँचाई तक जाते हैं एवं इस स्थान पर एक बिन्दु लगा देते हैं। दोनों अतिरिक्त वर्गान्तरों की आवृत्तियाँ शून्य ली जाती हैं। इस प्रकार इन शून्य आवृत्तियों को आधार रेखा पर बनाया जाता है।
8. समस्त बिन्दुओं को सरल रेखा से मिला देते हैं।
9. ग्राफ–कागज के दाहिनी तरफ मापक लिख दिया जाता है।

प्राप्तांक	आवृत्ति
125–129	0 → अतिरिक्त वर्गान्तर
120–124	3
115–119	4
110–114	6
105–109	8
100–104	16
95–99	10
90–94	7
85–89	5
80–84	0 → अतिरिक्त वर्गान्तर



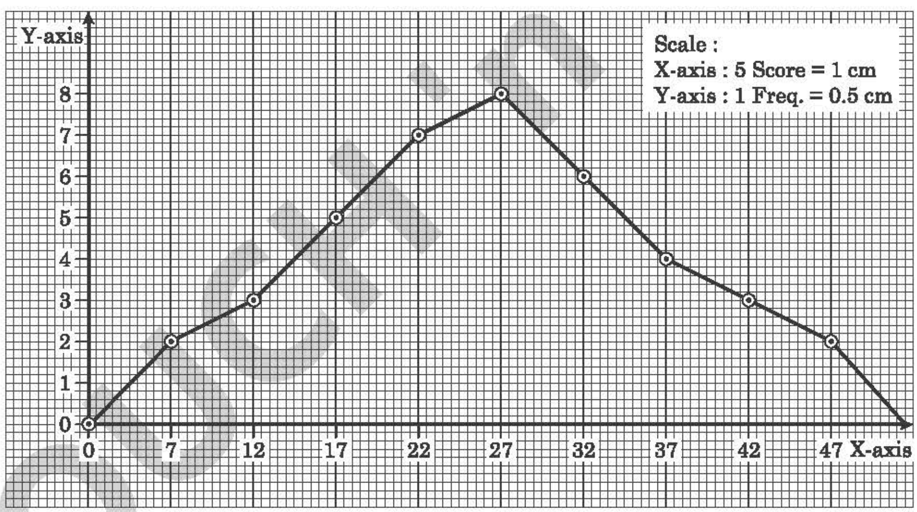
उदाहरण (Illustration)

निम्नलिखित आँकड़ों से आवृत्ति बहुभुज की गणना कीजिए—

C.I.	45–49	40–44	35–39	30–34	25–29	20–24	15–19	10–14	5–9
f	2	3	4	6	8	7	5	3	2

हल (Solution) :

C.I.	F	Mid Point (X)
45–49	2	47
40–44	3	42
35–39	4	37
30–34	6	32
25–29	8	27
20–24	7	22
15–19	5	17
10–14	3	12
5–9	2	7



प्र.3. स्तम्भाकृति अथवा आयताकार का सविस्तार वर्णन कीजिए।

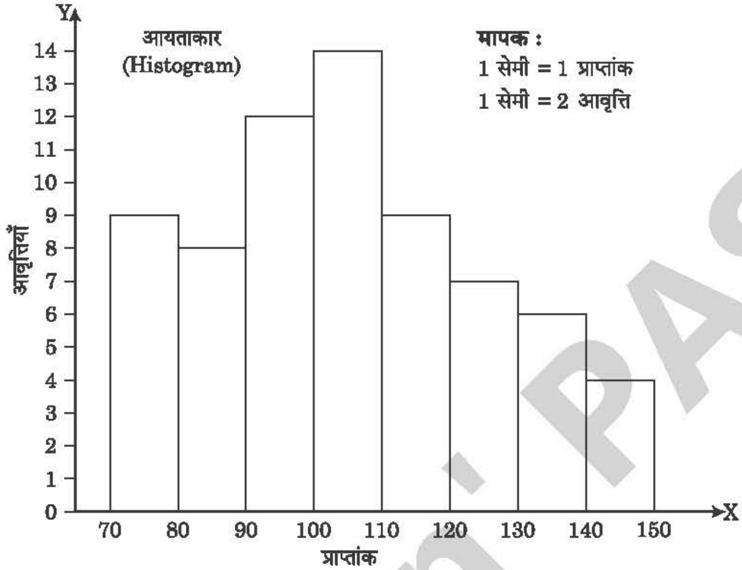
Describe the meaning of histogram in detail.

उत्तर

स्तम्भाकृति अथवा आयताकार का अर्थ
(Meaning of Histogram)

आवृत्ति वितरण को रेखाचित्र के माध्यम से प्रदर्शित करने की अन्य महत्त्वपूर्ण विधि को स्तम्भाकृति कहते हैं। यह वह रेखाचित्र है जिसमें आवृत्तियों को स्तम्भों अथवा आयतों द्वारा दर्शाया जाता है। HISTOGRAM नामक शब्द ग्रीक भाषा के दो शब्दों के योग से बना है, जो कि HISTO व GRAM है। इनमें से प्रथम शब्द का अर्थ 'ऊपर की ओर खड़ी हुई कोई वस्तु' व द्वितीय शब्द का अर्थ 'खींचना' है। अत: कह सकते हैं कि 'ऊपर को खड़ी वस्तु को खींचना' ही स्तम्भाकृति कहलाता है। सांख्यिकी में ऐसे आयत जो वर्गान्तर की आवृत्तियों को दर्शाते हैं, स्तम्भाकृति कहलाते हैं। **जेम्स ड्रेवर** के अनुसार, ''स्तम्भाकृति आवृत्ति वितरण को रेखाचित्रीय प्रदर्शन है जो दण्ड चित्र की तरह दिखाई पड़ता है जिसमें स्तम्भ की चौड़ाई वर्गान्तर को प्रदर्शित करती है और इसकी ऊँचाई उस वर्गान्तर की संख्या या आवृत्ति को प्रदर्शित करती है।''

निष्कर्षत: कह सकते हैं कि ऐसा रेखाचित्र जिसमें आवृत्तियों को स्तम्भों अथवा आयतों के माध्यम से दर्शाया जाता है, स्तम्भाकृति अथवा आयताकार कहलाता है। स्तम्भाकृति को बनाने की अग्रलिखित विधि है—



1. OX धुरी अथवा रेखा पर वर्गान्तरों को दर्शाया जाता है। ग्राफ कागज के आकार एवं वर्गान्तरों की संख्या के आधार पर उपयुक्त मापक लेते हुए OX धुरी पर उतने वर्गान्तर दिखाये जाते हैं, जितने आवृत्ति वितरण में होते हैं।
2. OY धुरी अथवा रेखा पर आवृत्तियों को दर्शाया जाता है। ग्राफ कागज के आकार एवं आवृत्तियों की अधिकतम संख्या के आधार पर उपयुक्त मापक लेते हुए OY रेखा का OX धुरी पर लम्बवत् खींचते हैं। OY रेखा OX रेखा की लम्बाई की 60-80% के अनुपात में होनी चाहिए।
3. वर्गान्तरों की निम्न सीमाओं को OX धुरी पर वर्गान्तरों हेतु निश्चित स्थानों पर लिख देते हैं।
4. वर्गान्तर की आवृत्तियों को दर्शाने के लिए वर्गान्तर की वास्तविक उच्च सीमा पर आवृत्तियों की ऊँचाई तक जाते हुए निशान लगाते हैं।
5. सारे निशानों को स्तम्भ अथवा आवृत्ति के रूप में मिलाते हैं।
6. दाहिनी तरफ कोने में ऊपर मापक लिख दिया जाता है।

स्तम्भाकृति में स्तम्भ की ऊँचाई वर्गान्तर के आकार को एवं ऊँचाई आवृत्तियों को दर्शाती है।

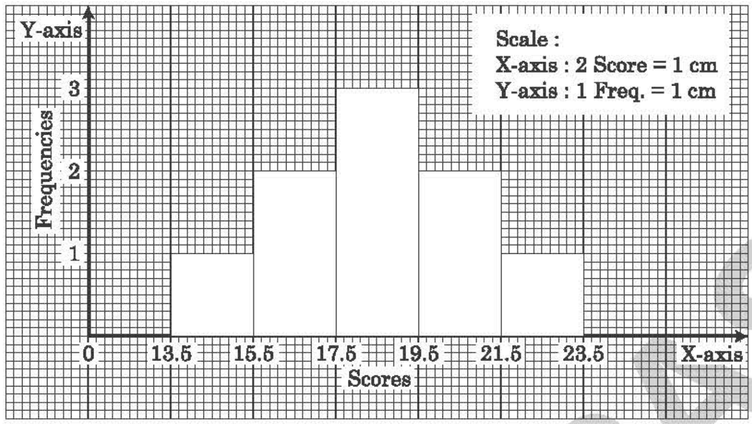
उदाहरण (Illustration)

निम्नांकित आँकड़ों से स्तम्भाकृति बनाइए—

C.I.	22–23	20–21	18–19	16–17	14–15
f	1	2	3	2	1

हल (Solution) :

C.I.	Exact Lower Limit	Frequencies
22–23	21.5	1
20–21	19.5	2
18–19	17.5	3
16–17	15.5	2
14–15	13.5	1



रेखाचित्र का महत्त्व
(Importance of Graphs)

(i) ग्राफ की सहायता से आँकड़ों से आसानी से निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं।

(ii) कई रंगों द्वारा बने ग्राफ ज्यादा आकर्षक बन जाते हैं, वे आसानीपूर्वक ध्यान को आकर्षित करते हैं।

(iii) ग्राफ द्वारा आँकड़ों को स्मरणीय बनाया जाता है।

(iv) ग्राफ के माध्यम से प्रदर्शित आँकड़े आसान, रुचिपूर्ण, आकर्षक व प्रभावशाली हो जाते हैं।

(v) ग्राफ के माध्यम से प्रदर्शित आँकड़ों की तुलना करना आसान होता है। इससे तुलना ज्यादा सजीव बन जाती है।

(vi) जब सांख्यिकीय आँकड़ों को अंकों के स्थान पर ग्राफ के माध्यम से दर्शाया जाता है तो आँकड़ों की प्रकृति को समझना आसान हो जाता है।

(vii) ग्राफ के माध्यम से प्रदर्शित आँकड़ों की प्रकृति को बहुत जल्दी समझा जा सकता है। अंकों द्वारा अभिव्यक्त आँकड़ों को समझने में अपेक्षाकृत ज्यादा समय लगता है।

प्र.4. पाई चार्ट पर विस्तृत टिप्पणी कीजिए।
Give a long note on pie chart.

उत्तर

पाई चार्ट
(Pie Chart)

एक पाई चार्ट एक गोलाकार चार्ट या पाई के रूप में डेटा का एक सचित्र रूप है जहाँ पाई के स्लाइस डेटा का आकार दिखाते हैं। पाई चार्ट के रूप में डेटा का प्रतिनिधित्व करने के लिए श्रेणीबद्ध चर के साथ संख्यात्मक चर की एक सूची की आवश्यकता होती है। प्रत्येक स्लाइस की चाप की लम्बाई और इसके परिणामस्वरूप एक पाई चार्ट में बनने वाला क्षेत्र और केन्द्रीय कोण उस मात्रा के समानुपाती होता है जिसका वह प्रतिनिधित्व करता है।

पाई चार्ट क्या है? (What is Pie Chart)

पाई चार्ट एक प्रकार का चार्ट है जो एक वृत्ताकार ग्राफ में डेटा को नेत्रहीन रूप में प्रदर्शित करता है। यह वास्तविक दुनिया की जानकारी का प्रतिनिधित्व करने के लिए मण्डलियों, क्षेत्रों और कोणीय डेटा की विशेषताओं का उपयोग करके डेटा का प्रतिनिधित्व करने के लिए सबसे अधिक उपयोग किये जाने वाले ग्राफ में से एक है। पाई चार्ट का आकार गोलाकार होता है जहाँ पाई पूरे डेटा का प्रतिनिधित्व करता है और पाई का टुकड़ा डेटा के हिस्सों का प्रतिनिधित्व करता है और इसे अलग–अलग रिकॉर्ड करता है।

पाई चार्ट परिभाषा (Definition of Pie Chart)

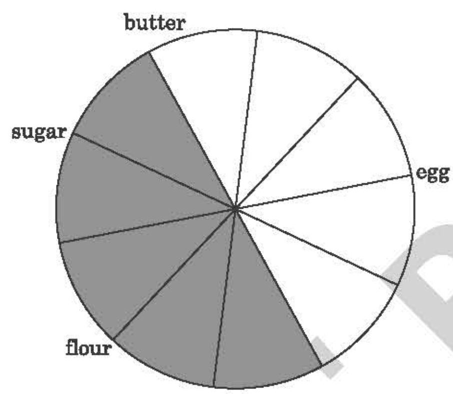
पाई चार्ट एक प्रकार का ग्राफ है जो डेटा को एक गोलाकार तरीके से रिकॉर्ड करता है जिसे पूरे हिस्से में उस विशेष भाग के डेटा का प्रतिनिधित्व करने के लिए आगे सेक्टरों में विभाजित किया जाता है। इनमें से प्रत्येक सेक्टर या स्लाइस पूरे के आनुपातिक भाग

का प्रतिनिधित्व करता है। पाई चार्ट, जिसे आमतौर पर पाई आरेख के रूप में भी जाना जाता है, डेटा को अधिक स्पष्ट रूप से व्याख्या करने और प्रस्तुत करने में मदद करता है। इसका उपयोग दिये गये डेटा की तुलना करने के लिए भी किया जाता है।

पाई चार्ट का उदाहरण (Example of Pie Chart)

आइए पाई चार्ट के निम्नलिखित उदाहरण को देखें जो बटर केक तैयार करने के लिए प्रयुक्त सामग्री का प्रतिनिधित्व करता है।

Butter Cake



उदाहरण—सम्पूर्ण पाई 100 के मान का प्रतिनिधित्व करती है। इसे 10 स्लाइस या सेक्टरों में विभाजित किया जाता है। विभिन्न रंग के केक तैयार करने के लिए प्रयुक्त सामग्री का प्रतिनिधित्व करते हैं। निम्नलिखित पाई चार्ट में विशिष्ट रंगों में दर्शायी गयी प्रत्येक सामग्री की सही मात्रा क्या होगी?

हल—जैसा कि हम देख सकते हैं कि, पाई को 10 स्लाइस या सेक्टरों में विभाजित किया गया है। केक में जोड़े जाने वाले अवयवों की सटीक मात्रा की गणना करने के लिए, हम पूरे सेक्टर के मान को, यानी 100 को सेक्टरों की संख्या में विभाजित करते हैं। इसलिए, $100 \div 10 = 10$ इसलिए, पाई चार्ट में बने रंग विभाजनों को देखते हुए हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं—

आटे की मात्रा	30
चीनी की मात्रा	20
अण्डे की मात्रा	40
मक्खन की मात्रा	10

पाई चार्ट फॉर्मूला (Formulae of Pie Chart)

हम जानते हैं कि पाई का कुल मूल्य हमेशा 100% होता है। यह भी ज्ञात है कि एक वृत्त 360° का कोण अन्तरित करता है। इसलिए सभी डेटा का योग 360° के बराबर है। इनके आधार पर पाई चार्ट में उपयोग किये जाने वाले दो मुख्य सूत्र हैं—

- दिये गये डेटा के प्रतिशत की गणना करने के लिए, हम सूत्र का उपयोग करते हैं—
  (आवृत्ति ÷ कुल आवृत्ति) × 100
- डेटा को डिग्री में बदलने के लिए हम सूत्र का उपयोग करते हैं—
  (दिया गया डाटा ÷ डाटा का कुल मूल्य) × 360

आवृत्ति बहुभुज तथा स्तम्भाकृति में अन्तर
(Difference Between in Frequency Polygon and Histogram)

1. आवृत्ति बहुभुज में आवृत्तियों को वर्गान्तर के मध्य बिन्दु पर दर्शाया जाता है, जबकि स्तम्भाकृति में आवृत्तियों को वर्गान्तर पर आयत बनाकर दर्शाया जाता है।
2. चरों के तुलनात्मक वर्णन के लिए आवृत्ति बहुभुज सही है, जबकि यह तुलनात्मक वर्णन स्तम्भाकृति द्वारा होना असम्भव है।
3. आवृत्ति बहुभुज के माध्यम से एक दो या ज्यादा चरों की आवृत्तियों को दर्शा सकते हैं, जबकि स्तम्भाकृति में मात्र एक चर से ही सम्बन्धित आँकड़ों का प्रदर्शन किया जा सकता है।

स्तम्भाकृति एवं स्तम्भ रेखाचित्र में अन्तर
(Difference Between in Histogram and Bar Diagram)

1. स्तम्भ रेखाचित्र अलग-अलग चरों को अथवा उनकी आवृत्ति अथवा प्रतिशत को प्रदर्शित कर सकते हैं, जबकि स्तम्भाकृति में इस प्रकार का प्रदर्शन असम्भव है।
2. इन दोनों रेखाचित्रों में समानता इतनी है कि दोनों ही स्तम्भों के आधार पर बनाये जाते हैं।
3. स्तम्भाकृति तथा स्तम्भ रेखाचित्र की बनावट बाहर से एक समान होती है, लेकिन दोनों की रचना विधि में अन्तर होता है।
4. स्तम्भाकृति में एक वर्गान्तर की कुल आवृत्तियों को जिस तरह वर्गान्तर पर दर्शाते हैं वैसे स्तम्भ रेखाचित्र में आवृत्तियों को नहीं दर्शाते हैं।
5. किसी अंक वितरण की पूर्णता को जितने अच्छे तरीके से स्तम्भाकृति द्वारा दर्शा सकते हैं उतने अच्छे तरीके से स्तम्भ रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शन असम्भव है।

बहुविकल्पीय प्रश्न

प्र.1. रेखाचित्र की सीमा है—

(क) रेखाचित्र पैमाने पर ही बनाये जाते हैं
(ख) पैमाने के बदलने पर रेखाचित्र का अर्थ परिवर्तित
(ग) शुद्ध स्थिति का ज्ञान नहीं
(घ) उपर्युक्त सभी

उत्तर (ग) शुद्ध स्थिति का ज्ञान नहीं

प्र.2. रेखाचित्र का महत्त्व है—

(क) तुलना करना कठिन
(ख) रेखाचित्र की प्रकृति को समझना आसान है
(ग) समय अधिक व्यय
(घ) ये सभी

उत्तर (ख) रेखाचित्र की प्रकृति को समझना आसान है

प्र.3. आवृत्ति वितरण को रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित करने की विधियाँ हैं—

(क) संचयी आवृत्ति वितरण वक्र तथा संचयी प्रतिशत वक्र विधि
(ख) आवृत्ति वितरण बहुभुज तथा स्तम्भाकृति विधि
(ग) (क) तथा (ख) दोनों
(घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ग) (क) तथा (ख) दोनों

प्र.4. 'Histogram' में 'Histo' का क्या अर्थ है?

(क) रेखाचित्र
(ख) आधार
(ग) खींचना
(घ) ऊपर को खड़ी हुई कोई वस्तु

उत्तर (घ) ऊपर को खड़ी हुई कोई वस्तु

प्र.5. प्रदत्तों के रेखाचित्रीय प्रदर्शन का कौन-सा लाभ नहीं है?

(क) तथ्यों का मनोरंजक रूप
(ख) प्रदत्तों की आकर्षण शक्ति में वृद्धि
(ग) सारणी द्वारा प्रदर्शित सभी तथ्यों का प्रदर्शन सम्भव
(घ) तुलनात्मक अध्ययन में सरलता

उत्तर (ग) सारणी द्वारा प्रदर्शित सभी तथ्यों का प्रदर्शन सम्भव

प्र.6. रेखाचित्र की विशेषता है—

(क) X-अक्ष पर स्वतन्त्र चरों का प्रदर्शन
(ख) रेखाचित्र का नामांकन आवश्यक
(ग) X-अक्ष Y-अक्ष से बड़ा होना
(घ) ये सभी

उत्तर (घ) ये सभी

प्र.7. **''गुणात्मक तथ्यों को व्यक्त करने के लिए चित्र ही एकमात्र विधि है।'' यह कथन किसका है?**
(क) बोर्डिंग्टन (ख) जेम्स ड्रेवर (ग) बाउले (घ) एम०जे० मोरोने
उत्तर (ग) बाउले

प्र.8. **''आवृत्ति बहुभुज आवृत्ति का आलेखीय निरूपण है, जोकि रेखाओं की शृंखला द्वारा किया जाता है।'' यह कथन किसका है?**
(क) जेम्स ड्रेवर (ख) गैरिट (ग) मन (घ) एनास्टासी
उत्तर (क) जेम्स ड्रेवर

प्र.9. **निम्नलिखित में से कौन-सा डेटा के संगठन में पहला कदम है?**
(क) डेटा का संग्रह (ख) डेटा का वर्गीकरण
(ग) डेटा का सारणीकरण (घ) डेटा की प्रस्तुति
उत्तर (क) डेटा का संग्रह

प्र.10. **किसी वर्ग अन्तराल की ऊपरी सीमा और उसके आगे वाले वर्ग अन्तराल की निचली सीमा के बीच का अन्तर कहलाता है—**
(क) कक्षा की चौड़ाई (ख) वर्ग चिह्न (ग) आवृत्ति (घ) सापेक्ष आवृत्ति
उत्तर (क) कक्षा की चौड़ाई

प्र.11. **किसी डेटा सेट में किसी विशेष आइटम के आने की संख्या को कहा जाता है—**
(क) आवृत्ति (ख) सापेक्ष आवृत्ति (ग) वर्ग चिह्न (घ) कक्षा की चौड़ाई
उत्तर (क) आवृत्ति

प्र.12. **संचयी आवृत्ति वितरण का चित्रमय प्रतिनिधित्व इस रूप में जाना जाता है—**
(क) हिस्टोग्राम (ख) बारम्बारता बहुभुज (ग) तोरण (घ) पाई चार्ट
उत्तर (ग) तोरण

प्र.13. **निम्नलिखित में से कौन-सा डेटा के वर्गीकरण की विधि नहीं है?**
(क) वर्णमाला (ख) संख्यात्मक (ग) कालानुक्रमिक (घ) ज्यामितीय
उत्तर (घ) ज्यामितीय

प्र.14. **सापेक्ष आवृत्ति वितरण का ग्राफिकल प्रतिनिधित्व कहलाता है—**
(क) हिस्टोग्राम (ख) बारम्बारता बहुभुज (ग) तोरण (घ) पाई चार्ट
उत्तर (ख) बारम्बारता बहुभुज

प्र.15. **निम्नलिखित में से कौन-सा डेटा प्रस्तुत करने का ग्राफिकल तरीका नहीं है?**
(क) हिस्टोग्राम (ख) तोरण (ग) पाई चार्ट (घ) बार ग्राफ
उत्तर (घ) बार ग्राफ

प्र.16. **निम्नलिखित में से कौन-सा डेटा के सारणीकरण की विधि नहीं है?**
(क) सरल आवृत्ति तालिका (ख) संचयी आवृत्ति तालिका
(ग) प्रतिशत आवृत्ति तालिका (घ) संचयी प्रतिशत आवृत्ति तालिका
उत्तर (ग) प्रतिशत आवृत्ति तालिका

प्र.17. **किसी विशेष वर्ग अन्तराल द्वारा दर्शायी जाने वाली कुल आवृत्ति का प्रतिशत कहलाता है—**
(क) आवृत्ति (ख) सापेक्ष आवृत्ति (ग) वर्ग चिह्न (घ) कक्षा की चौड़ाई
उत्तर (ख) सापेक्ष आवृत्ति

❑

UNIT-IV

केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें

Measures of Relative Position

खण्ड-अ अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. केन्द्रीय प्रवृत्ति की आवश्यकता तथा उद्देश्य लिखिए।

Write the need and objectives of central tendency.

उत्तर अनुसन्धान के क्षेत्र में यह जानकारी प्राप्त करने हेतु कि कोई समूह किसी विशिष्ट योग्यता में कितना अच्छा है, प्राय: इसके लिए उस समूह के केन्द्रीय मान अथवा केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप को ज्ञात करने की जरूरत होती है। केन्द्रीय प्रवृत्ति को सांख्यिकी में औसत कहते हैं। केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों की दो उद्देश्यों से गणना की जाती है—

1. यह किसी विशिष्ट कार्य के निष्पादन या गुण में दो अथवा दो से ज्यादा समूहों के बीच तुलना करने में मददगार होती है।
2. यह एक औसत है, जो समूह के सभी प्राप्तांकों का प्रतिनिधित्व करता है। अत: यह सभी समूह के निष्पादन का संक्षिप्त विवरण प्रस्तुत करता है।

प्र.2. मध्यमान को परिभाषित कीजिए।

Define mean.

उत्तर केन्द्रीय प्रवृत्ति के सभी मापनों में सबसे ज्यादा विश्वसनीयता तथा स्थिर मापन मध्यमान होता है। किसी एक शृंखला के समस्त अंकों के जोड़ को उनकी संख्या से विभक्त करने पर प्राप्त मूल्य मध्यमान कहलाता है। इसको गणितीय भाषा में औसत भी कहते हैं।

सिम्पसन एवं **काफ्का** के अनुसार, ''मध्यमान एक लब्धि है, जोकि समूह में पदों की संख्या से विभाजित करने पर प्राप्त होता है।''
एफ०सी० मिल्स के अनुसार, ''माध्य किसी वितरण का सन्तुलन केन्द्र है।''

प्र.3. मध्यमान की सीमाएँ लिखिए।

Write the limits of mean.

उत्तर मध्यमान की निम्नलिखित सीमाएँ हैं—

1. इसे श्रेणियाँ देकर तब तक नहीं गिन सकते, जब तक श्रेणियाँ आसान न हों।
2. वह एक श्रेणी में वास्तविक पद हो, यह सदैव आवश्यक अथवा सही नहीं है।
3. अगर श्रेणी में मदों की गिनती अत्यधिक कम हो, तो औसत पर सिरे की मदों का अनुचित प्रभाव पड़ता है।
4. गणितीय औसत ज्ञात करने हेतु पहले समस्त मदों के वास्तविक मूल्यों को समझना जरूरी है, लेकिन मध्यांक एवं बहुलांक की स्थिति में एक सिरे से मदों की इन मापों को समझे बिना उपेक्षा की जाती है।

प्र.4. मध्यमान के उपयोग लिखिए।

Write the uses of mean.

उत्तर 1. जब सबसे अधिक स्थिर व विश्वसनीय मूल्य की गणना करनी हो तो मध्यमान का उपयोग करना चाहिए।

2. जब अन्य सांख्यिकीय मापनों; जैसे—प्रमाप विचलन (Standard Deviation) एवं सह-सम्बन्ध (Co-relation) इत्यादि की गणना करनी हो तो मध्यमान की गणना करनी चाहिए, क्योंकि मध्यमान पर अनेक गणनाएँ निर्भर करती हैं।
3. जब एक केन्द्र बिन्दु के चारों ओर प्राप्तांक सामान्यत: वितरित हों अर्थात् जब वितरण पूर्णत: विषम नहीं हो। मध्यमान वितरण के आकर्षण का केन्द्र बिन्दु होता है तथा इसके निर्धारण में हर एक प्राप्तांक योग देता है। इस प्रकार सामान्यत: वितरित प्राप्तांकों से ही इसकी गणना की जानी चाहिए।

प्र.5. मध्यांक को परिभाषित कीजिए।
Define median.

उत्तर मध्यांक का आशय उस बिन्दु अथवा क्रम से है, जो व्यवस्थित बिन्दुओं को दो समान हिस्सों में विभाजित करता है। मध्यांक की स्थिति किसी क्रमबद्ध शृंखला से इस प्रकार की होती है कि उसके ऊपर एवं नीचे समान संख्या में मापन होते हैं।

गिलफोर्ड के अनुसार, "मध्यांक मान किसी मापनी पर उस बिन्दु के रूप में परिभाषित किया जा सकता है, जिसके ऊपर ठीक आधी इकाईयाँ तथा नीचे आधी इकाईयाँ आती हैं।"

प्रो० बाउले के अनुसार, "मध्यांक श्रेणी में उस पद का मूल्य है जो कि वितरण को दो बराबर भागों में बाँटता है।"

गैरिट के अनुसार, "जब अव्यवस्थित अंक या अन्य माप क्रम में व्यवस्थित हों तो मध्य का अंक मध्यांक कहलाता है।"

प्र.6. मध्यांक मान के गुण लिखिए।
Write the merits of median.

उत्तर 1. मध्यांक मान की गणना करना एवं समझना आसान होता है।
2. मध्यांक मान का मूल्य हमेशा निश्चित रहता है।
3. मध्यांक मान की गणना उस समय की जा सकती है जबकि सीमान्त मूल्यों के बारे में जानकारी न हो।
4. इसके मूल्यों पर सीमान्त मूल्यों का प्रभाव नहीं पड़ता है क्योंकि यह स्थिति का मापन होता है।
5. विभिन्न उदाहरणों में निरीक्षण मात्र से ही इसकी गणना हो सकती है।

प्र.7. मध्यांक के दोषों को बताइए।
State the demerits of median.

उत्तर 1. अंक शृंखला में थोड़ा-सा भी बदलाव इसके मूल्य में परिवर्तन उत्पन्न कर देता है।
2. संख्यात्मक मूल्यों को क्रम में व्यवस्थित करना कभी-कभी कार्य जटिल कर देता है।
3. मध्यांक मान विभिन्न उदाहरणों में अंक शृंखला का प्रतिनिधित्व नहीं करता है।
4. अगर एक शृंखला के बड़े व छोटे मूल्यों को महत्त्व दिया जाता है तो मध्यांक मान समुचित मापन होगा, क्योंकि मध्यांक मान सीमान्त मूल्यों को ध्यान में नहीं रखता है।
5. मध्यांक मान की व्यवस्थित प्राप्तांकों में से गणना करने पर यह कल्पना की जाती है कि वर्गान्तर की समस्त आवृत्तियाँ इसके मूल्यों में समानतः वितरित होती हैं।

प्र.8. मध्यांक मान के उपयोग लिखिए।
Write the uses of median.

उत्तर 1. जब बहुलांक की गणना करनी हो।
2. जब समूह का उचित मध्य बिन्दु निकालना हो।
3. जब वितरण का वास्तविक बिन्दु निकालना हो।
4. जब प्राप्तांकों का वितरण असामान्य हो।
5. वितरण के विषम या असामान्य होने की दशा में मध्यांक मान की गणना की जानी चाहिए।
6. जब अपेक्षाकृत कम शुद्ध केन्द्रीय प्रवृत्ति के मान की जरूरत हो।
7. जब ज्यादा शुद्धता की जरूरत न हो।

खण्ड-ब लघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. केन्द्रीय प्रवृत्ति का अर्थ लिखिए।
Write the meaning of central tendency.

उत्तर

केन्द्रीय प्रवृत्ति का अर्थ
(Meaning of Central Tendency)

सामाजिक विज्ञानों के अन्वेषण कार्य खत्म करने के उपरान्त अन्वेषक संख्यात्मक प्रदत्तों की बहुत बड़ी संख्या का सामना करता है। इनसे किसी विशेष प्रकार के निष्कर्ष को अर्जित करना कठिन होता है, क्योंकि प्रदत्तों का जमाव ज्यादा होता है एवं हर एक

प्रदत्त व्यक्तिगत सूचना को ही रखता है। इसलिए अध्ययन में अर्जित किये गये प्रदत्तों से किसी भी तरह के निष्कर्ष को ज्ञात करने हेतु या किसी भी उत्तर को प्राप्त करने हेतु सबसे पहले जमाव को कम करना एवं इनकी कठिनता को कम करना बहुत जरूरी है। यह कठिनता तब ही कम हो सकती है, जबकि प्रदत्तों को एक संख्या अथवा अंक के रूप में बदल दिया जाता है। **एलहेन्स** (Elhance) ने लिखा है कि "प्रदत्तों की जटिलता को कम करने के लिए तथा उन्हें तुलना के लिए बनाने के लिए यह आवश्यक है कि उन विभिन्न तथ्यों को एक अंक में कम कर लिया जाए, जिनकी तुलना की जानी है।"

आँकड़ों का अध्ययन करते समय अध्ययनकर्त्ता इस बात में रुचि रखता है कि उसे अपने समूह की प्रवृत्ति को समझने हेतु मात्र एक ही मापक की मदद लेनी पड़े। इस प्रकार की मान्यता को ही केन्द्रीय प्रवृत्ति के नाम से जानते हैं। सामान्य शब्दों में केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों का अर्थ औसत है। दूसरे शब्दों में केन्द्रीय प्रवृत्ति का अभिप्राय उस माप से है जो एक दिये हुए अंक वितरण का सर्वाधिक प्रतिनिधित्व करता है या वह मान है जो उस अंक वितरण में सबसे ज्यादा बार आया हो।

निष्कर्षत: कह सकते हैं कि कई अंक शृंखलाओं का प्रतिनिधित्व करने अथवा प्रदर्शित करने वाले एक अंक की गणना करना जरूरी है।

प्र.2. केन्द्रीय प्रवृत्ति की परिभाषाएँ लिखिए।

Write the definition of central tendency.

उत्तर

केन्द्रीय प्रवृत्ति की परिभाषाएँ
(Definitions of Central Tendency)

एलहेन्स के अनुसार, "यह स्पष्ट है कि एक अंक, जिसका प्रयोग एक सम्पूर्ण शृंखला को प्रदर्शित करने के लिए किया जाना है, शृंखला में न तो निम्नतम मूल्य और न ही अधिकतम मूल्य रखता हो, वरन् इन दोनों सीमाओं का मध्य का एक मूल्य, सम्भवत: केन्द्र में हो, जहाँ शृंखला के अधिकांश प्रदत्त घूमते हों।"

अत: समस्त अंक शृंखला का प्रतिनिधित्व करने हेतु एक अकेले मूल्य को अवश्य ही अर्जित किया जाना चाहिए। यह अकेला मूल्य ही 'केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापन (Measures of Central Tendency) अथवा औसत' (Average) कहा जाता है। इसे परिभाषित करते हुए **गिलफोर्ड** (Guilford) ने लिखा है कि, "निरीक्षणों या व्यक्तियों के एक समूह के केन्द्रीय मूल्य को प्रकट करने वाला एक अंक ही औसत है।"

निष्कर्षत: कह सकते हैं कि एक ऐसा मूल्य जो अंक समूह के केन्द्रीय मूल्य का सूचक हो, उसका प्रतिनिधित्व करता हो, केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापन कहलाता है। **इंगलिश एवं इंगलिश** (English and English) ने लिखा है कि, "केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापन किसी विशेष एकांश अथवा वस्तु के भिन्न और स्वतन्त्र निरीक्षणों अथवा मापनों के समूह से गणना किया गया एक ऐसा प्रदत्त है, जो एक आदर्श के रूप में उन निरीक्षणों का प्रतिनिधित्व करता है।"

समूह के इस तरह के प्रतिनिधिकारी मूल्य के चारों तरफ अधिकांश प्रदत्तों का जमाव होता है। **सिम्पसन एवं काफ्का** (Simpson and Kafka) के अनुसार, "केन्द्रीय प्रवृत्ति का एक मापन एक विशेष मूल्य है, जिसके चारों ओर अन्य अंक एकत्रित रहते हैं या जो उनकी संख्या को आधे में विभाजित करता है।"

अत: कहा जा सकता है कि यह एक ऐसा मूल्य होता है जो कि समस्त अंक शृंखला का प्रतिनिधित्व करता है अथवा **सिम्पसन एवं काफ्का** (Simpson & Kafka) के शब्दों में, "An average is an over all value."

प्र.3. केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापन की विशेषताओं का उल्लेख कीजिए।

Explain the characteristics of measures of central tendency.

उत्तर

केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापन की विशेषताएँ
(Characteristics of Measures of Central Tendency)

केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापन की निम्नलिखित विशेषताएँ हैं—

1. **सभी निरीक्षणों पर इसे आधारित होना चाहिए** (It should be based on all the observations)—अगर केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापन की गणना में समूह के सभी निरीक्षणों को सम्मिलित नहीं किया जाता है, तो यह एक अच्छा मापन नहीं कहलाता है। अन्य शब्दों में, एक अच्छे मापन की गणना सभी मापनों पर निर्भर होनी चाहिए। मात्र मध्यमान में ही यह विशेषता पायी जाती है।

2. **प्रतिदर्श अस्थिरता के माध्यम से इसको प्रभावित नहीं होना चाहिए** (It should not be affected by fluctuations of sampling)—अगर किसी विशेष क्षेत्र में दो स्वतन्त्र प्रतिदर्श अध्ययन किये जाते हैं तो एक अच्छे औसत के मापन के मूल्य में महत्त्वपूर्ण रूप से विविधता नहीं होनी चाहिए। मात्र मध्यमान में यह विशेषता पायी जाती है।
3. **इसको दृढ़ता से परिभाषित किया जाना चाहिए** (It should be defined rigidly)—केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक अच्छे मापन में यह विशेषता होनी चाहिए कि यह एक स्थिर तथा निश्चित मूल्य रखता हो। अगर इसे दृढ़ता के साथ परिभाषित किया गया है, तब ही यह अन्वेषणकर्ता के पक्षपात से अप्रभावित रहेगा तथा ऐसी दशा में ही यह निश्चित और स्थिर मूल्य दे सकेगा। मात्र मध्यमान व मध्यांकमान में यह विशेषता पायी जाती है।
4. **इसे बीजगणित उपयोग के योग्य होना चाहिए** (It should be capable of further algebraic treatment)—अगर केन्द्रीय प्रवृत्ति का कोई भी मापन इस विशेषता को नहीं रखता है तो इसे अच्छा मापन नहीं कह सकते हैं तथा इस तरह ऐसे मापन का उपयोग सीमित हो जाएगा। इस विशेषता की कमी में दो अथवा दो से ज्यादा अंक समूहों से एक मिला हुआ औसत (Combined Average) नहीं निकाला जा सकता है। अगर प्रदत्तों का योग तथा संख्या दी गयी है तो औसत की गणना की जा सकती है और अगर संख्या तथा औसत का मूल्य दिया गया है तो योग ज्ञात नहीं हो सकता है। मात्र मध्यमान में ही यह विशेषता पायी जाती है।
5. **जिन मूल्यों के औसत की गणना की जानी है, उन्हें समजातीय होना चाहिए** (The items whose average is being calculated should form a homogeneous group)—जिन संख्यात्मक मूल्यों से औसत की गणना करनी है, उन्हें समजातीय होना चाहिए। मनुष्य की बुद्धिलब्धि तथा उसकी ऊँचाई का औसत नहीं निकाला जा सकता है। अगर तेज बुद्धि वाले व निम्न बुद्धि वाले बालकों की औसत बुद्धिलब्धि निकाली जाती है तो निष्कर्ष भ्रमपूर्ण होंगे।
6. **इसकी गणना करना तथा समझना आसान होना चाहिए** (It should be easy to calculate and simple to understand)—अगर औसत की गणना जटिल गणितीय प्रक्रियाओं को सम्मिलित करती है तो इसे आसानी से नहीं समझा जाएगा एवं इसका उपयोग व्यक्तियों की सीमित संख्या के माध्यम से किया जाएगा। केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीन मापनों—मध्यमान, मध्यांक मान एवं बहुलांक मान में यह विशेषता पायी जाती है।

प्र.4. केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापनों का महत्त्व बताइए।
Explain the importance of measurements of central tendency.

उत्तर

केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापनों का महत्त्व
(Importance of Measurements of Central Tendency)

केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापनों का महत्त्व निम्नवत् कारणों से है—

(i) यह अप्रत्यक्षतः उस जनसंख्या के बारे में बतलाता है, जिससे कि प्रतिदर्श को लिया गया है।
(ii) दो अथवा दो से ज्यादा समूहों का तुलनात्मक अध्ययन भी औसत के मापनों के माध्यम से किया जा सकता है।
(iii) इसके द्वारा संख्यात्मक प्रदत्तों के समूह का संक्षिप्त वर्णन प्राप्त होता है। एक समूह के लिए एक अंक को याद करना एवं समस्त समूह के लिए एक अंक का उपयोग करना ज्यादा अर्थपूर्ण व मितव्ययितापूर्ण है। संक्षेप में, यह सभी अंकों का प्रतिनिधित्व करता है।

एच०ई० गैरेट (H.E. Garrett, 1973) ने केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों के निम्नलिखित महत्त्व बताये हैं—

(i) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप की मदद से समस्त वर्ग के गुणों को संक्षेप में दर्शाया जा सकता है।
(ii) उच्च सांख्यिकीय विश्लेषण; जैसे—प्रामाणिक विचलन व सह-सम्बन्ध इत्यादि ज्ञात करने में केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों की जरूरत पड़ती है।
(iii) समूह के प्राप्तांकों का केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप प्रतिनिधित्व करते हैं।
(iv) इन मापों की मदद से प्रदत्तों का प्राथमिक विश्लेषण होता है। यह विश्लेषण उच्च सांख्यिकी विधियों के प्रयोग में मददगार रहता है।
(v) केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों की मदद से दो अथवा दो से ज्यादा समूहों की तुलना सरलता से की जा सकती है।

प्र.5. बहुलांक मान के गुण, दोष अथवा उपयोगों का उल्लेख कीजिए।
Explain the merits, demerits and uses of mode.

उत्तर

बहुलांक मान
(Mode)

Mode शब्द फ्रेंच भाषा के Lemode नामक शब्द से लिया गया है, जिसका अर्थ **सर्वाधिक फैशन** होता है। जिस वस्तु का व्यक्ति सबसे अधिक उपभोग करते हैं, वही वस्तु सबसे अधिक फैशन में होती है। इस अर्थ में Mode का अर्थ उस मूल्य से लगाया जा सकता है; जो विचलन में सबसे ज्यादा बार आता है। बहुलांक मान 'सर्वाधिक घनत्व की स्थिति' 'सर्वाधिक आने वाले पद का मूल्य' या 'मूल्यों के अधिकतम केन्द्रीयकरण का मूल्य' होता है। बहुलांक मान के चारों ओर सबसे अधिक पदों का जमाव होता है।

गैरिट के अनुसार, ''बहुलांक वह मापन या प्राप्तांक है जो प्राय: घटित होता है।''

कैनी के अनुसार, ''प्राप्तांकों के समूह में जिस प्राप्तांक की आवृत्ति सबसे अधिक होती है, उसे बहुलांक मान कहते हैं।''

क्रो व **क्रो** के अनुसार, ''प्राप्तांकों के समूह में जिस अंक की आवृत्ति सबसे अधिक होती है, वह बहुलांक कहलाता है।''

वाकर एवं **लेव** के अनुसार, ''बहुलांक वह मूल्य है जो वितरण में प्राय: घटित होता है।''

बहुलांक के गुण
(Merits of Mode)

1. इसे समझना आसान है।
2. जब वितरण पूर्ण न हो।
3. यह एक आसान मापन है, इसको बिना गणितीय गणना के भी आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।
4. यह सीमान्त पदों के मूल्यों से प्रभावित नहीं होता है।
5. जब प्राप्तांकों का वितरण असामान्य हो।

बहुलांक के दोष
(Demerits of Mode)

1. बहुलांक मान की गणना सभी मूल्यों पर निर्भर नहीं करती है। इसकी गणना के लिए सर्वाधिक आवृत्ति वाले मूल्य की ही जानकारी होना पर्याप्त होता है।
2. अनेक ऐसे उदाहरण हैं जिनमें एक निश्चित मूल्य को निर्धारित करना असम्भव होता है क्योंकि कभी-कभी दो, तीन अथवा अधिक बहुलांक मान मिल सकते हैं।
3. बहुलांक मान अनिश्चित एवं अपरिभाषित होता है। इसके वास्तविक मूल्य को निर्धारित करना आसान नहीं होता है।
4. इसका बीजगणितीय विवेचन असम्भव है।

बहुलांक का उपयोग
(Use of Mode)

1. जब प्राप्तांकों का वितरण असामान्य हो।
2. जब केवल सामान्य प्रकार के केन्द्रीय मान से कार्य चल सकता हो।
3. जब केवल निरीक्षण मात्र से ही केन्द्रीय प्रवृत्ति की गणना की जानी हो।
4. केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापन की जब शीघ्रता से गणना करनी हो।
5. जब केन्द्रीय प्रवृत्ति के विशेष मापक की जानकारी करनी हो।
6. जब वितरण पूर्ण न हो।

प्र.6. मध्यमान के गुण व दोष लिखिए।
Write the merits and demerits of mean.

उत्तर

मध्यमान के गुण
(Merits of Mean)

केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापनों में मध्यमान का सबसे अधिक उपयोग निम्नवत् गुणों के कारण होता है—

1. इसकी गणना समस्त मापनों पर निर्भर करती है। अगर एक भी मापन ज्ञात नहीं होता है, तो मध्यमान की गणना नहीं हो सकती है।
2. मध्यमान के समस्त प्राप्तांकों के विचलन का योग शून्य होता है। अत: मध्यमान एक सन्तुलित बिन्दु होता है।
3. मध्यमान में एक यह विशेषता होती है कि अग्रिम बीजगणितीय विवेचन के योग्य होता है। दूसरे शब्दों में, इसमें बीजगणितीय प्रक्रियाओं का उपयोग हो सकता है।
4. मध्यमान का मूल्य हमेशा निश्चित तथा स्थिर होता है, इसलिए हर एक अन्वेषक समान मूल्य अर्जित करता है।
5. मध्यमान की गणना करना एवं इसे समझना आसान कार्य है, इसीलिए इसका सबसे अधिक उपयोग होता है।
6. मध्यमान से प्राप्त विचलनों के वर्ग का योग किसी अन्य मूल्य से प्राप्त विचलनों के वर्गों के योग से कम होता है।
7. मध्यमान के मूल्य पर प्रतिदर्श के बदलावों का प्रभाव नहीं पड़ता है।
8. मध्यमान की एक दूसरी विशेषता यह भी है कि अगर किसी आंकिक शृंखला के अंकों के जोड़ को उस शृंखला के मध्यमान से स्थानापन्न कर दिया जाए तो नयी शृंखलाओं का जोड़ मौलिक शृंखला के बराबर होता है।

मध्यमान के दोष
(Demerits of Mean)

मध्यमान की गणना विधि के कारण इसमें निम्नलिखित दोष होते हैं—

1. मध्यमान कभी-कभी इस तरह के मूल्य भी देता है, जो अवास्तविक दिखाई देते हैं।
2. इसकी गणना समस्त मूल्यों की मदद से की जाती है, इसलिए कभी-कभी असामान्य व सीमान्त पद इसके मूल्य को प्रभावित करते हैं।
3. अंकों के पूरे विवरण की अनुपस्थिति में मध्यमान भ्रमपूर्ण निष्कर्ष देता है।
4. यद्यपि मध्यमान की गणना करना आसान कार्य है, लेकिन मध्यमान, मान व बहुलांक मान की तरह निरीक्षण मात्र से इसकी गणना असम्भव है।
5. मध्यमान की गणना समस्त मूल्यों पर होने के कारण एक दोष यह होता है कि अगर अंक शृंखला में से एक मूल्य ज्ञात नहीं है तो इसकी गणना नहीं हो सकती है।

खण्ड-स विस्तृत उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. अव्यवस्थित प्राप्तांकों से मध्यमान की दीर्घ गणना कीजिए।
Describe calculate long term mean from disorganised scores.

उत्तर

अव्यवस्थित प्राप्तांकों से मध्यमान की गणना
(Enumeration of mean though disorganised scores.)

उदाहरण (Illustration)

19, 14, 8, 13, 16, 12, 11, 14, 18, 24, 22.

अव्यवस्थित प्राप्तांकों से मध्यमान की गणना करने हेतु निम्नवत् क्रियाविधि अपनाते हैं—

1. प्राप्तांकों का योग निकालते हैं। प्राप्तांकों के योग को (ΣX) कहा जाता है।
2. प्राप्तांकों की संख्या को ज्ञात करते हैं। प्राप्तांकों की संख्या को N कहा जाता है।
3. प्राप्तांकों के योग को प्राप्तांकों की संख्या से बाँटते हैं। दूसरे शब्दों में $\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)$ करते हैं।

4. अव्यवस्थित आँकड़ो से मध्यमान निकालने हेतु निम्नवत् सूत्र का उपयोग करते हैं—

$$M = \frac{\Sigma X}{N}$$

5. सूत्र के हर एक पद की व्याख्या किया करते हैं—

M = मध्यमान (Mean)
Σ = योग (The Sum of)
X = प्राप्तांक (Score)
N = प्राप्तांक की संख्या (Number of Scores)

हल (Solution) :

प्राप्तांकों का योग (ΣX) = 171
प्राप्तांकों की संख्या (N) = 11

मध्यमान (M) $= \frac{\Sigma X}{N} = \frac{171}{11} = 15.5454 = \mathbf{15.55}$ उत्तर

नोट—समस्त गणनाएँ दशमलव के पश्चात् तीन अंकों में करके उत्तर को दो अंकों में लिखना चाहिए।

उदाहरण (Illustration)

अव्यवस्थित प्राप्तांकों से मध्यमान की गणना करना—

21, 24, 27, 29, 29, 30, 32, 33, 35, 38, 42, 45.

हल (Solution) :

21, 24, 27, 29, 29, 30, 32, 33, 35, 38, 42, 45

$\Sigma X = 385$
$N = 12$

$$M = \frac{\Sigma X}{N}$$

जहाँ
M = मध्यमान (Mean)
Σ = योग (The Sum of)
X = प्राप्तांक (Score)
N = प्राप्तांकों की संख्या (Number of Scores)

$M = \frac{385}{12} = 32.083 = \mathbf{32.08}$ उत्तर

नोट—परीक्षा में उपरोक्त प्रकार से इस प्रकार के प्रश्नों को हल करना चाहिए—

दीर्घ विधि द्वारा मध्यमान की गणना
(Calculation of Mean by Long Method)

उदाहरण (Illustration)

प्राप्तांक	आवृत्ति (f)
90–94	2
85–89	4
80–84	8
75–79	6
70–74	11
65–69	9

60–64	7
55–59	5
50–54	3
	N = 55

व्यवस्थित अंक सामग्री का मध्यमान दो विधियों के माध्यम से ज्ञात करते हैं—

1. दीर्घ विधि 2. संक्षिप्त विधि

दीर्घ विधि के सूत्र तथा गणना निम्न प्रकार से की जाती है—

दीर्घ विधि द्वारा मध्यमान का गणना सूत्र
(Formula of Enumeration of Mean Through Long Method)

$$M = \frac{\Sigma fx}{N}$$

मध्यमान की दीर्घ विधि से गणना करने में निम्नलिखित क्रिया-विधि अपनाते हैं—

1. वर्गान्तरों के मध्य बिन्दु ज्ञात करते हैं। इन मध्य बिन्दुओं को ($\overline{X}$) के नाम से सम्बोधित करते हैं।
2. मध्य बिन्दुओं (X) का गुणा (f) में करके (fx) ज्ञात करते हैं।
3. fx का योग ज्ञात करते हैं (Σfx)।
4. Σfx को (N) में विभक्त करते हैं। इस तरह मध्यमान ज्ञात हो जाता है।

जबकि M = मध्यमान (Mean)
Σ = योग (The Sum of)
f = आवृत्ति (Frequency)
X = मध्य बिन्दु (Mid Point)
fx = आवृत्तियों और मध्य बिन्दुओं का गुणा (Product of Frequency and Mid Points)
N = आवृत्तियों का योग (Total Number of Frequencies)

प्राप्तांक (Scores)	f	मध्य बिन्दु (X)	fx
90–94	2	92	184
85–89	4	87	348
80–84	8	82	656
75–79	6	77	462
70–74	11	72	792
65–69	9	67	603
60–64	7	62	434
55–59	5	57	285
50–54	3	52	156
	N = 55		**Σfx = 3920**

$$M = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{3920}{55} = 71.272 = 71.27$$ **उत्तर**

उदाहरण (Illustration) 4

निम्नलिखित आवृत्ति वितरण से दीर्घ विधि की मदद लेकर मध्यमान ज्ञात कीजिए—

प्राप्तांक (Scores)	आवृत्ति (f)
140–149	2
130–139	5

120–129	7
110–119	9
100–109	11
90–99	8
80–89	6
70–79	4
60–69	3
50-59	1
	N = 56

दीर्घ विधि द्वारा मध्यमान की गणना
(Enumeration of Mean Through Long Method)

1. दीर्घ विधि द्वारा मध्यमान की गणना करने हेतु सबसे पहले मध्य बिन्दु ज्ञात करते हैं।
2. उसके बाद मध्य बिन्दुओं व आवृत्तियों का गुणा करते हैं। इस प्रकार (fx) प्राप्त कर लेते हैं।
3. तीसरे चरण में Σfx के योग को $M = \frac{\Sigma fx}{N}$ सूत्र में रखकर हल निकालते हैं।

प्राप्तांक (Scores)	*f*	मध्य बिन्दु (X)	*fx*
140–149	2	144.5	289.0
130–139	5	134.5	627.5
120–129	7	124.5	871.5
110–119	9	114.5	1030.5
100–109	11	104.5	1149.5
90–99	8	94.5	756.0
80–89	6	84.5	507.0
70–79	4	74.5	298.0
60–69	3	64.5	193.5
50–59	1	54.5	54.5
	N = 56		**$\Sigma fx = 5822.0$**

$$M = \frac{\Sigma fx}{N}$$

जहाँ M = मध्यमान (Mean)
Σ = योग (The Sum of)
f = आवृत्ति (Frequency)
X = मध्य बिन्दु (Mid Point)
N = आवृत्तियों का योग (Total Number of Frequencies)

$$M = \frac{5822.0}{56} = 103.964 = 103.96$$ उत्तर

प्र.2. आवृत्ति वितरण को मध्यमान लघु विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।
Calculation of frequency distribution through short method.

उत्तर

लघु विधि द्वारा मध्यमान ज्ञात करना
(Calculation of the Mean by Short Method)

लघु विधि के माध्यम से मध्यमान की गणना करने में निम्नलिखित क्रिया-विधि अपनाते हैं—

1. वर्गान्तरों के मध्य बिन्दु ($\overline{X}$) ज्ञात किये जाते हैं।
2. किसी एक मध्य बिन्दु को कल्पित मध्यमान (Assumed Mean) के रूप में मान लिया जाता है। किसी मध्य बिन्दु को कल्पित मध्यमान मानते समय अगर निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखा जाएगा तो गणना करने में सुविधा होगी—
   (i) उस मध्य बिन्दु को कल्पित मध्यमान के रूप में लेना चाहिए, जिसकी सर्वाधिक आवृत्ति हो व जो लगभग मध्य में आता हो।
   (ii) उस मध्य बिन्दु को कल्पित मध्यमान के रूप में लेना चाहिए, जहाँ तक कुल आवृत्तियों की आधी आवृत्तियाँ मिलती हों।
   (iii) उस मध्य बिन्दु को कल्पित मध्यमान के रूप में लेना चाहिए, जो कि मध्य में आता हो। (प्राय: पहले नियम का उपयोग होता है।)
3. जिस मध्य बिन्दु को कल्पित मध्यमान माना गया है, उसके आगे 0 (शून्य) लिख देते हैं।
4. कल्पित मध्यमान वाले मध्य बिन्दु से बड़े मध्य बिन्दुओं का विचलन क्रमश: + 1, + 2, + 3, + 4 इत्यादि करके व छोटे मध्य बिन्दुओं का विचलन क्रमश: –1, –2, –3, –4 इत्यादि करके निकालते हैं।
5. इन विचलनों का गुण (f) में करके (fx) ज्ञात करते हैं। (fx) के धनात्मक मूल्यों का योग एवं ऋणात्मक मूल्यों का योग पृथक्-पृथक् करते हैं। धनात्मक तथा ऋणात्मक मूल्यों के योग में से जो ज्यादा होता है, उसमें से कम मूल्य घटाकर (Σfx) ज्ञात करते हैं।
6. लघु विधि से मध्यमान ज्ञात करने की विधि को कल्पित मध्यमान विधि (Assumed Mean Method) भी कहा जाता है।
7. निम्नलिखित सूत्र का उपयोग होता है—

$$M = A.M. + \left(\frac{\Sigma fx'}{N}\right) \times i$$

जहाँ M = मध्यमान (Mean)
A.M. = कल्पित मध्यमान (Assumed Mean)
Σ = योग (The Sum of)
f = आवृत्ति (Frequency)
x' = वर्गान्तर के रूप में विचलन (Deviation in terms of Class Interval)
N = आवृत्तियों का योग (Total Number of Frequencies)
i = वर्गान्तर का आकार (Size of the Class Interval)

प्राप्तांक	आवृत्ति (f)
90–94	2
85–89	4
80–84	8
75–79	6
70–74	11
65–69	9
60–64	7
55–59	5
50–54	3
	N = 55

हल (Solution) : **(Calculation of Control Tandency)**

Scores	f	X	x'	fx'	
90–94	2	92	+ 4	+ 8	
85–89	4	87	+ 3	+ 12	+ 42
80–84	8	82	+ 2	+ 16	
75–79	6	77	+ 1	+ 6	
70–74	11	72	0	0	
65–69	9	67	–1	–9	
60–64	7	62	–2	–14	
55–59	5	57	–3	–15	–50
50–54	3	52	–4	–12	
	N = 55			$\Sigma fx'$ =	**–8**

$$M = \text{A.M.} + \left(\frac{\Sigma fx'}{N}\right) \times i$$

जहाँ M = मध्यमान (Mean)

A.M. = कल्पित मध्यमान (Assumed Mean) = 72

Σ = योग (The Sum of)

f = आवृत्ति (Frequency)

x' = वर्गान्तर के रूप में विचलन (Deviation in terms of Class Interval)

$\Sigma fx' = -8$

N = आवृत्तियों की संख्या (Number of Frequencies) = 55

i = वर्गान्तर का आकार (Size of the Class Interval) = 5

$$M = 72 + \left(\frac{-8}{55}\right) \times 5 = 72 + \left(\frac{-40}{55}\right) = 72 + (-.727)$$

$$= 72 - .73 = \mathbf{71.27}$$ उत्तर

[नोट—दीर्घ विधि एवं लघु विधि अथवा कल्पित मध्यमान विधि से मध्यमान की गणना करने पर उत्तर समान आता है।]

उदाहरण (Illustration)

निम्नवत् अव्यवस्थित प्राप्तांकों से मध्यांकमान की गणना—

10, 14, 18, 16, 22, 26, 27, 20, 24, 12, 23.

उत्तर—अव्यवस्थित प्राप्तांकों से मध्यांकमान की गणना करने हेतु निम्नवत् क्रियाविधि अपनाते हैं—

(i) प्राप्तांकों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है।

(ii) मध्य के पद का मूल्य ज्ञात किया जाता है।

हल (Solution) : 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 26, 27

सूत्र—

$$\text{Mdn} = \text{the value of} \left(\frac{N+1}{2}\right)^{\text{th}} \text{ item}$$

जहाँ

$$\text{मध्यांक} = \left(\frac{N+1}{2}\right)^{\text{th}} \text{ पद का मूल्य}$$

Mdn = मध्यांकमान (Median)

N = प्राप्तांकों की संख्या (Number of Scores)

$$\text{Mdn} = \text{the value of} \left(\frac{11+1}{2}\right)^{\text{th}} \text{ item}$$

$$= \text{the value of} \left(\frac{12}{2}\right)^{\text{th}} \text{ item}$$

$$= \text{the value of 6th item}$$

the value of 6th item = 20 = **20** उत्तर

[**नोट**—अगर प्राप्तांकों की सम संख्या हो तो आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने के पश्चात् बीच के दो प्राप्तांकों का योग करके दो का भाग देने पर मध्यांकमान का मूल्य प्राप्त होता है।]

उदाहरण (Illustration)

निम्नलिखित आवृत्ति वितरण से मध्यमान, मध्यांक मान एवं बहुलांक मान की गणना—

(Enmeration of mean, median and made through frequency distribution)

वर्गान्तर	(*f*)
80–84	2
75–79	3
70–74	3
65–69	7
60–64	9
55–59	8
50–54	6
45–49	4
40–44	2
	N = 44

हल (Solution) :

मध्यमान—

वर्गान्तर	*f*	X	*x'*	*fx'*	
80–84	2	82	+ 4	+ 8	
75–79	3	77	+ 3	+ 9	+ 30
70–74	3	72	+ 2	+ 6	
65–69	7	67	+ 1	+ 7	
60–64	9	62	0	0	
55–59	8	57	–1	–8	
50–54	6	52	–2	–12	
45–49	4	47	–3	–12	–40
40–44	2	42	–4	–8	
	N = 44			**Σ*fx'* =**	**–10**

$$\text{M} = \text{A.M.} + \left(\frac{\Sigma fx'}{\text{N}}\right)^{xi}$$

जहाँ

$$\text{A.M.} = \text{कल्पित मध्यमान} = 62$$
$$\Sigma = \text{योग}$$
$$f = \text{आवृत्ति}$$
$$x' = \text{वर्गान्तर के रूप में विचलन}$$
$$\Sigma fx' = -10$$
$$\text{N} = \text{आवृत्तियों की संख्या} = 44$$
$$i = \text{वर्गान्तर का आकार} = 5$$
$$\text{M} = 62 + \left(\frac{-10}{44}\right)^{\times 5} = 62 + \left(\frac{-50}{44}\right) = 62 + (-1.136)$$
$$= 62 - 1.14 = \mathbf{60.86}$$ उत्तर

मध्यांक मान—

वर्गान्तर	f	संचयी आवृत्ति
80–84	2	44
75–79	3	42
70–74	3	39
65–69	7	36
(I) 60–64	9(fm)	29 मध्यांक वर्गान्तर
55–59	8	20 (F)
50–54	6	12
45–49	4	6
40–44	2	2
	N = 44	

$$\text{Median} = 50\% = \frac{\text{N}}{2} = \frac{44}{2} = 22$$
$$\text{Median} = \left(\frac{\frac{\text{N}}{2} - \text{F}}{fm}\right)^{\times i}$$

जहाँ,

$$\text{Median} = \text{मध्यांक मान}$$
$$\text{I} = \text{मध्यांक वर्गान्तर की वास्तविक निम्नतम सीमा} = 59.5$$
$$\frac{\text{N}}{2} = \text{कुल आवृत्ति का आधा} = 22$$
$$\text{F} = \text{मध्यांक वर्गान्तर से नीचे के वर्गान्तर की आवृत्ति} = 20$$
$$fm = \text{मध्यांक वर्गान्तर की आवृत्ति} = 9$$
$$i = \text{वर्गान्तर का आकार} = 5$$
$$\text{Mdn} = 59.5 + \left(\frac{22-20}{9}\right)^{\times 5} = 59.5 + \left(\frac{2 \times 5}{9}\right)$$
$$= 59.5 + \frac{10}{9} = 59.5 - 1.111 = 59.5 - 1.11 = \mathbf{60.61}$$ उत्तर

बहुलांक मान (Mode) $Mo = 3Mdn - 2M$

जहाँ,

Mo = बहुलांक मान

Mdn = मध्यांक मान

M = मध्यमान

$$Mo = 3Mdn - 2M$$
$$= (3 \times Mdn) - (2 \times M) = (3 \times 60.61) - (2 \times 60.86)$$
$$= 181.83 - 121.72 = \mathbf{60.11}$$ उत्तर

[**नोट**—व्यवस्थित प्राप्तांकों से बहुलांक मान की गणना हेतु मध्यमान एवं मध्यांक मान की गणना की जाती है।]

बहुविकल्पीय प्रश्न

प्र.1. मध्यमान किसे कहते हैं?

(क) प्राप्तांकों का योग 50% (ख) प्राप्तांकों का औसत

(ग) प्राप्तांकों का न्यूनतम अंक (घ) प्राप्तांकों का मध्य भाग

उत्तर (ख) प्राप्तांकों का औसत

प्र.2. मध्यांक मान है—

(क) $\frac{N}{2}$ (ख) $\frac{N}{4}$ (ग) $\frac{N}{3}$ (घ) $\frac{N}{1}$

उत्तर (क) $\frac{N}{2}$

प्र.3. सांख्यिकी में मध्यमान को किस चिह्न के माध्यम से प्रकट करते हैं?

(क) N (ख) M (ग) Md (घ) Ma

उत्तर (ख) M

प्र.4. 10, 12, 14, 16, 20, 18 संख्याओं का मध्यमान निम्न में से क्या होगा?

(क) 80 (ख) 20 (ग) 25 (घ) 15

उत्तर (घ) 15

प्र.5. मध्यांक मान का गुण है—

(क) इसके मूल्य पर सीमान्त मूल्यों का प्रभाव नहीं पड़ता है

(ख) मध्यांक मान का मूल्य हमेशा निश्चित रहता है

(ग) मध्यांक मान की गणना करना तथा समझना सरल कार्य है

(घ) उपरोक्त सभी

उत्तर (घ) उपरोक्त सभी

प्र.6. मध्यांक का सूत्र है—

(क) $Mdn = L\frac{n}{fm} \times i$ (ख) $Mdn = L\frac{\left(\frac{N}{3} - f\right)}{fm}$

(ग) $Mdn = L + \frac{\left(\frac{N}{2} - f\right)}{fm} \times i$ (घ) $Mdn = L - \frac{\left(\frac{N}{2} - f\right)}{fm} \times i$

उत्तर (ग) $Mdn = L + \frac{\left(\frac{N}{2} - f\right)}{fm} \times i$

प्र.7. सूक्ष्म विधि से मध्यमान निकालने का सूत्र है—

(क) $M = i + \frac{\Sigma f}{N}$
(ख) $M = A.M. + \frac{\Sigma fd}{N} + i$
(ग) $M = i + \frac{\Sigma f}{N}$
(घ) $M = A \pm \frac{\Sigma d^2}{N} \times i$

उत्तर (ख) $M = A.M. + \frac{\Sigma fd}{N} + i$

प्र.8. केन्द्रीय प्रवृत्ति का कौन-सा माप प्राप्तांकों के प्रत्येक अंक के साथ परिवर्तनशील होता है?

(क) बहुलांक
(ख) मध्यांक
(ग) मध्यमान
(घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ग) मध्यमान

प्र.9. केन्द्रीय प्रवृत्ति के किस माप में अंकों का परिमाण शामिल होता है?

(क) अर्थ (ख) तरीका (ग) मंझला (घ) श्रेणी

उत्तर (क) अर्थ

प्र.10. निम्नलिखित में से कौन-सा माध्य का उपयोग करने का नुकसान नहीं है?

(क) यह चरम मूल्यों से प्रभावित है
(ख) इसकी गणना ओपन-एंडेड वर्ग अन्तराल के साथ समूहीकृत डेटा में नहीं की जा सकती है
(ग) इसमें वांछित बीजगणितीय गुण नहीं है
(घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ग) इसमें वांछित बीजगणितीय गुण नहीं है

प्र.11. असतत शृंखला में मोड खोजने की दो विधियाँ .... हैं।

(क) समूहीकरण विधि एवं आरोही विधि
(ख) तालिका विधि और मध्यबिन्दु विधि
(ग) समूहीकरण विधि एवं निरीक्षण विधि
(घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ग) समूहीकरण विधि एवं निरीक्षण विधि

प्र.12. जब किसी शृंखला में मानों का समान महत्त्व नहीं होता है, तो हम .... की गणना करते हैं।

(क) तरीका
(ख) भारित माध्य
(ग) अंकगणित औसत
(घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ख) भारित माध्य

प्र.13. माध्यिका की गणना करने के लिए शृंखला की सभी वस्तुओं को .... में व्यवस्थित करना होगा।

(क) अवरोही क्रम
(ख) आरोही क्रम
(ग) आरोही या अवरोही क्रम
(घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ग) आरोही या अवरोही क्रम

प्र.14. मोड एक शृंखला के भीतर मूल्य को संदर्भित करता है जो .... बार होता है।

(क) अधिकतम (ख) न्यूनतम (ग) शून्य (घ) अनन्त

उत्तर (क) अधिकतम

प्र.15. चरम वस्तुओं के मूल्य .... के औसत को प्रभावित नहीं करते हैं।

(क) अर्थ
(ख) तरीका
(ग) मंझला
(घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ग) मंझला

प्र.16. .... केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप नहीं है।

(क) तरीका (ख) अर्थ (ग) श्रेणी (घ) मंझला

उत्तर (ग) श्रेणी

प्र.17. .... से विचलन का योग सदैव शून्य होता है।

(क) मंझला (ख) तरीका (ग) अर्थ (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ग) अर्थ

प्र.18. .... से छोटे अवलोकनों की संख्या उससे बड़े अवलोकनों की संख्या के समान है।

(क) मंझला (ख) तरीका (ग) अर्थ (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (क) मंझला

प्र.19. .... डेटा को चार बराबर भागों में विभाजित करता है।

(क) मंझला (ख) चतुर्थक (ग) अर्थ (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ख) चतुर्थक

प्र.20. निम्नलिखित संख्याओं का माध्य क्या है : 23, 45, 87, 40, 50?

(क) 49 (ख) 34 (ग) 56 (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (क) 49

प्र.21. निम्नलिखित में से कौन-सा माध्य की विशेषता है

(क) माध्य से विचलन का योग शून्य है

(ख) यह वर्ग विचलनों के योग को न्यूनतम करता है

(ग) यह अत्यधिक स्कोर से प्रभावित होता है

(घ) उपरोक्त सभी

उत्तर (घ) उपरोक्त सभी

प्र.22. प्रतिशतक एक श्रृंखला को .... में विभाजित करते हैं।

(क) दस बराबर भाग (ख) बीस बराबर भाग

(ग) पचास बराबर भाग (घ) सौ बराबर भाग

उत्तर (घ) सौ बराबर भाग

प्र.23. ग्राफिक रूप से मोड का मान ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित में से किस आरेख का उपयोग किया जाता है?

(क) पाई चार्ट (ख) दण्ड आरेख (ग) हिस्टोग्राम (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ग) हिस्टोग्राम

❑

UNIT-V

सापेक्षिक स्थिति की माप

Measures of Relative Position

खण्ड-अ अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. क्या माध्यिका सापेक्ष स्थिति की माप है?

Is median measurement of relative position?

उत्तर **माध्यिका**—माध्यिका केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों में से एक है जो अत्यधिक उपयुक्त है यदि हम माप के क्रमिक स्तर के तहत डेटा के साथ काम कर रहे हैं। हालाँकि केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप होने के बावजूद स्थिति के कुछ मापों में इस मूल्य के समकक्ष हैं।

प्र.2. सापेक्ष स्थिति के उपाय क्या हैं?

What are the remedies of relative position?

उत्तर **परिभाषा**—मूल्यों का रूपान्तरण है, आमतौर पर मानकीकृत परीक्षण स्कोर यह दिखाने के लिए कि एक दिया गया मूल्य समान समूह के अन्य मूल्यों के सम्बन्ध में कहाँ खड़ा है।

प्र.3. सापेक्ष माप का अर्थ क्या है?

What is the meaning of relative measurement?

उत्तर मान लीजिए दो गाड़ियाँ एक ही स्थान से एक साथ रवाना हाती हैं। एक की चाल 40 किमी/घण्टा तथा दूसरे की चाल 60 किमी/घण्टा है तो पहले के सापेक्ष दूसरी गाड़ी की चाल 20 किमी/घण्टा होगी यदि वे एक ही दिशा में चल रही हैं और यदि वे विपरीत दिशा में चल रही हैं तो उनकी सापेक्ष चाल 100 किमी/घण्टा होगी।

प्र.4. निरपेक्ष और सापेक्ष क्या है?

What is absolute and relative?

उत्तर सापेक्ष वह अवधारणा है जिसका अर्थ 'वह, जो किसी से प्रभावित है' से लिया जाता है; वहीं इसके विपरीत 'निरपेक्ष' का अर्थ, 'वह जो किसी से प्रभावित नहीं है' से लिया जाता है।

प्र.5. केन्द्रीय प्रवृत्ति फैलाव और सापेक्ष स्थिति के उपाय क्या हैं?

What are the remedies of prevailing of control tendency and relative position?

उत्तर वे माप जो वितरण के अनुमानित केन्द्र को दर्शाते हैं, केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप कहलाते हैं। डेटा के प्रसार का वर्णन करने वाले उपाय फैलाव के उपाय हैं। इन उपायों में माध्य, माध्य, मोड, सीमा, ऊपरी और निचले चतुर्थक, विचरण और मानक विचलन शामिल हैं।

प्र.6. सापेक्ष माप का उदाहरण क्या है?

What is the example of relative measurement?

उत्तर जब कोई सापेक्ष माप की बात करता है तो भौतिक विज्ञान और गणित में प्रशिक्षित हममें से लोग चीजों को मापने के बारे में सोचते हैं, उदाहरण के लिए, यार्ड या मीटर जैसे पैमाने पर प्रत्येक की अपनी इकाईयों के साथ और प्राप्त करने के लिए सम्बन्धित लम्बाई को विभाजित करना सापेक्ष लम्बाई।

प्र.7. सापेक्ष माप और निरपेक्ष माप में क्या अन्तर है?

What is difference between absolute measurement and relative measurement?

उत्तर यदि आपको वास्तविक मान या सूक्ष्म अन्तर प्रदर्शित करने की आवश्यकता है, तो पूर्ण माप का उपयोग करें। यदि आप अनुपात, रुझान या डेटा बिन्दु एक सामान्य आधार रेखा से कैसे सम्बन्धित हैं, इस पर जोर देना चाहते हैं तो सापेक्ष (प्रतिशत) माप का उपयोग करें।

प्र.8. माध्य और माध्यिका में क्या अन्तर है?

What is the difference between mean and median?

उत्तर **माध्य**—माध्य संख्याओं के समूह में औसत या सबसे उभयनिष्ठ मान होता है। **माध्यिका**—दी गयी संख्याओं को एक क्रम में व्यवस्थित करने पर बीच वाली संख्या।

खण्ड-ब लघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. सापेक्षिक स्थिति के माप से क्या समझते हैं?

What do you understand by measures of relative position.

उत्तर

सापेक्षिक स्थिति के माप
(Measures of Relative Position)

निरपेक्ष मात्रा के माप का अर्थ तब तक सीमित होता है, जब तक कि उसकी व्याख्या सापेक्षिक माप के रूप में न हो जाए। क्या ऊँचाई नापने में दो इंच की त्रुटि, एक बड़ी अथवा छोटी त्रुटि है? इस प्रश्न का उत्तर तभी दिया जा सकता है जबकि यह मालूम हो कि, व्यक्ति की ऊँचाई नापी जा रही है, भवन की ऊँचाई अथवा बादल की ऊँचाई नापी जा रही है। वस्तु का मूल्य किसी मानक के विषय में अथवा समान वस्तुओं के मूल्य के विषय में अथवा उसे क्रय करने के लिए उपलब्ध धन के विषय में ही सार्थक होता है। मनुष्यों के गुणों के मापन में यह मानक उस समूह से मिलते हैं जिस समूह का वह सदस्य होता है। किसी व्यक्ति के शील गुण की मात्रा के विषय में उस समय तक सोचना भी अकल्पनीय है, जब तक कि उसकी विवेचना साधारण व्यक्तियों में उस शील गुण के विषय में न की जाए।

एक 10 वर्ष के बच्चे को अगर उससे छोटे बच्चों के समूह में छोड़ दें तो वह अधिक लम्बा एवं परिपक्व लगेगा, किन्तु अगर उसे ऐसे समूह में स्थानान्तरित कर दिया जाए जिसमें वह सबसे छोटा हो, तो वह स्वयं को बहुत छोटा और अपरिपक्व महसूस करेगा। इस अवस्था में तुलना का मानक (Standard) बदल गया है लेकिन आयु व ऊँचाई के निरपेक्ष मापों में किसी प्रकार परिवर्तन दिखाई नहीं देता है। किसी भी व्यक्ति के व्यवहार को जानने के लिए उस व्यक्ति की समूह में सापेक्ष स्थिति व समूह व्यवहार का अपना विशेष महत्त्व है।

विशेषकर मनोवैज्ञानिक व शैक्षिक मापन द्वारा मिले अंकों के कोई अर्थ नहीं होते हैं जब तक कि उन्हें किसी मानक के बारे में व्यक्त न किया जाए। किसी विद्यार्थी ने परीक्षण में 30 अंक प्राप्त किये, यह कहने का क्या तात्पर्य है? कुछ भी नहीं। यह अंक अधिकतम अंक भी हो सकते हैं और न्यूनतम भी अथवा औसत। अतएव अंक स्वयं में कोई अर्थ नहीं देते।

प्र.2. प्रतिशतांक श्रेणी का उल्लेख कीजिए।

Explain the percentile rank.

उत्तर

प्रतिशतांक श्रेणी
(Percentile Rank)

प्रतिशतांक श्रेणी एक वितरण में सापेक्षिक श्रेणी देती है जो कि 100 की मापनी पर आधारित होती है। किसी अंक की प्रतिशतांक श्रेणी यह व्यक्त करती है कि उस अंक से नीचे कितने प्रतिशत अंक हैं। अगर आपकी प्रतिशतांक श्रेणी 8 है, तो इसका तात्पर्य है कि आपके अंक के नीचे 8% अंक पड़ते हैं। **Ary** एवं **Jacobs** के शब्दों में, "A percentile rank gives us the relative rank of a score within a distribution, based scale of 100." **गैरेट** के शब्दों में, "The percentile rank (PR) of an individual is the position on scale of 100 to which the subjects score entitles him."

क्योंकि प्रतिशतांक श्रेणी किसी अंक का स्थान वितरण में उसकी श्रेणी के विषय में संकेत करती है। अतएव यह एक क्रम सांख्यिकी (Ordinal Statistics) है। जब तक कि किसी वितरण में अंकों की कुल संख्या (N) मालूम न हो, तब तक श्रेणी का कोई अर्थ नहीं होता है। 200 अंकों में 8वीं श्रेणी प्राप्त करने वाला अंक सापेक्षिक रूप में उच्च अंक है। 10 अंकों में 8वीं प्रतिशतांक श्रेणी प्राप्त करने वाला अंक सापेक्षिक रूप में निम्न अंक है। 100 की मापनी के उपयोग द्वारा प्रतिशतांक श्रेणी, स्थान का ऐसा सूचकांक (Index) देती है, जो वितरण में अंकों की संख्या से मुक्त होता है।

प्रतिशतांक श्रेणी सर्वव्यापक अर्थ रखती है, जोकि मूल प्राप्तांकों में नहीं होता है। कोई प्रतिशतांक श्रेणी जो शून्य के समीप है, उसका अर्थ हमेशा यह है कि वह समूह में निम्न स्थान रखती है, इसी तरह 50 के समीप की प्रतिशतांक श्रेणी का अर्थ औसत के समीप एवं 100 के समीप की प्रतिशतांक श्रेणी का अर्थ है कि वह समूह में सबसे उच्च स्थान रखती है। सांख्यिकी की कक्षा में आपकी 96 प्रतिशतांक श्रेणी यह बताती है कि कक्षा में आप सर्वोत्तम छात्रों में से एक हैं। यह ध्यान रखना चाहिए कि प्रतिशतांक श्रेणी व्यक्ति की समूह में स्थिति बताती है, वह एक निरपेक्ष (Absolute) मूल्य नहीं है। शारीरिक सुन्दरता के बारे में "मिस इण्डिया की प्रतिस्पर्द्धा में 4^{th} प्रतिशतांक श्रेणी प्राप्त करने वाली प्रतियोगी आकर्षक हो सकती है। किन्तु कैदियों के कुल में सत्यता के लिए 96^{th} प्रतिशतांक श्रेणी प्राप्त करने वाला व्यक्ति आवश्यक नहीं कि सच्चा व्यक्ति हो। इस प्रकार उस समूह की प्रकृति का बोध होना अत्यन्त आवश्यक है, जिसमें व्यक्ति की तुलना की गई है।

सामान्यत: प्रतिशत एवं प्रतिशतांक श्रेणी में लोग उचित अन्तर नहीं कर पाते। एक विद्यार्थी जो 20 में से 15 पद सही करता है, फलत: 75% पद सही करता है, लेकिन हम उसकी प्रतिशतांक श्रेणी को उस समय तक नहीं बता सकते, जब तक कि समूह में दूसरे लोगों के अंक मालूम न हों। अगर समूह में 15 उच्च प्राप्तांक हैं तो उसे उच्च प्रतिशतांक श्रेणी मिलेगी। किन्तु अगर समूह में अधिकांश लोगों ने 15 पद से अधिक पद सही किये गये हैं तो उसकी प्रतिशतांक श्रेणी निम्न होगी। यहाँ यह ध्यान रखना चाहिए कि प्रथम श्रेणी उच्च स्थान की सूचक है, जबकि प्रथम प्रतिशतांक श्रेणी निम्न स्थान की सूचक है।

प्र.3. प्रतिशतांक श्रेणी के प्रयोगों को लिखिए।

Write the uses of percentile ranks.

उत्तर

प्रतिशतांक श्रेणी के प्रयोग
(Uses of Percentile Ranks)

प्रतिशतांक श्रेणी अंकों को उस रूप में बदल देती है, जिससे कि उन्हें आसानी से समझा जा सकता है एवं उनकी व्याख्या आसानी से की जा सकती है। ये तुलना के लिए व व्याख्या के लिए सुविधाजनक सन्दर्भ देती है। क्योंकि प्रतिशतांक श्रेणी सापेक्षिक माप है, इसलिए यह ध्यान रखना चाहिए कि व्यक्ति को किन लोगों में श्रेणी प्रदान की गई है। एक प्रतिशतांक श्रेणी एक समूह विशेष में ही व्यक्ति के स्थान को दर्शाती है। प्रतिशतांक श्रेणी के अर्थपूर्ण होने के लिए व्यक्ति को उस समूह की रचना और प्रकृति की जानकारी होना चाहिए जिसका वह सदस्य है।

मूल अंक वितरण सामान्यत: एक जैसे वितरित नहीं होते हैं। इस कारण प्रतिशतांक श्रेणियाँ उपलब्धि मापनी पर समान अन्तर प्रदर्शित नहीं करती हैं। प्रतिशतांक श्रेणी इस तथ्य पर निर्भर करती है कि किसी अंक के नीचे कितने अंक हैं। यद्यपि किसी अंक के पास अन्य अनेक अंक हैं तो अंक में थोड़ी-सी वृद्धि उस अंक को कई अंकों से ऊपर ले जाएगी, फलत: प्रतिशतांक श्रेणी भी बढ़ जाएगी।

अगर किसी अंक के पास बहुत कम अंक हैं, तो उसे बहुत अधिक बढ़ाने पर भी प्रतिशतांक श्रेणी पर न्यूनतम प्रभाव पड़ेगा।

प्र.4. प्रतिशतांक अथवा शतांक को परिभाषित कीजिए।

Define percentile or centiles.

उत्तर

प्रतिशतांक अथवा शतांक
(Percentile or Centiles)

किसी मापनी पर वह मूल्य जो यह बताए कि उसके नीचे कितने प्रतिशत अंक पड़ते हैं। **'शतांक'** कहलाता है। **Blomer** एवं Lindquist के अनुसार, "The x^{th} percentile of a given score distribution in the point on the score scale below which x percent of the scores fall."

Downie एवं Health के अनुसार, "A centile or centile point is defined as a specific point in a distribution which has a given percent of the cases below it."

प्रतिशतांक श्रेणी की भाँति ही शतांक भी क्रम मापनी का निर्माण किया करते हैं। विद्यार्थियों के लिए यह अनिवार्य है कि वे प्रतिशतांक श्रेणी व प्रतिशतांक अथवा शतांक में अन्तर को अच्छी तरह समझ लें। किसी भी अंक की प्रतिशतांक श्रेणी (PR), उन अंकों का प्रतिशत है, जो पूरी श्रेणी में उससे नीचे है। जैसाकि पूर्व में बताया जा चुका है कि प्रतिशतांक श्रेणी कुल अंकों की मापनी पर प्रतिशतांक का संगत बिन्दु है। **Ary** एवं **Jacob** के अनुसार, "The percentile rank is a point on the original score scale corresponding to the particular percentile."

दूसरी तरफ x^{th} शतांक, मूल अंकों की मापनी पर दिए हुए वितरण में वह बिन्दु है जिसके नीचे x प्रतिशत अंक पड़ते हैं—प्रतिशतांक श्रेणी की गणना करने में व्यक्ति मूल अंक x से शुरू करता है और यह सुनिश्चित करता है कि उसके नीचे कितने अंक आते हैं। शतांक की स्थिति में व्यक्ति उस बिन्दु की स्थिति का निर्धारण करता है जिसके नीचे x प्रतिशत अंक आते हैं।

प्रतिशतांक अथवा शतांक को चिह्न P_x से प्रदर्शित किया जाता है, जिसमें x प्रतिशत विशेष को प्रदर्शित करता है। अतएव 90th शतांक को P_{90} लिखा जाता है।

प्र.5. शतांक की गणना कीजिए।

Give the calculation of percentiles.

उत्तर

शतांक की गणना
(Calculation of Percentiles)

जब प्रदत्त अव्यवस्थित हो, तो शतांक की गणना करने हेतु निम्नवत् सूत्र का उपयोग किया जाता है—

$$P_x = \frac{x(N+1)}{100}\text{वाँ पद}$$

जहाँ, P_x = जिस शतांक की गणना की जानी है

x = जो शतांक ज्ञात करना है

N = अंकों की संख्या

अतः,

$$P_{15} = \frac{15(N+1)^{th}}{100}\text{ item}$$

$$P_{30} = \frac{30(N+1)^{th}}{100}\text{ item}$$

$$P_{35} = \frac{35(N+1)^{th}}{100}\text{ item}$$

उदाहरण (Illustration)

निम्नलिखित अंकों का P_{85} एवं P_{55} ज्ञात कीजिए—

10, 11, 12, 15, 17, 19, 20, 22, 28, 30.

हल (Solution) :

$$P_{85} = \frac{85(10+1)^{th}}{100}\text{ item} = \left(\frac{85\times 11}{100}\right)^{th}\text{ item} = \left(\frac{935}{100}\right)^{th}\text{ item}$$

प्रश्न में 9 वाँ पद 28 है एवं ज्ञात पद का स्थान 9.35 है, अतएव हमें 9वें स्थान से .35 और आगे चलना होगा। 9वें व 10वें अंक के अन्तर का .35, इस अन्तर में .35 का गुणा करने से प्राप्त होगा। इसे 9वें अंक में जोड़ देने पर वांछित शतांश प्राप्त होगा।

$$= 28 + .35(30-28) = 28 + .35\times 2 = 28 + .70 = \mathbf{28.70}$$ उत्तर

$$P_{55} = \frac{55(10+1)^{th}}{100}\text{ item} = \left(\frac{55\times 11}{100}\right)^{th}\text{ item}$$

$$= \left(\frac{605}{100}\right)^{th}\text{ item} = 6.05^{th}\text{ item} = 19 + 0.05(20-19)$$

$$= 19 + .05\times 1 = 19 + .05 = \mathbf{19.05}$$ उत्तर

प्र.6. व्यवस्थित आँकड़ों में शतांक की गणना का उल्लेख कीजिए।

उत्तर

व्यवस्थित आँकड़ों से शतांक की गणना
(Calculation of Percentile from Grouped Data)

समूहबद्ध अथवा व्यवस्थित आँकड़ों से शतांक की गणना निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करके करते हैं—

$$P_x = L + \left(\frac{P_N - F}{f_p}\right) i$$

जहाँ, L = वर्गान्तर की वास्तविक न्यूनतम सीमा जिसमें वांछित शतांक पड़ता है

P_N = N का वांछित प्रतिशत

F = P_N वाले वर्गान्तर के नीचे की संचयी आवृत्तियाँ

f_p = PN वाले वर्गान्तर की आवृत्तियाँ

i = वर्गान्तर का आकार

उदाहरण (Illustration)

सारणी 1 में दिये गये आँकड़ों से P_{87} एवं P_{17} की गणना कीजिए।

हल (Solution) :

$$P_{85} = L + \left(\frac{P_N - F}{f_p}\right) i$$

प्रश्न में $$P_N = \frac{25 \times 87}{100} = \frac{87}{4} = 21.75$$

इस प्रकार, $$L = 34.5 \quad \Rightarrow \quad F = 20$$
$$f_p = 8 \quad \Rightarrow \quad i = 5$$

इन मूल्यों को सूत्र में रखने पर,

$$P_{87} = 34.5 + \left(\frac{21.75 - 20}{3}\right)5 = 34.5 + \frac{1.75}{3} \times 5$$
$$= 34.5 + \frac{8.75}{3} = 34.5 + 2.916 = 37.416 = \mathbf{37.47}$$ उत्तर

इसी तरह,

$$P_{17} = \frac{25 \times 17}{100}$$

$\therefore$ $$P_{17} = 14.5 + \left(\frac{4.25 - 3}{3}\right) \times 5 = 14.5 + \frac{1.25}{3} \times 5$$
$$= 14.5 + \frac{6.25}{3} = 14.5 + 2.08 = \mathbf{16.58}$$ उत्तर

खण्ड-स विस्तृत उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. प्रतिशतांक श्रेणी की गणना का वर्णन कीजिए।
Describe the calculation of percentile ranks.

उत्तर

प्रतिशतांक श्रेणी की गणना
(Calculation of Percentile Ranks)

आवृत्ति वितरण में प्रतिशतांक श्रेणी की गणना व्यवस्थित आँकड़ों व क्रमबद्ध आँकड़ों से हो सकती है। जब आँकड़े क्रमिक रूप में हों तब प्रतिशतांक श्रेणी की गणना अग्रवत् सूत्र से की जाती है—

$$PR = 100 - \frac{100R - 50}{N} \qquad ...(1)$$

जहाँ, PR = प्रतिशतांक श्रेणी (Percentile Ranks)

R = अंकों का क्रम

N = कुल अंकों की संख्या

उदाहरण (Illustration)

एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों को क्रमश: 1 से 30 तक श्रेणियाँ दी गयी हैं। 13, 16 और 23 क्रम वाले विद्यार्थियों की प्रतिशतांक श्रेणी ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

(a) जिस विद्यार्थी का क्रम 13 है उसका प्रतिशतांक पद निम्न प्रकार होगा—

$$PR = 100 - \frac{100R - 50}{N} = 100 - \frac{100 \times 13 - 50}{30}$$
$$= 100 - \frac{1,300 - 50}{30} = 100 - \frac{1,250}{30}$$
$$= 100 - 62.50 = 37.50$$

or $= 37$

(b)
$$PR = 100 - \frac{100R - 50}{N} = 100 - \frac{100 \times 16 - 50}{30}$$
$$= 100 - \frac{1,600 - 50}{30} = 100 - \frac{1,550}{30}$$
$$= 100 - 51.62 = 48.38$$

or $= 48$

(c)
$$PR = 100 - \frac{100R - 50}{N} = 100 - \frac{100 \times 23 - 50}{30}$$
$$= 100 - \frac{2300 - 50}{30} = 100 - \frac{2,250}{30}$$
$$= 100 - 75.00 = 75.00 = \mathbf{75}$$ उत्तर

उत्तर—अतएव 13, 16 और 3 क्रम वाले छात्रों की प्रतिशतांक श्रेणी क्रमश: 37, 48 और 75 होगी।

व्यवस्थित आँकड़ों से प्रतिशतांक श्रेणी की गणना
(Calculation of Percentile Rank from Grouped Data)

व्यवस्थित आँकड़ों से PR की गणना करने हेतु निम्नलिखित सूत्र का उपयोग होता है—

$$PR = \frac{100}{N}\left\{F + \frac{(X - l)f_p}{i}\right\}$$

जहाँ, f_p = X वाले वर्गान्तर की आवृत्तियाँ

N = आवृत्तियों की कुल संख्या

X = वह अंक जिसका PR ज्ञात करना है

l = उस वर्गान्तर की वास्तविक न्यूनतम सीमा जिसमें X आता है

i = वर्गान्तर का आकार

F = जिस वर्गान्तर में X आता है जिसके नीचे वाले वर्गान्तरों में संचयी आवृत्तियों की संख्या है।

प्रतिशतांक श्रेणी (PR) की गणना करते समय जिन चरणों का पालन करना होता है वह निम्नवत् हैं—

(i) सबसे पहले यह ज्ञात कीजिए कि जिस अंक का PR ज्ञात करना है। वह किस वर्गान्तर में पड़ता है।

(ii) उस वर्गान्तर की वास्तविक न्यूनतम सीमा ज्ञात कीजिए, जिसमें X पड़ता है।

(iii) आवृत्तियों को जोड़कर F की गणना कीजिए।

(iv) X वाले वर्गान्तर की आवृत्तियों में वर्गान्तर के आकार का भाग देकर उस वर्गान्तर में प्रत्येक अंक के चरण विचलन (Step deviation) की दर ज्ञात कीजिए।

(v) चरण विचलन की दर में X व वास्तविक न्यूनतम सीमा के अन्तर का गुणा कीजिए।

(vi) इस गुणनफल को X वाले वर्गान्तर के नीचे वाले वर्गान्तर में पड़ने वाली संचयी आवृत्तियों (F) में जोड़ दीजिए।

(vii) इस योग में N का भाग दे दीजिए।

(viii) नम्बर 7 से मिले परिणाम में 100 का गुणा कर दीजिए। यही वांछित प्रतिशतांक श्रेणी (PR) है।

(ix) अगर प्रतिशतांक श्रेणी दशमलव अंकों में आए तो उसे निकटतम पूर्णांकों में बदल दीजिए।

उदाहरण (Illustration) **सारणी 1**

	f	F
40–44	2	25
35–39	3	28
30–34	4	20
25–29	5	16
20–24	5	11
15–19	3	6
10–14	2	3
5–9	1	1
	25	

उपरोक्त सारणी में 28 अंक पाने वाले व्यक्ति की प्रतिशतांक श्रेणी (PR) ज्ञात कीजिए।

हल (Solution) :

$$PR = \frac{100}{N}\left\{F + \frac{(X - l)f_p}{i}\right\} = \frac{100}{25}\left\{11 + \frac{(28 - 24.5)5}{5}\right\}$$

$$= 4\left\{11 + \frac{3.5}{5} \times 5\right\} = 4(11 - 3.5) = 4 \times 14.5 = \mathbf{58.0}$$ उत्तर

बहुविकल्पीय प्रश्न

प्र.1. प्रथम श्रेणी किस स्थान की सूचक है?

(क) उच्च (ख) निम्न

(ग) मध्यम (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (क) उच्च

प्र.2. किसी मापनी पर वह मूल्य जो यह बताएँ कि उसके नीचे कितने प्रतिशत अंक पड़ते हैं, कहलाता है—

(क) प्रतिशतांक (ख) शतांक

(ग) (क) एवं (ख) दोनों (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ख) शतांक

प्र.3. फैलाव के माप के अन्तर्गत निम्नलिखित में से कौन-सी विधियाँ हैं?

(क) मानक विचलन (ख) औसत झुकाव

(ग) श्रेणी (घ) ये सभी

उत्तर (घ) ये सभी

प्र.4. फैलाव के अच्छे माप की निम्नलिखित में से कौन-सी विशेषताएँ हैं?
(क) इसकी गणना करना आसान होना चाहिए
(ख) यह एक शृंखला के सभी अवलोकनों पर आधारित होना चाहिए
(ग) यह नमूने के भीतर उतार-चढ़ाव से प्रभावित नहीं होना चाहिए
(घ) उपरोक्त सभी

उत्तर (घ) उपरोक्त सभी

प्र.5. यदि किसी शृंखला के सभी अवलोकनों को पाँच से गुणा किया जाए, तो ....।
(क) नये मानक विचलन में पाँच की कमी की जाएगी
(ख) नये मानक विचलन में पाँच की बढ़ोत्तरी की जाएगी
(ग) नया मानक विचलन पिछले मानक विचलन का आधा होग
(घ) नये मानक विचलन को पाँच से गुणा किया जाएगा

उत्तर (घ) नये मानक विचलन को पाँच से गुणा किया जाएगा

प्र.6. भिन्नता का गुणांक .... के लिए एक प्रतिशत अभिव्यक्ति है।
(क) मानक विचलन (ख) चतुर्थक विचलन (ग) औसत झुकाव (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (क) मानक विचलन

प्र.7. मानक विचलन की गणना करते समय विचलन केवल .... से लिया जाता है।
(क) किसी शृंखला का मोड मान (ख) किसी शृंखला का माध्य मान
(ग) किसी शृंखला का चतुर्थक मान (घ) किसी शृंखला का माध्य मान

उत्तर (घ) किसी शृंखला का माध्य मान

प्र.8. .... और .... फैलाव के माप के प्रकार हैं।
(क) नाममात्र, वास्तविक (ख) नाममात्र, सापेक्ष (ग) वास्तविक, सापेक्ष (घ) निरपेक्ष, सापेक्ष

उत्तर (घ) निरपेक्ष, सापेक्ष

प्र.9. मानक विचलन का संख्यात्मक मान कभी भी .... नहीं हो सकता।
(क) नकारात्मक (ख) शून्य (ग) विचरण से बड़ा (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (क) नकारात्मक

प्र.10. अंकगणितीय माध्य से वर्ग विचलन के औसत को .... के रूप में जाना जाता है।
(क) चतुर्थक विचलन (ख) मानक विचलन (ग) झगड़ा (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ग) झगड़ा

प्र.11. निम्नलिखित में से कौन-सा फैलाव के अच्छे माप की विशेषता नहीं है?
(क) इसे कठोरता से परिभाषित किया जाना चाहिए
(ख) यह चरम मूल्यों पर आधारित होना चाहिए
(ग) यह आगे गणितीय उपचार और सांख्यिकीय विश्लेषण करने में सक्षम होना चाहिए
(घ) उपरोक्त में से कोई नहीं

उत्तर (घ) उपरोक्त में से कोई नहीं

प्र.12. निम्नलिखित में से किसकी गणना ओपन-एंडेड वितरण के लिए नहीं की जा सकती है?
(क) मानक विचलन (ख) औसत झुकाव (ग) श्रेणी (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ख) औसत झुकाव

प्र.13. लॉरेंज कर्व एक तकनीक है जिसका उपयोग .... दिखाने के लिए किया जाता है।
(क) लोगों के एक समूह की सम्पत्ति और आय की असमानता
(ख) लोगों के एक समूह की बेरोजगारी

(ग) लोगों के एक समूह के धन और आय की समानता
(घ) इनमें से कोई भी नहीं

उत्तर (क) लोगों के एक समूह की सम्पत्ति और आय की असमानता

प्र.14. लॉरेंज वक्र 1905 में .... द्वारा विकसित किया गया था।
(क) डॉ० मैक्स ओ० लोरेन्ज (ख) डॉ० मैक्स सी० लोरेन्ज
(ग) डॉ० मैक्स एम० लोरेन्ज (घ) डॉ० मैक्स एस० लोरेन्ज

उत्तर (क) डॉ० मैक्स ओ० लोरेन्ज

प्र.15. 90 अवलोकनों के एक सेट का मानक विचलन 105 है। यदि प्रत्येक अवलोकन का मान 9 से कम हो जाता है, तो इन अवलोकनों का नया मानक विचलन .... होगा।
(क) 96 (ख) 100 (ग) 105 (घ) इनमें से कोई भी नहीं

उत्तर (ग) 105

प्र.16. एक शिपयार्ड में 100 श्रमिकों का औसत दैनिक वेतन ₹ 200, 40 के मानक विचलन के साथ। अब यदि प्रत्येक कर्मचारी को अपने वेतन में 20% की वृद्धि मिलती है, तो यह औसत वेतन को कैसे प्रभावित करेगा?
(क) औसत वेतन अपरिवर्तित रहेगा (ख) औसत वेतन में 20% की वृद्धि होगी
(ग) औसत वेतन होगा ₹ 240 (घ) (ख) और (ग) दोनों

उत्तर (घ) (ख) और (ग) दोनों

प्र.17. यदि आप किसी परीक्षा में 97 प्रतिशत अंक प्राप्त करते हैं, तो इसका मतलब है कि आपकी स्थिति परीक्षा में उपस्थित हुए कुल उम्मीदवारों के .... से नीचे है।
(क) 97 प्रतिशत (ख) 3 प्रतिशत (ग) 90 प्रतिशत (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ख) 3 प्रतिशत

प्र.18. निम्नलिखित में से फैलाव का कौन-सा माप ऋणात्मक मान प्राप्त कर सकता है?
(क) औसत झुकाव (ख) श्रेणी (ग) मानक विचलन (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ख) श्रेणी

प्र.19. रेंज .... का प्रतिनिधित्व करती है।
(क) सबसे कम संख्या (ख) सबसे ज्यादा संख्या
(ग) मध्य संख्या (घ) न्यूनतम और उच्चतम संख्या के बीच का अन्तर

उत्तर (क) सबसे कम संख्या

प्र.20. मानक विचलन का वर्ग .... है।
(क) वर्ग विचलन (ख) माध्य वर्ग विचलन (ग) झगड़ा (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ग) झगड़ा

प्र.21. वास्तविक दुनिया के परिप्रेक्ष्य में रेंज के अनुप्रयोग का एक उदाहरण .... होगा।
(क) शेयर की कीमतों में उतार-चढ़ाव (ख) मौसम के पूर्वानुमान
(ग) गुणवत्ता नियन्त्रण (घ) ये सभी

उत्तर (घ) ये सभी

प्र.22. एक वितरण के भीतर प्रत्येक पक्ष पर उच्च बिखराव .... को इंगित करता है।
(क) डेटा की उच्च एकरूपता (ख) डेटा के आउटलेट्स
(ग) डेटा की कम एकरूपता (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ख) डेटा के आउटलेट्स

❑

UNIT-VI

विचलनशीलता के माप
Measures of Variability

खण्ड-अ अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. विचलनशीलता का अर्थ लिखिए।
Write the meaning of variability.

उत्तर विचलनशीलता किसी भी अंक वितरण में कई अंकों की अपने मध्यमान से समीपता या दूरी को अभिव्यक्त करती है। जब एक अंक वितरण में कई अंक अपने मध्यमान में अपेक्षाकृत समीप रहते हैं, तब अंकों की विचलनशीलता कम हो जाती है। जब कई अंक अपने मध्यमान से दूर-दूर तक विस्तृत रहते हैं तो वितरण में विचलनशीलता ज्यादा होती है। सामान्यत: किसी समूह के पृथक्-पृथक् प्राप्तांकों का उस समूह के प्रतिनिधि मान या केन्द्रीय मान से अन्तर अथवा फैलाव को ही उस समूह का विचलन कहा जाता है।

प्र.2. विचलनशीलता को परिभाषित कीजिए।
Define variability.

उत्तर विचलनशीलता की निम्नवत् परिभाषाएँ हैं—

क्रो व क्रो के शब्दों में, ''जिस सीमा तक प्राप्तांकों में औसत या केन्द्रीय प्रवृत्ति की ओर केन्द्रित होने की प्रवृत्ति होती है या जिस सीमा तक वे अपने को फैलाते हैं, उनको उनकी विचलनशीलता कहते हैं।''

बोरिंग एवं लैंगफील्ड के शब्दों में, ''विचलन के मापक हमें यह बताते हैं कि आँकड़े अपने मध्यमान से कितनी दूर तक फैले हुए हैं।''

गैरिट के शब्दों में, ''विचलनशीलता का अर्थ प्राप्तांकों के वितरण या फैलाव से है, यह फैलाव प्राप्तांकों की केन्द्रीय प्रवृत्ति के चारों ओर होता है।''

प्र.3. प्रसार को परिभाषित कीजिए।
Define range.

उत्तर प्रसार से हमारा आशय अंक समूह के उच्चतम प्राप्तांक एवं निम्नतम प्राप्तांक के बीच के अन्तर से होता है। इसे 'R' से व्यक्त किया जाता है। प्रसार स्वत: में विचलनशीलता का कोई ज्यादा शुद्ध माप नहीं है। प्रसार की गणना का सूत्र है—

प्रसार = अधिकतम अंक − न्यूनतम अंक

Range = Highest Score − Lowest Score

(1) **गैरिट** के शब्दों में, ''प्रसार उच्चतम तथा निम्नतम प्राप्तांकों के मध्य का अन्तराल है।''
(2) **रसेल** के शब्दों में, ''प्रसार उच्चतम एवं निम्नतम मापन के मध्य प्राप्तांक मूल्यों में दूरी मात्रा है।''

प्र.4. प्रसार की कोई पाँच विशेषताएँ लिखिए।
Write any five characteristics of range.

उत्तर प्रसार की निम्नलिखित विशेषताएँ हैं—

1. प्रसार का उपयोग मात्र वर्णनात्मक स्तर तक ही होता है, इसका निष्कर्षात्मक कार्यों में उपयोग नहीं है।
2. प्रसार से मध्यमान की विश्वसनीयता मालूम की जा सकती है। अगर प्रसार कम है, तो मध्यमान ज्यादा विश्वसनीय होता है।
3. प्रसार विचलनशीलता का सबसे सुलभ मापन है।
4. प्रसार की गणना बहुत ही सरलता से कर ली जाती है।
5. दो समूहों का तुलनात्मक अध्ययन सुलभता से किया जा सकता है।

प्र.5. प्रसार की सीमाएँ लिखिए।

Write the limits of range.

उत्तर 1. प्रसार पर प्रतिदर्श परिवर्तन का प्रभाव पड़ता है।
2. यह मात्र उच्चतम एवं निम्नतम मूल्यों की ही गणना किया करता है।
3. प्रसार एक विश्वसनीय मापन नहीं है।
4. यह एक प्रतिनिधित्वपूर्ण मापन नहीं है, क्योंकि यह सभी मूल्यों पर आधारित नहीं होता है।
5. प्रसार से दो समूहों की तुलना का मात्र अपूर्ण ज्ञान मिलता है। अगर वितरण में खाली स्थान ज्यादा हो तो प्रसार ज्ञात नहीं किया जाना चाहिए।

प्र.6. प्रसार के उपयोग बताइए।

To state the use of range.

उत्तर 1. जब विचलनशीलता के एक अनुमानित मापन की गणना करनी हो।
2. जब विचलन का जल्दी से मात्र अनुमान लगाना होता है।
3. जब मात्र सीमान्त मूल्यों का अन्तर ज्ञात करना हो।
4. प्रसार की गणना उस समय करनी चाहिए, जबकि अंक अत्यधिक फैले हुए हों एवं विचलन के अन्य मापनों की गणना असम्भव हो।

प्र.7. मानक विचलन क्या है?

What is standard deviation?

उत्तर प्रस्तुत प्राप्तांकों के मध्यमान से प्राप्तांकों के विचलनों के वर्गों में मध्यमान का वर्गमूल ही प्रामाणिक विचलन है। अन्य शब्दों में, अगर दिए हुए प्राप्तांकों के मध्यमान से प्राप्तांकों का विचलन ज्ञात किया जाए, हर एक विचलन का वर्ग किया जाए, फिर इन वर्गों का योग करके उनकी संख्या से भाग देकर प्राप्त संख्या का वर्गमूल निकालने पर जो संख्या प्राप्त होती है वह प्रामाणिक विचलन (Standard Deviation) कहलाती है।

खण्ड-ब लघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. अव्यवस्थित अंक सामग्री से मध्यमान विचलन की गणना का उल्लेख कीजिए।

Explain the calculation of median deviation from ungrouped data.

उत्तर

अव्यवस्थित अंक सामग्री से मध्यमान विचलन की गणना
(Calculation of Median from Ungrouped Data)

जब अंक सामग्री व्यवस्थित न हो, मध्यमान विचलन ज्ञात करने हेतु निम्नलिखित सूत्र का उपयोग किया जाता है—

$$MD = \frac{\Sigma|x|}{N}$$

यहाँ पर x' = प्राप्तांक का मध्यमान से विचलन (Deviation of a score from mean)

$|x| = x$ के दोनों तरफ खिंची रेखाएँ प्रदर्शित करती हैं कि योगफल ज्ञात करते समय ऋणात्मक व धनात्मक चिह्नों पर ध्यान नहीं दिया जाता।

(Bars embracing the x indicate that the signs are disregarded in arriving at the sum)

N = प्राप्तांकों की संख्या (Number of Score)

मध्यमान विचलन की गणना के चरण

1. कई प्राप्तांकों से मध्यमान को घटाकर $(x - m)$ विचलन (x') ज्ञात करते हैं।
2. समूह के समस्त प्राप्तांकों का मध्यमान निकालते हैं।
3. सभी विचलनों को जोड़कर (ΣX) कुल संख्या N से भाग देते हैं एवं प्राप्त भागफल ही मध्यमान विचलन (MD) होगा। विचलनों को जोड़ते समय धनात्मक (+) तथा ऋणात्मक (–) संकेतों पर ध्यान नहीं देते हैं।

उदाहरण (Illustration)

निम्नांकित अव्यवस्थित प्राप्तांकों से मध्यमान विचलन ज्ञात कीजिए—

प्राप्तांक—6, 8, 10, 12, 14

हल (Solution) :

प्राप्तांक (X)	विचलन (X – M)	x
6	6–10	= –4
8	8–10	= –2
10	10–10	= 0
12	12–10	= + 2
14	14–10	= + 4
ΣX = 50		**Σx = 12**

$$M = \frac{\Sigma X}{N} = 10$$

सूत्र

$$MD = \frac{\Sigma|x|}{N}$$

यहाँ ΣX = 12 (+ एवं – संकेतों पर ध्यान दिए बिना समस्त विचलनों का योग कर दिया जाता है।)

इस प्रकार,

$$MD = \frac{|12|}{5} = 2.4$$

$$MD = 24$$

प्र.2. मानक विचलन के गुण, दोष व उपयोगों का उल्लेख कीजिए।

Explain the merits, demerits and uses of standard deviation.

उत्तर

मानक विचलन के गुण
(Merits of Standard Deviation)

मानक विचलन के निम्नलिखित गुण हैं—

1. यह शृंखला के हर एक अंक की उचित स्थिति के लिए संवेदनशील होता है। अगर किसी मूल्य को मध्यमान से दूर कर दिया जाता है तो मानक विचलन बढ़ जाता है।
2. मानक विचलन प्रतिदर्श विचलनों से कम प्रभावित होता है।
3. मानक विचलन की गणना समस्त मूल्यों पर निर्भर करती है।
4. मानक विचलन एक स्थिर एवं निश्चित मापन होता है। इसकी गणना हर एक स्थिति में कर सकते हैं।
5. जब विचलनों की गणना मध्यमान से होती है तो इन विचलनों के वर्गों का योग सबसे निम्न होता है।

मानक विचलन के दोष (Demerits of Standard Deviation)

1. इसकी गणना करने में जटिल प्रक्रिया को अपनाना पड़ता है।
2. मानक विचलनों को समझना आसान नहीं होता है।
3. इसमें ज्यादा सीमान्त मूल्यों को ज्यादा महत्त्व मिलता है। इस प्रकार जब शृंखला में सीमान्त चरण होते हैं, तो मानक विचलन में वृद्धि हो जाती है।

मानक विचलन का उपयोग (Use of Standard Deviation)

1. जब ज्यादा शुद्ध एवं विश्वसनीय माप की गणना करनी हो।
2. जब सह-सम्बन्ध एवं मानक गलती की गणना करनी हो।
3. जब केन्द्रीय मापकों में मध्यमान की गणना की गयी हो।
4. जब दो समूहों की सजातीयता की तुलना की जानी हो।
5. जब प्राप्तांकों का अंक वितरण सामान्य हो।

प्र.3. संयुक्त मानक विचलन का उल्लेख कीजिए।
Explain the combined standard deviation.

उत्तर

संयुक्त मानक विचलन
(Combined Standard Deviation)

संयुक्त मानक विचलन ज्ञात करने का निम्नवत् सूत्र है—

$$\text{S.D. Comb} = \sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{N_1 + N_2}}$$

यहाँ पर—σ_1= पहले वितरण का मानक विचलन (S.D. of the first distribution)

σ_2= दूसरे वितरण का मानक विचलन (S.D. of the second distribution)

$d_1 = M_1 - M\text{comb}$

$d_2 = M_2 - M\text{comb}$

उदाहरण (Illustration)

निम्नवत् संख्या के छात्रों वाली दो कक्षाओं का N, M एवं S.D. दिया गया है जोकि एक उपलब्धि परीक्षण के माध्यम से प्राप्त किये गये हैं। S.D. Comb ज्ञात कीजिए—

Class	N	M	S.D.
A	25	80	15
B	75	70	25

हल (Solution) :

S.D. Comb निकालते समय सर्वप्रथम संयुक्त मध्यमान (Combined Mean or M Comb) ज्ञात करते हैं।

दिये गये प्रश्न में, $N_2 = 25, N_2 = 75, M_1 = 80, M_2 = 70.$

संयुक्त मध्यमान का सूत्र निम्नवत् है—

$$\text{M Comb} = \frac{N_1M_1 + N_2M_2}{N_1 + N_2}$$

उपर्युक्त मूल्यों को सूत्र में रखने पर—

$$\text{M Comb} = \frac{25 \times 80 + 75 \times 70}{25 + 75} = \frac{2000 + 5250}{100} = 72.50$$

अत: प्रस्तुत प्रश्न में—

$N_1 = 25, \sigma_1^2 = 225, d_1^2 = 56.25$

$N_2 = 75, \sigma_2^2 = 625, d_2^2 = 6.25$

$d_1^2 = (M_1 - M_{comb})^2$ or $d_1^2 = (80 - 72.50)^2 = 7.5^2 = 56.25$

$d_2^2 = (M_2 - M_{comb})^2$ or $d_2^2 = (70 - 72.50)^2 = -2.5^2 = 6.25$

इन मूल्यों को सूत्र में रखने पर—

$$\text{S.D. Comb} = \sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{N_1 + N_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{25(225 + 56.25) + 75(625 + 6.25)}{25 + 75}}$$

$$= \sqrt{\frac{25 \times 281.25 + 75 \times 31.25}{100}} = \mathbf{23.32}$$

उत्तर

प्र.4. विस्तार के प्रत्यय को स्पष्ट कीजिए।

Clarify the ferm of range.

उत्तर किसी समूह के प्राप्तांक जितने अन्तर से (न्यूनतम से अधिकतम तक) फैले होते हैं, उन्हें प्राप्तांकों का विस्तार अथवा प्रसार अथवा परास कहते हैं। इसे दूसरे शब्दों में इस प्रकार कहा जा सकता है—

'किसी समूह के प्राप्तांक जितने (न्यूनतम प्राप्तांक से अधिकतम प्राप्तांक तक) फैले होते हैं, उसे उस समूह का विस्तार कहते हैं।'

विस्तार का प्रयोग कब करें—(i) जब किसी समूह की भिन्नता का मान शीघ्र ज्ञात करना हो।

(ii) जब किसी समूह के सबसे कम तथा सबसे अधिक प्राप्तांकों का ज्ञान आवश्यक हो।

(iii) जब समूह की संख्या छोटी हो।

(iv) जब किसी समूह के प्राप्तांकों का वितरण इस प्रकार का हो कि अन्य विचलन मानों का प्रयोग न किया जा सके।

विस्तार के उपयोग में कठिनाईयाँ—(i) इसके द्वारा दोनों सीमाओं के प्राप्तांकों के आधार पर ही भिन्नता ज्ञात हो जाती है, यह एक विश्वसनीय विचलन मान है।

(ii) बड़े समूह के लिए यह बहुत ही अस्थिर होता है। अत: बड़े समूह पर इसका प्रयोग कठिन है।

(iii) समूहों की संख्या भिन्न-भिन्न होने पर तुलना के लिए इनका प्रयोग नहीं किया जा सकता।

विस्तार ज्ञात करने की विधि—किसी समूह का विस्तार ज्ञात करने के लिए उसके अधिकतम प्राप्तांक में से निम्नतम प्राप्तांक घटा देते हैं। चूँकि इसमें उच्चतम और निम्नतम प्राप्तांक भी शामिल होते हैं इसलिए इस प्रकार प्राप्त अन्तर में जोड़ देते हैं। इसे निम्नलिखित सूत्र द्वारा निकाला जाता है—

$$\text{विस्तार} = (\text{अधिकतम प्राप्तांक न्यूनतम प्राप्तांक}) + 1$$

प्र.5. माध्य विचलन को समझाइए।

Explain the mean deriation.

उत्तर माध्य विचलन की गणना किसी भी सांख्यिकीय माध्य से की जा सकती है। किसी श्रेणी के सांख्यिकीय माध्य द्वारा उस श्रेणी के विभिन्न मूल्यों के विचलनों का समान्तर माध्य, उस श्रेणी का माध्य विचलन कहा जाता है। विचलन को गणना करते समय बीजगणितीय चिह्नों को अथवा (–) छोड़ दिया जाता है। इस प्रकार ऋणात्मक या धनात्मक विचलन में भेद नहीं किया जाता।

माध्य विचलन की गणना करते समय यद्यपि किसी भी सांख्यिकीय माध्य का प्रयोग करके विचलन निकाले जा सकते हैं, लेकिन यदि प्रश्न में ऐसा कोई संकेत नहीं दिया गया है। तो विचलन निकालने के लिए माध्यिका (median) का प्रयोग करना चाहिए। माध्य विचलन के लिए ग्रीक वर्णमाला के (छोटा डेल्टा) अक्षर का प्रयोग किया जाता है, जिसका उच्चारण 'डेल्टा' होता है। इस संकेताक्षर के नीचे दायीं ओर उस माध्य का चिह्न लगाया जाता है, जिसके माध्यम से विचलन ज्ञात किये जाते है। जैसे—

δ_m = Mean Deviation by Median

δ_n = Mean Deviation by Arithmetic Mean

δ_z = Mean Deviation by Mode

प्रयोग विचलन की गणना के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\delta_m = \frac{\Sigma d_M}{n} \quad \text{or} \quad \delta_a = \frac{\Sigma d_z}{n} \quad \text{or} \quad \delta_2 = \frac{\Sigma d_z}{n}$$

जहाँ Σd_N = माध्यिका द्वारा निकाले गये विचलनों का बीजगणितीय चिह्नों का ध्यान न रखते हुए योग

n = पदों की संख्या या आवृत्तियाँ

माध्य विचलन का प्रयोग कब करें—(i) जब साधारण विश्वसनीयता ज्ञात करने की आवश्यकता हो।

(ii) जब प्राप्तांकों का वितरण लगभग सामान्य हो।

(iii) जब प्राप्तांकों का वितरण ऐसा हो कि प्रामाणिक विचलन के दोषपूर्ण होने की सम्भावना हो।

(iv) जब प्राप्तांकों के माध्यमान के विचलनों को उनके मान के अनुसार रखना आवश्यक हो।

प्र.6. माध्य विचलन गुणांक की गणना किस प्रकार की जाती है?

How does calculation of mean deviation coefficient?

उत्तर तुलनात्मक अध्ययन के लिए माध्य विचलन को सापेक्ष माप ज्ञात की जाती है, जिसे माध्य विचलन गुणांक कहते हैं। इसके लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\text{Coeff. of M.D.} = \frac{\delta M}{M}$$

इसके लिए सर्वप्रथम किसी सांख्यिकीय माध्य की गणना की जाती है। इसके बाद उस माध्य से विचलन निकाले जाते हैं। इसके बाद योजगणितीय चिह्नों (+ या –) को छोड़कर जोड़ा जाता है। फिर इस जोड़ में पदों की संख्या या आवृत्तियों का भाग दिया जाता है। इस प्रकार मध्य विचलन को माप प्राप्त होती है। यदि इस माध्य विचलन को माप में माध्य (जिसका प्रयोग विचलन निकालने में किया गया है) का भाग दे दिया जाए तो प्राप्त माप को माध्य विचलन गुणांक कहा जाता है।

बारम्बारता श्रेणी में विचलनों में पहले बारम्बारता (f) की गुणा करके fd_M, fd_o या fd_a की गणना की जाती है तब इसका जोड़ Σfd_M आदि निकाला जाता है और उसे भाग दिया जाता है। इस श्रेणी में निम्न सूत्र प्रयोग होता है—

$$\delta_M = \frac{\Sigma fd_M}{f\Sigma} \quad \text{या} \quad \frac{\Sigma fd_M}{n}$$

खण्डित या अखण्डित श्रेणी में उपर्युक्त प्रक्रिया से ही माध्य विचलन गुणांक की गणना की जाती है। वर्गों के उच्च मूल्य और निम्न मूल्य का मध्य बिन्दु निकाला जाता है। इस मध्य बिन्दु को ही m माना जाता है।

प्र.7. प्रमाप विचलन को समझाइए।

Explain standard deviation.

उत्तर यह विचलन सांख्यिकी में सबसे अधिक प्रयुक्त होने वाला एक वैज्ञानिक एवं आदर्श माप है। इसमें समान्तर माध्य से विचलन लेकर उसके (+) एवं (–) के बीजगणितीय चिह्नों को ध्यान में रखते हुए उनका वर्ग किया जाता है। इस प्रकार (+) एवं (–) के चिह्न स्वयं समाप्त हो जाते हैं। इन वर्गों का जोड़ करके उसका समान्तर माध्य और फिर उसका वर्गमूल निकाला जाता है। इस प्रकार प्रमाप विचलन किसी श्रेणी के समान्तर माध्य से लिये गये विचलनों के वर्गों के समान्तर माध्य का वर्गमूल होता है। प्रमाप विचलन का प्रयोग सर्वप्रथम कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) ने किया था। इसके लिए ठीक वर्णमाला का 'σ' अक्षर (स्मॉल सिग्मा) प्रयोग किया जाता है। इसकी गणना के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} \quad \text{or} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-x)^2}{n}}$$

लेकिन प्रमाण विचलन (S.D.) की गणना लघु रीति से सरलता से की जाती है, जिसके लिए निम्न सूत्र का प्रयोग होता है।

(i) $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2 x}{n} - \left(\frac{\Sigma dx}{n}\right)^2}$ (ii) $\sigma = \sqrt{\frac{xd^2 x}{n} - (a-x)^2}$

(iii) $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2 x - n(a-x)^2}{n}}$ (iv) $\sigma = \frac{1}{n}\sqrt{n.\Sigma d^2 x + (\Sigma dx)^2}$

इनमें सूत्र (i) का प्रयोग सबसे अधिक किया जाता है, लेकिन यदि समान्तर माध्य की गणना करनी हो तो सूत्र नं० (ii) या (iii) का प्रयोग करना चाहिए।

मानक विचलन का प्रयोग कब करें—(i) यदि अधिक-से-अधिक स्थायी एवं विश्वसनीय विचलन मान की गणना करनी हो।

(ii) यदि सहसम्बन्ध गुणांक आदि अन्य सांख्यिकीय मानों की गणना करनी हो।

(iii) जब प्राप्तांकों का वितरण लगभग सामान्य हो।

(iv) जब प्राप्तांकों के केन्द्रीय मान की सूचना मध्यमान द्वारा दी गयी हो।

(v) जब मध्यमान के ऊपर और नीचे के अधिक दूरी को महत्त्व देता हो।

(vi) जब दो भिन्न-भिन्न इकाईयों वाले आँकड़ों की बिक्री करनी हो।

मानक विचलन के गुण—(i) यह सभी प्राप्तांकों पर आधारित होता है।
(ii) यह अधिक विश्वसनीय होता है।
(iii) आँकड़ों के सांख्यिकीय विश्लेषण और उचित स्पष्टीकरण के लिए उपयोगी है।

मानक विचलन के दोष—(i) इसकी गणना अपेक्षाकृत कठिन है।
(ii) वचनों के वर्ग पर आधारित होने के कारण प्राप्तांकों का मान विकृत हो जाता है।

खण्ड-स विस्तृत उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. विचलनशीलता के मापकों में माध्य विचलन व चतुर्थांश विचलन का वर्णन कीजिए।
Describe the mean deviation and quartile deviation.

उत्तर

विचलनशीलता के मापकों के प्रकार
(Types of Measures of Variability)

विचलन के मुख्यत: चार माप प्रचलन में हैं—
1. प्रसार (Range)
2. माध्य विचलन (Mean Deviation)
3. मानक विचलन (Standard Deviation)
4. चतुर्थांश विचलन (Quartile Deviation)

मध्यमान विचलन
(Mean Deviation)

मध्यमान विचलन को औसत विचलन भी कहते हैं। अंक वितरण के मध्यमान से उसके प्राप्तांकों के विचलनों के मध्यमान को मध्यमान विचलन कहा जाता है। विचलनशीलता के इस मापन में मध्यमान से लिए गये विचलनों के चिह्नों (+ तथा –) को महत्त्व नहीं दिया जाता है, वरन् सभी विचलनों को जोड़कर उसका औसत निकाल लिया जाता है। इसे M.D. अथवा A.D. के माध्यम से दर्शाया जाता है।

मध्यमान विचलन की परिभाषाएँ
(Definitions of Mean Deviation)

गैरिट के शब्दों में, "मध्यमान विचलन किसी पदमाला में सब विभिन्न प्राप्तांकों का उनके मध्यमान से विचलनों का औसत होता है।"
इंगलिश तथा **इंगलिश** के शब्दों में, "मध्यमान विचलन शृंखला के मध्यमान से प्रत्येक प्रकार के अन्तरों का गणितीय मध्यमान है।"
ई०डब्ल्यू० मिनियम के शब्दों में, "औसत विचलन प्रत्येक प्राप्तांक एवं प्राप्तांक समूह के मध्यमान के मध्य अन्तरों का मध्यमान है।"
गिलफोर्ड के शब्दों में, "मध्यमान विचलन, मध्यमान से भिन्न-भिन्न प्राप्तांकों के विचलनों का मध्यमान है जबकि धन तथा ऋण चिह्नों को ध्यान में न रखा गया हो।"
उपर्युक्त परिभाषाओं से स्पष्ट होता है कि औसत विचलन विचलनशीलता का वह मापन है जो किसी अंक शृंखला के कई अंकों की उस शृंखला के मध्यमान से औसत दूरी को दर्शाता है। यह एक ऐसा मापन है, जिसका आधुनिक अनुसन्धान कार्यों में प्रयोग देखने को नहीं मिलता है।

मध्यमान विचलन के गुण
(Merits of Mean Deviation)

1. सीमान्त अंकों से मध्यमान की गणना कम प्रभावित होती है।
2. यह विचलन का एक ऐसा मापन है, जो शृंखला के सभी मूल्यों पर निर्भर करता है।
3. समस्त प्राप्तांकों का मध्यमान विचलन की गणना पर प्रभाव पड़ता है इस प्रकार कहा जा सकता है कि यह अंक वितरण का पूर्ण प्रतिनिधित्व करता है।
4. समस्त मूल्यों पर आधारित होने की वजह से इसे प्रतिनिधित्वपूर्ण मापन कहते हैं।
5. इसकी गणना करना आसान है। इसके स्वरूप को आसानी से समझा जा सकता है।

मध्यमान विचलन के दोष
(Demerits of Mean Deviation)

1. यह एक निश्चित माप नहीं है।
2. गणितीय दृष्टिकोण से यह अशुद्ध है, क्योंकि इसमें धन एवं ऋण चिह्नों को महत्त्व नहीं दिया जाता है।

मध्यमान विचलन का उपयोग
(Use of Mean Deviation)

1. जब वितरण के हर एक प्राप्तांक को उसके आकार के अनुसार महत्त्व देना हो।
2. जब सुलभता एवं शीघ्रता से विचलनशीलता के मापन की गणना की जानी हो।
3. जब सीमान्त मूल्य प्रामाणिक विचलन (S.D.) को प्रभावित करते हो।
4. जब आँकड़े इतने फैले हुए हों कि प्रामाणिक विचलन के शुद्ध न निकलने की आशंका हो।
5. जब वितरण अत्यधिक विषम हो।

चतुर्थांश विचलन
(Quartile Deviation)

चतुर्थांश विचलन एक ऐसा मापन होता है जो एक अंक शृंखला को समान चार वर्गों में विभक्त करता है। चतुर्थांश विचलन किसी भी अंक शृंखला के पहले चतुर्थांश Q_1 एवं तीसरे चतुर्थांश Q_3 के बीच के अन्तर का आधा होता है। इसीलिए इसको अर्द्ध–अन्तर चतुर्थांश विचलन भी कहते हैं। विचलनशीलता का यह मापन इस सिद्धान्त पर आधारित है। क्योंकि मध्यांक मान अंक शृंखला को दो समान वर्गों में विभाजित करता है, जिसके एक तरफ सभी छोटे मूल्य एवं दूसरी तरफ सभी बड़े मूल्य होते हैं। पहले चतुर्थांश Q_1 छोटे वाले आधे भाग का मध्यमान एवं तीसरे चतुर्थांश Q_3 बड़े मूल्यों वाले आधे भाग का मध्यमान होता है। पहले चतुर्थांश Q_1 वह मूल्य होता है जिसके नीचे अथवा जिसके बराबर 75 प्रतिशत अंक आते हैं।

चतुर्थांश विचलन की परिभाषाएँ
(Definitions of Quartile Deviation)

सिम्पसन एवं **काफ्का** के शब्दों में, "प्रथम चतुर्थांश Q_1 वह आंकिक मूल्य होता है जिसके नीचे आंकिक शृंखला के प्रथम 25% अंक हों। तृतीय चतुर्थांश Q_3 आंकिक शृंखला में वह मूल्य होता है जिसके नीचे शृंखला के 75% अंक रहते हैं।"

एडवर्ड डब्ल्यू० मिनियम के शब्दों में, "चतुर्थांश विचलन प्रथम और तृतीय चतुर्थांश बिन्दुओं के मध्य की आधी /दूरी है।"

गैरिट के शब्दों में, "चतुर्थांश विचलन या Q_1 एक आवृत्ति वितरण में 75वें एवं 25वें प्रतिशतांशों के मध्य मापक दूरी का आधा होता है।"

उपरोक्त परिभाषाओं से स्पष्ट होता है कि चतुर्थांश विचलन Q पहले एवं तीसरे चतुर्थांश या 75% मूल्य व 25% मूल्य के अन्तर का आधा होता है। 75% Q_3 और 25% Q_1 मूल्यों के बीच का अन्तर 'अन्तर चतुर्थांश प्रसार' (Inter Quartile Range) कहा जाता है। इसका उपयोग अर्द्ध–अन्तर चतुर्थक प्रसार (Semi-Inter Quartile Range) का चतुर्थांश विचलन कहलाता है।

चतुर्थांश विचलन के गुण
(Merits of Quartile Deviation)

चतुर्थांश विचलन के निम्नलिखित गुण हैं—

1. चतुर्थांश विचलन की गणना करना आसान होता है।
2. प्रतिदर्श गलतियों से चतुर्थांश विचलन मानक विचलन की अपेक्षा कम प्रभावित होता है।
3. जब अंक क्रम में हों अथवा व्यवस्थित हों तब इसकी गणना आसान होती है।
4. प्रसार की तरह इसकी गणना भी आसानी से की जा सकती है तथा इसका विवेचन करना भी आसान है।
5. वर्णनात्मक स्तर से ज्यादा इसका कोई प्रयोग नहीं है।

6. यह विशेषताओं तथा गुणों में मध्यांक की भाँति है।
7. यह क्रमिक स्तर के प्राप्तांकों हेतु ज्यादा उपयोगी होता है।
8. इसके मूल्यों पर सीमान्त मूल्यों का कम प्रभाव पड़ता है।

चतुर्थांश विचलन के दोष
(Demerits of Quartile Deviation)

चतुर्थांश विचलन के निम्नलिखित दोष हैं—

1. यह समस्त मूल्यों पर आधारित नहीं है।
2. यह केवल मध्य के 50% प्राप्तांकों के विचलन का ही अध्ययन करता है।
3. यह एक विश्वसनीय मापन नहीं होता है।
4. इसमें किसी भी तरह के औसत की गणना नहीं की जाती तथा न ही विचलन निकाला जाता है।

चतुर्थांश विचलन के प्रयोग
(Use of Quartile Deviation)

1. जब बीच के 50% का मध्यांक मान पर ही केन्द्रित करने का प्रमुख लक्ष्य हो।
2. जब अंक वितरण में बिखरे हुए या सीमान्त प्राप्तांक हों जो मानक विचलन को अनावश्यकत: प्रभावित करते हों।
3. जब केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापन के रूप में मध्यांक मान की गणना की जानी हो।

उदाहरण (Illustration)

निम्नलिखित प्राप्तांकों का प्रसार ज्ञात कीजिए—

24, 20, 35, $\boxed{38}$, 18, 32, 20, 22, $\boxed{16}$, 27, 28, 30.

हल (Solution) :

$$\text{Highest Score} = 38$$
$$\text{Lowest Score} = 16$$

इस प्रकार,
$$R = \text{Highest Score} - \text{Lowest Score}$$
$$= 38 - 16 = 22$$

उदाहरण (Illustration)

कक्षा 10 के 50 छात्र एवं छात्राओं के सामान्य ज्ञान परीक्षण के परिणाम निम्नलिखित सारणी में दिये गये हैं। प्राप्त परिणामों की प्रसार के आधार पर विवेचना कीजिए।

विद्यार्थी	मध्यमान	प्रसार
छात्र	120	140 – 80 = 60
छात्राएँ	120	100 – 85 = 15

हल (Solution) :

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट होता है कि मध्यमान की दृष्टि से दोनों समूहों में कोई अन्तर नहीं है, क्योंकि दोनों समूहों का मध्यमान मूल्य बराबर (120.0) है, परन्तु छात्रों के समूह का प्रसार छात्राओं के समूह के प्रसार से ज्यादा है। छात्रों के समूह के प्राप्तांक एक-दूसरे से ज्यादा अलग हैं, जबकि छात्राओं के समूह में यह भिन्नता कम है। इस प्रकार स्पष्ट है कि छात्राओं का समूह छात्रों की अपेक्षा ज्यादा समजातीय है।

यद्यपि प्रसार का उपयोग आवृत्ति वितरण सारणी बनाने में होता है तथा इसकी गणना करना आसान है, फिर भी यह विचलनशीलता का विश्वसनीय मापक नहीं माना जाता, क्योंकि मात्र किनारे की संख्याओं को ही महत्त्व दिया जाता है। इसलिए जब शुद्ध विचलनशीलता को ज्ञात करने की जरूरत हो, प्रसार का उपयोग नहीं होता है।

प्र.2. व्यवस्थित व अव्यवस्थित अंक सामग्री से मध्यमान की गणना कीजिए।

Describe the calculation of M.D. and Q from grouped and ungrouped data.

उत्तर

व्यवस्थित अंक सामग्री से मध्यमान विचलन की गणना
(Calculation of M.D. from Grouped Data)

व्यवस्थित अंक सामग्री से मध्यमान विचलन ज्ञात करने का सूत्र निम्नलिखित है—

$$\text{M.D.} = \frac{\Sigma|fx|}{N} = 2.4$$

यहाँ पर x = प्राप्तांक (मध्य बिन्दु) का मध्यमान से विचलन (Deviation of score midpoint) from the mean)

f = आवृत्ति (Frequency)

N = आवृत्तियों का कुल योग (Total No. of Frequencies)

मध्यमान विचलन ज्ञात करने के चरण (Steps for calculation of mean deviation)

(i) सबसे पहले प्रत्येक वर्गान्तर का मध्य बिन्दु (X) निकालते हैं।

(ii) किसी भी उपयुक्त विधि से मध्यमान का मूल्य ज्ञात करते हैं।

(iii) मध्यमान से विचलन (x) ज्ञात करने हेतु मध्यबिन्दु में से मध्यमान के मूल्य को घटाते हैं। ($x' = \text{X} - \text{M}$)

(iv) अनेक विचलनों का सम्बन्धित आवृत्तियों से गुणा करके fx' का मूल्य ज्ञात करते हैं। ($f \times x' = fx'$)

(v) + एवं – संकेतों पर ध्यान दिये बिना fx' को जोड़ करके $\Sigma fx'$ ज्ञात करते हैं।

(vi) $\Sigma fx'$ को आवृत्तियों की कुल संख्या (N) से भाग देकर भागफल ज्ञात करते हैं जो कि मध्यमान विचलन (M.D.) होता है।

Score	f	Mid Point (X)	x'-	fx'
195–199	1	197	26.20	26.20
190–194	2	192	21.20	42.40
185–189	4	187	16.20	64.80
180–184	5	182	11.20	56.00
175–179	8	177	6.20	49.60
170–174	10	172	1.20	12.00
165–169	6	167	–3.80	–22.80
160–164	4	162	–8.80	–35.20
155–159	4	157	–13.80	–55.20
150–154	2	152	–18.80	–37.60
145–149	3	147	–23.80	–71.40
140–144	1	142	–28.80	–28.80
	N = 50			**502.00**

हल (Solution) :

यहाँ पर दीर्घ विधि से

$$\text{मध्यमान (M)} = \frac{\Sigma fx}{N} = 170.80$$

$$\Sigma|fx'| = 502.00, \text{N} = 50 \text{ है।}$$

इस प्रकार,

$$\text{MD} = \frac{\Sigma|fx'|}{N} = \frac{502}{50} = 10.04$$

$$\text{MD} = 10.04$$

उत्तर

अव्यवस्थित अंक सामग्री से चतुर्थांश विचलन की गुणा
(Calculation of Quartil deviation from Ungrouped Data)

अव्यवस्थित अंक सामग्री से चतुर्थांश विचलन ज्ञात करने हेतु निम्नवत् सूत्र का उपयोग होता है—

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

यहाँ पर

$$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right) \text{th score}$$

$$Q_3 = \left[\frac{3(N+1)}{4}\right] \text{th score}$$

N = प्राप्तांकों की संख्या

चतुर्थांश विचलन की गणना के चरण
(Steps for calculation of Quartile deviation)

(i) चतुर्थांश विचलन की गणना करने हेतु सबसे पहले अव्यवस्थित अंक सामग्री को व्यवस्थित करते हैं।
(ii) दिये गये सूत्र के अनुसार Q_1 की गणना करते हैं।
(iii) इसके बाद Q_3 की गणना करते हैं।
(iv) Q_3 के मान में से Q_1 के मान को घटाकर 2 से भाग देकर Q का मान निकाल लेते हैं।
(v) Q_1 तथा Q_3 की गणना करने हेतु N का मूल्य मालूम होना जरूरी है।

उदाहरण (Illustration)

नीचे दिये गये अव्यवस्थित अंकों का चतुर्थांश विचलन निकालिए—

Item No.	Score	
1	17	
2	18	
3	19	$\longrightarrow Q_1$ = 3rd Score
4	22	
5	24	
6	25	
7	28	
8	30	
9	31	$\longrightarrow Q_3$ = 9th Score
10	32	
11	33	

हल (Solution) :

दिये गये सूत्र के अनुसार सबसे पहले Q_1 एवं Q_3 का मान निकालते हैं।

$$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right) \text{th score} = \frac{11+1}{4} = \frac{12}{4} = 3\text{rd score} = 19$$

$$Q_3 = \left[\frac{3(N+1)}{4}\right] \text{th score} = \left[\frac{3(11+1)}{4}\right]$$

$$= \frac{3 \times 12}{4} = \frac{36}{4} = 9\text{th score} = 31$$

इस प्रकार Q_1 का मान = 3rd Score 19 है एवं Q_3 का मान = 9th Score = 31 है।

अत: $$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{31 - 19}{2} = \frac{12}{2} = 6$$ उत्तर

प्र.3. मध्यमान विचलन को विस्तार से समझाइए।
Explain mean deviation in detail.

उत्तर

मध्यमान विचलन का अर्थ एवं परिभाषा
(Meaning and Definition of Mean Deviation)

किसी समूह के प्राप्तांकों के विचलन के विस्तार की अपेक्षा बेहतर रूप में प्राप्त करने के लिए उस समूह के मध्यमान को आधार मानकर उससे प्राप्तांकों के विचलनों के औसत को लिया जाता है और इसे मध्यमान विचलन कहा जाता है। इस मध्यमान विचलन को हम निम्नलिखित रूप में परिभाषित कर सकते हैं—

'किसी समूह के प्राप्तांकों के मध्यमान से विचलनों के औसत को मध्यमान विचलन कहते हैं।'

मध्यमान विचलन ज्ञात करने की विधियाँ (Calculation Methods of Mean Deviation)

हम जानते हैं कि मध्यमान से प्राप्तांकों का विचलन दोनों ओर समान होता है इसलिए उनका योग सदैव शून्य होता है पर मध्यमान विचलन निकालते समय हम मध्यमान से अन्य प्राप्तांकों के विचलनों को + अथवा – में व्यक्त न करके केवल मापक (Modules) संख्याओं के रूप में व्यक्त करते हैं और उन सबके योग का औसत निकालते हैं। धन और ऋण चिह्नों का ध्यान रखे बिना विचलनों के योग को $\Sigma|d|$ से व्यक्त किया जाता है। हम जानते हैं कि छात्रों की संख्या को हम N से प्रकट करते हैं। इसलिए—

मध्यमान विचलन (M.D.) $= \frac{\Sigma|d|}{N}$

उदाहरण—निम्नांकित समूह के प्राप्तांकों का मध्यमान विचलन ज्ञात कीजिए—

समूह X :	10	12	1	9	8
समूह Y :	3	6	14	4	3

हल—

समूह (X) का मध्यमान $= \frac{10 + 12 + 1 + 9 + 8}{5} = \frac{40}{5} = 8$

$\therefore$ समूह (X) के प्राप्तांकों का मध्यमान से विचलन $= |10 - 8| |12 - 8| |1 - 8| |9 - 8| |8 - 8|$
$= 2 \;\; 4 \;\; 7 \;\; 1 \;\; 0$

$\therefore$ $\Sigma|d| = 2 + 4 + 7 + 1 + 0 = 14$

$\therefore$ मध्यमान विचलन, (M.D.) $= \frac{\Sigma|d|}{N} = \frac{14}{5} = 2.8$

समूह (Y) का मध्यमान $= \frac{3 + 6 + 14 + 4 + 3}{5} = \frac{30}{5} = 6$

$\therefore$ समूह (Y) के प्राप्तांकों का मध्यमान से विचलन $= |3 - 6| |6 - 6| |14 - 6| |4 - 6| |3 - 6|$
$= 3 \;\; 0 \;\; 8 \;\; 2 \;\; 3$

$\therefore$ $\Sigma|d| = 3 + 0 + 8 + 2 + 3 = 16$

$\therefore$ मध्यमान विचलन, (M.D.) $= \frac{\Sigma|d|}{N} = \frac{16}{5} = 3.2$

इस प्रकार समूह (X) को अपेक्षा समूह (Y) में मध्यमान विचलन अधिक है, जिससे यह स्पष्ट होता है कि समूह (Y) की अपेक्षा समूह (X) अधिक सजातीय है।

मध्यमान विचलन विस्तार की अपेक्षा अधिक विश्वसनीय और उपयोगी होता है। ऊपर के उदाहरण में ही देखिए। इसमें समूह (X) तथा (Y) दोनों का विस्तार समान (11) है जिससे दोनों समूह के बारे में समान होने का ज्ञान होता है पर मध्यमान विचलन से उनकी आन्तरिक असमानता का ज्ञान हो जाता है पर बहुत अधिक विश्वसनीय यह विचलन मान भी नहीं होता क्योंकि इसमें धन और ऋण चिह्नों का ध्यान रखे बिना विचलनों को जोड़ दिया जाता है। ऊपर के उदाहरण में ही देखिए समूह (X) में अधिकतम प्राप्तांकों में समानता है और समूह (Y) में अधिकतर प्राप्तांकों में असमानता है। पर मध्यमान विचलन से इसका ज्ञान नहीं होता।

अब व्यवस्थित आँकड़ों से मध्यमान विचलन की गणना विधि और जान लेनी चाहिए। व्यवस्थित आँकड़ों से मध्यमान विचलन ज्ञात करने के लिए सबसे सरल विधि से मध्यमान निकाल लिया जाता है। इसके बाद वर्गों के मध्य बिन्दु से इसका विचलन ज्ञात किया जाता है। अब वर्गों की आवृत्तियाँ (f) और मध्यमान से वर्ग के मध्य बिन्दु के विचलन (d) की गुणा की जाती है। इन सबके योग को $\Sigma|fd|$ से प्रकट किया जाता है। $\Sigma|fd|$ को N से भाग देने पर मध्यमान विचलन ज्ञात हो जाता है।

उदाहरण—50 अंकों को हिन्दी योग्यता को एक परीक्षा में 20 छात्रों ने निम्नलिखित अंक प्राप्त किये हैं। उचित वर्ग विस्तार लेकर आवृत्ति वितरण तालिका बनाइए और उनकी सहायता से मध्यमान विचलन ज्ञात कीजिए—

23 15 10 25 16 11 17 8 0 13

17 20 28 17 21 33 7 21 17 3

हल—प्राप्तांकों का विस्तार = (33 – 0) + 1 = 33 + 1 = 34

∴ वर्गान्तर 5 लेना उचित होगा, तब सात वर्ग बनेंगे।

अब चूँकि निम्नतम प्राप्तांक 0 है इसलिए पहला वर्ग 0 से ही शुरू करना होगा।

मध्यमान विचलन ज्ञात करने की आवृत्ति वितरण तालिका

(Tally of Calcualtion of Mean Deviation through Frequency Distribution)

वर्ग	आवृत्तियाँ (f)	मध्य बिन्दु	मध्य बिन्दु से मध्यमान का विचलन $\|d\|$	आवृत्ति × विचलन $\|fd\|$
30–34	1	32	32 – 16.5 = 15.5	15.5
25–29	2	27	27 – 16.5 = 10.5	21.0
20–24	4	22	22 – 16.5 = 5.5	22.0
15–19	6	17	17 – 16.5 = 0.5	3.0
10–14	3	12	12 – 16.5 = 4.5	13.5
5–9	2	7	7 – 16.5 = 9.5	19.0
0–4	2	2	2 – 16.5 = 1.46	29.0
	N = 20			**$\Sigma\|fd\|$ = 123.0**

$$\therefore \quad \text{मध्यमान विचलन} = \frac{\Sigma|d|}{N} = \frac{123}{20} = 6.15$$

मध्यमान विचलन का उपयोग (Use of mean deviation)

मूल्यांकन के क्षेत्र में मध्यमान विचलन विस्तार की अपेक्षा अधिक विश्वसनीय होते हुए भी अधिक उपयोग में नहीं आता क्योंकि इसको गणना में गणितीय नियमों का पालन नहीं किया जाता है और यह अन्तिम छोरों (Extremes) को एक संख्या जो बहुत कम अथवा अधिक होती है, उससे प्रभावित होता है। इसका प्रयोग तभी किया जाता है—

1. जब निदर्श (Sample) छोटा होता है।
2. जब प्रयोगकर्ता को गणित का ज्ञान कम होता है।
3. जब साधारण विश्वसनीयता की ही आवश्यकता होती है।
4. जब समूह के प्राप्तांक बहुत अधिक फैले हुए होते हैं अर्थात् जब प्राप्तांक मध्यमान से असामान्य रूप में विचलन रखते हैं। उस स्थिति में अन्य प्रकार के विचलन मान समूहों के बारे में मध्यमान विचलन से अधिक शुद्ध सूचना नहीं दे पाते।

प्र.4. प्रामाणिक विचलन का अर्थ तथा परिभाषा बताइए। इसकी गणना कैसे की जाती है?
What is the meaning and definition of standard deviation. How does it calculate?

उत्तर

प्रामाणिक विचलन
(Standard Deviation)

प्रामाणिक विचलन अपकिरण की सबसे महत्त्वपूर्ण माप है तथा यह विस्तार (Range) चतुर्थक विचलन एवं माध्य विचलन की तुलना में अधिक वैज्ञानिक शुद्ध है। इसी कारण इसका प्रयोग सबसे अधिक होता है। प्रामाणिक विचलन का प्रयोग सबसे पहले कार्ल पियर्सन ने किया था। इसी कारण प्रामाणिक विचलन के आधार सूत्र को कार्ल पियर्सन का सूत्र कहते हैं।

परिभाषा—प्रामाणिक विचलन पद या मूल्यों के मध्य से निकाले गये विचलनों के वर्गों के औसत का वर्गमूल होता है।''

माध्य विचलन में एक त्रुटि यह है कि ऋणात्मक संख्याओं को धनात्मक बनाना पड़ता है। इसी कमी को दूर करने के लिए $x - m$ को धनात्मक बनाने के बदले इनका वर्ग लिया जाता है, जो सदैव ही धनात्मक होता है। मानक विचलन को S.D. अथवा Sigma से भी निरूपित करते हैं। मानक विचलन के वर्ग को प्रसरण कहते हैं।

$$\text{S.D.} = \sqrt{\frac{\Sigma(X-m)^2}{N}}$$

जहाँ X = समंक
m = समान्तर माध्य
n = समंकों की संख्या

यदि समंकों का बारम्बारता बण्टन बनाया जाये तो,

$$\text{S.D.} = \sqrt{\frac{\Sigma(X-m)^2 f}{N}}$$

जहाँ X = समंक
m = बारम्बारता
f = वर्ग की बारम्बारता
n = बारम्बारता का योग

उदाहरण 1. एक से 10 तक अंकों को समान्तर माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कल्पित माध्य विधि—

$$\text{Am} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10} = \frac{55}{10} = 5.5$$

$$\text{S.D.} = \sqrt{\frac{(1-5.5)^2 + (2-5.5)^2 + (3-5.5)^2 + \ldots .(10-5.5)^2}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{(-4.5)^2 + (-3.5)^2 + (-2.5)^2 + \ldots (4.5)^2}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{20.25 + 12.25 + 6.25 + 2.25 + .25 + .25 + 2.25 + 6.25 + 12.25 + 20.25}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{8.25}{10}} = \sqrt{8.25} = 2.87$$

कल्पित माध्य विधि (Assumed Mean Mthod)

संक्षिप्त विधि द्वारा प्रामाणिक विचलन निम्नलिखित सूत्र द्वारा निकाला जाता है—

$$\text{S.D.} = \sqrt{\left(\frac{\Sigma fd^2}{N}\right) - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$$

जहाँ f = विभिन्न वर्गों की आवृत्ति

d = विभिन्न वर्गों का कल्पित मध्यमान से विचलन (वर्ग विस्तार की इकाई में)

i = वर्ग विस्तार, N = कुल आवृत्ति

उदाहरण 2. निम्नलिखित तालिका का प्रामाणिक विचलन ज्ञात कीजिए।

(Calculate the standard deviation of tally)

वर्ग अन्तराल	15–19	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44	45–49	50–54
बारम्बारता	2	3	8	12	10	8	6	1

हल—

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता	$d = \frac{x-A}{i}$	fd	fd^2
50–54	1	4	4	16
45–49	6	3	18	54
40–44	8	2	16	32
35–39	10	1	10	10
			+ 48	
30–34	12	0	0	0
25–29	8	–1	–8	8
20–24	3	–2	–6	12
15–19	2	–3	–6	18
			–20	
$i = 5$	N = 50		$\Sigma fd = 28$	$\Sigma fd^2 = 150$

$$\text{S.D.} = \sqrt{\left(\frac{\Sigma fd^2}{N}\right) - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$$

$$\text{S.D.} = 5 \times \sqrt{\frac{150}{50} - \left(\frac{28}{50}\right)^2} = 5 \times \sqrt{\frac{150}{50} - \frac{28}{50} \times \frac{28}{50}}$$

$$= 5 \times \sqrt{3 - .56 \times .56} = 5 \times \sqrt{3 - .3135}$$

$$= 5 \times \sqrt{2.6864} = 5 \times 1.639 = 8.195$$

प्र.5. माध्य विचलन तथा प्रामाणिक विचलन में अन्तर स्पष्ट कीजिए।

Clarify the difference of mean deviation and standard deviation.

उत्तर

माध्य विचलन और प्रामाणिक विचलन में अन्तर

(Difference of Mean Deviation and Standard Deviation)

मध्यमान विचलन (Mean Deviation)—**हेनरी ई० गैरेट** के शब्दों में, 'प्राप्तांकों के मध्यमान से भिन्न-भिन्न प्राप्तांकों का विचलन ज्ञात किया जाए, फिर धन (+) एवं ऋण (–) चिह्नों पर कोई ध्यान दिये बिना ही मध्यमान (Mean) ज्ञात किया जाए, तो प्राप्त की गयी संख्या माध्य विचलन कहलाती है।'

गिलफोर्ड ने भी लिखा है कि—'मध्यमान विचलन, मध्यमान से भिन्न-भिन्न प्राप्तांकों के विचलनों का मध्यमान है जबकि धन एवं ऋण चिह्नों को ध्यान में न रखा गया हो। यह विचलन प्रसार एवं चतुर्थांश विचलन (Q.D.) दोनों की अपेक्षा अधिक उपयुक्त होता है, क्योंकि प्रसार में बीच के अंकों को कोई महत्त्व नहीं दिया जाता और चतुर्थांश विचलन में भी केवल मात्र कुछ ही प्राप्तांकों

को महत्त्व दिया जाता है। इस मध्यमान विचलन का संकेत चिह्न M.D. या A.D. है। मध्यमान विचलन मध्यांक अर्थात् मध्यमान से विचलन का मापक है।'

प्रामाणिक विचलन (Standard Deviation)—**जेम्स ड्रेवर** के अनुसार, 'दिये हुए प्राप्तांकों के मध्यमान से प्राप्तांकों को विचलनों के वर्गों में मध्यमान का वर्गमूल हो प्रामाणिक विचलन है।' स्पष्ट है कि यदि दिए हुए प्राप्तांकों के मध्यमान से प्राप्तांकों का विचलन ज्ञात किया जाए (विचलन ज्ञात करते समय धन एवं ऋण के चिह्नों का ध्यान नहीं दिया जाता है), प्रत्येक विचलन का वर्ग किया जाए फिर इन वर्गों को जोड़कर, उनको संख्या से भाग देकर प्राप्त संख्या का वर्गमूल निकालने से जो भी संख्या प्राप्त होती है, उसे ही हम प्रामाणिक विचलन कहते हैं। इसका संकेत चिह्न S.D. या ग्रीक अक्षर, 'सिग्मा' है। माध्य विचलन और प्रामाणिक विचलन के अन्तर को समझने के लिए हमें इन दोनों की विशेषताओं को भी समझना होगा—

माध्य विचलन की विशेषताएँ (Features of Mean Deviation)—1. इसकी गणना पर सभी प्राप्तांकों का प्रभाव पड़ता है। अतएव कहा जा सकता है कि यह अंक वितरण का पूर्ण प्रतिनिधित्व करता है। 2. इसकी गणना भी अत्यधिक सरल है, अत: इसके स्वरूप को सरलतापूर्वक समझा जा सकता है। 3. मध्यमान की गणना सीमान्त अंक (Extreme Score) से कम प्रभावित होती है।

प्रामाणिक विचलन की विशेषताएँ (Features of Standard Deviation)—1. प्रामाणिक विचलन वितरण के प्रत्येक अंक से प्रभावित होता है। सर्वाधिक प्रभावित करने वाले प्राप्तांक सीमान्त प्राप्तांक होते हैं।

2. प्रामाणिक विचलन एक संख्या है। मूल प्राप्तांकों की इकाई ही प्रामाणिक विचलन की इकाई होती है। उदाहरणार्थ यदि किन्हीं प्राप्तांकों की इकाई सेन्टीमीटर है, तो प्रामाणिक विचलन की इकाई भी सेन्टीमीटर ही होगी।
3. प्रामाणिक विचलन को न्यादर्श की भिन्नता बहुत अधिक प्रभावित नहीं करती है।
4. वर्णनात्मक सांख्यिकी में जेब प्राप्तांकों को जोड़ा जाता है, तभी प्रामाणिक विचलन ज्ञात हो सकता है, जैसे मध्यमान क्रमिक अथवा वर्गीय स्तर के प्राप्तांकों का प्रामाणिक विचलन ज्ञात करना अधिक उपयुक्त नहीं होता।
5. यह सामान्य सम्भाव्यता वक्र (N.P.C.) का मुख्य आधार है।

माध्य विचलन का उपयोग करना (Use of Mean Deviation)—1. जब आँकड़े इतने अधिक बिखरे हुए हों कि प्रामाणिक विचलन के अशुद्ध निकलने की आशंका उपस्थित हो। 2. जब साधारण शुद्धता की आवश्यकता हो। 3. जब प्राप्तांकों का वितरण लगभग सामान्य हो। 4. जब वितरण के प्रत्येक प्राप्तांक को उसके आकार के अनुसार ही महत्त्व प्रदान करना हो। 5. जब वितरण के मध्यमान के दोनों ओर विचलन ज्ञात करना हो। 6. जब वितरण के मध्यमान के दोनों ओर के प्राप्तांकों को समान रूप से विचलन ज्ञात करना हो।

प्रामाणिक विचलन का उपयोग करना (Use of Standard Deviation)—1. जब मूल प्राप्तांकों को किन्हीं प्रमाणित प्राप्तांकों में बदलते हो। 2. जब रेखीय सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना करनी हो। 3. जब सामान्य सम्भाव्यता वक्र का अध्ययन करना हो। 4. जब सांख्यिकी अन्तरों की सार्थकता को ज्ञात करना हो। 5. जब विचलन गुणांक एवं प्रामाणिक त्रुटि का अध्ययन करना हो। 6. मनोमिति में भी इसका बहुत उपयोग होता है। 7. समूहों की जातीयता और विषम जातीयता का अध्ययन करना हो।

प्रामाणिक विचलन का प्रयोग निम्नलिखित दशाओं में करना चाहिए (The use should be of Standard Deviation in Following Condition)—1. जब प्राप्तांकों का वितरण सामान्य हो। 2. जब अत्यधिक शुद्ध एवं विश्वसनीय विचलन माप की गणना करनी हो। 3. जब केन्द्रीय मापकों में मध्यमान की गणना की गयी हो। 4. जब सह-सम्बन्ध और मानक त्रुटि की गणना करनी हो। 5. जब वितरण के सीमान्त प्राप्तांकों को महत्त्व प्रदान करना हो। 6. जब दो अंक वितरणों की तुलनात्मक विवेचना करनी हो, क्योंकि विचलन की गुणांक के लिए M और S.D. दोनों की गणना करनी पड़ती है।

बहुविकल्पीय प्रश्न

प्र.1. मुख्य रूप से विचलन की कितनी मापें होती हैं?

(क) तीन (ख) चार (ग) पाँच (घ) दो

उत्तर (ख) चार

प्र.2. मध्यमान विचलन किसे कहते हैं?

(क) प्रसरण गुणांक (ख) औसत विचलन
(ग) मानक विचलन (घ) चतुर्थांश विचलन

उत्तर (ख) औसत विचलन

प्र.3. ''विचलनशीलता का अर्थ प्राप्तांकों के वितरण या फैलाव से है, यह फैलाव प्राप्तांकों की केन्द्रीय प्रवृत्ति के चारों ओर होता है।'' यह कथन है—

(क) लिण्डक्विस्ट (ख) गिलफोर्ड (ग) फ्रीमैन (घ) गैरिट

उत्तर (घ) गैरिट

प्र.4. मानक विचलन केन्द्रीय प्रवृत्ति का मान है—

(क) असत्य (ख) सत्य

उत्तर (क) असत्य

प्र.5. मानक विचलन का प्रयोग तब करना चाहिए जब अंक वितरण सामान्य हो—

(क) असत्य (ख) सत्य

उत्तर (ख) सत्य

प्र.6. Q_3 का अर्थ है—

(क) 50% (ख) 60% (ग) 75% (घ) 25%

उत्तर (ग) 75%

प्र.7. मध्यमान विचलन का सूत्र है—

(क) $\text{M.D.} = \frac{\Sigma|d|}{N}$ (ख) $\text{M.D.} = \frac{\Sigma Fd}{N}$ (ग) $\text{M.D.} = \frac{\Sigma|d|}{N}$ (घ) $\text{M.D.} = \frac{\Sigma Fd^2}{N}$

उत्तर (ग) $\text{M.D.} = \frac{\Sigma|d|}{N}$

प्र.8. चतुर्थांश विचलन किसी श्रृंखला को बराबर भागों में विभाजित करता है—

(क) तीन (ख) चार (ग) पाँच (घ) दो

उत्तर (ख) चार

प्र.9. मानक विचलन माप है—

(क) केन्द्रीय प्रवृत्ति (ख) सह-सम्बन्ध (ग) माध्यिका विधि (घ) विचलन

उत्तर (घ) विचलन

प्र.10. चतुर्थांश विचलन की गणना का सूत्र है—

(क) $\frac{Q - Q_1}{N^2}$ (ख) $Q. (Q.D.) = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$
(ग) $\frac{Q - Q_2}{N^2}$ (घ) $Q (Q.D.) = \frac{Q_3}{2}$

उत्तर (ख) $Q. (Q.D.) = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

प्र.11. 100 प्रेक्षणों के एक समूह का माध्य 20 पाया गया। बाद में यह पाया गया कि तीन अवलोकन गलत थे, जिन्हें 21, 21 और 18 के रूप में दर्ज किया गया था। तो यदि गलत टिप्पणियों को छोड़ दिया जाता है तो इसका मतलब क्या है?

(क) 18 (ख) 20 (ग) 22 (घ) 24

उत्तर (ख) 20

प्र.12. यदि 12 वर्गों के साथ आवृत्ति वितरण तालिका में प्रत्येक वर्ग की चौड़ाई 2 है। 5 और निम्नतम श्रेणी की सीमा 6 है। 1 तो उच्चतम वर्ग की ऊपरी श्रेणी की सीमा क्या है?

(क) 30.1 (ख) 27.6

(ग) 30.6 (घ) 36.1

उत्तर (घ) 36.1

प्र.13. यदि दो चरों के बीच सहसंयोजक 0 है, तो उनके बीच सह-सम्बन्ध गुणांक क्या है?

(क) कुछ भी नहीं कहा जा सकता (ख) 0

(ग) सकारात्मक (घ) नकारात्मक

उत्तर (ख) 0

प्र.14. 19 प्रेक्षणों का औसत 30 है। दो और अवलोकन किये गये हैं और इनके मान 8 और 32 हैं। एक साथ लिए गये 21 अवलोकनों का औसत क्या है?

(क) 28 (ख) 30 (ग) 32 (घ) 34

उत्तर (ख) 30

प्र.15. यदि एक चर असतत मान $x + 4$, $x - 7/2$, $x - 5/2$, $x - 3$, $x - 2$, $x + 1/2$, $x - 1/2$, $x + 5$ लेता है, तो माध्य क्या है?

(क) $x - 5/4$ (ख) $x - 1/2$

(ग) $x - 2$ (घ) $x + 5/4$

उत्तर (क) $x - 5/4$

प्र.16. यदि एक चर असतत मान $x + 4$, $x - 7/2$, $x - 5/2$, $x - 3$, $x - 2$, $x + 1/2$, $x - 1/2$, $x + 5$ (x धनात्मक है) लेता है, तो माध्य क्या है?

(क) $x - 5/4$ (ख) $x - 1/2$ (ग) $x - 2$ (घ) $x + 5/4$

उत्तर (क) $x - 5/4$

प्र.17. फैलाव विधि का माप कौन-सा है?

(क) रेंगे (ख) चतुर्थक विचलन

(ग) माध्य विचलन (घ) ये सभी

उत्तर (घ) ये सभी

प्र.18. यदि $f(x + y, x - y) = xy$ है, तो $f(x, y)$ और $f(y, x)$ का अंकगणितीय माध्य क्या है?

(क) x (ख) y

(ग) 0 (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ग) 0

प्र.19. यदि प्रेक्षणों में से एक शून्य है तो ज्यामितीय माध्य क्या है?

(क) (प्रेक्षण का योग)/n (ख) सभी टिप्पणियों का गुणन

(ग) (सभी प्रेक्षणों का गुणन) $1/n$ (घ) 0

उत्तर (घ) 0

प्र.20. 15 छात्रों के एक बैच में यदि उत्तीर्ण होने वाले 10 छात्रों के अंक 70, 50, 95, 40, 60, 70, 80, 90, 75, 80 हैं तो सभी 15 छात्रों के औसत अंक क्या हैं?

(क) 40 (ख) 50 (ग) 60 (घ) 70

उत्तर (ग) 60

प्र.21. एक वैज्ञानिक 30 मछलियों में से प्रत्येक का वजन कर रहा है। उनका औसत वजन 30 ग्राम है और 2 ग्राम का स्टैंडरियन विचलन है। बाद में यह पाया गया कि मापने के पैमाने को गलत तरीके से संरेखित किया गया था और हमेशा 2 ग्राम तक हर मछली के वजन को कम बताया गया था। मछलियों का सही माध्य और मानक विचलन (ग्राम में) क्रमशः क्या है?

(क) 32, 2 (ख) 32, 4

(ग) 28, 2 (घ) 28, 4

उत्तर (क) 32, 2

प्र.22. यदि पहली n प्राकृतिक संख्याओं का माध्य $5n/9$ है, तो n =—

(क) 5 (ख) 4 (ग) 9 (घ) 10

उत्तर (ग) 9

प्र.23. $2n$ प्रेक्षणों की एक श्रृंखला में उनसे से आधे a के बराबर और शेष आधे बराबर $-a$ के बराबर हैं। यदि प्रेक्षणों का मानक विचलन 2 है, तो बराबर—

(क) $\sqrt{2}/n$ (ख) $\sqrt{2}$ (ग) 2 (घ) $1/n$

उत्तर (ग) 2

प्र.24. यदि निम्नलिखित डेटा का माध्य 20 है। 6, तो p का मान क्या है?

$x = 10\ \ 15\ \ p\ \ 25\ \ 35$

$f = 3\ \ 10\ \ 25\ \ 7\ \ 5$

(क) 30 (ख) 20 (ग) 25 (घ) 10

उत्तर (ख) 20

प्र.25. यदि डेटा का विचरण 121 है तो डेटा का मानक विचलन क्या है?

(क) 121 (ख) 11 (ग) 12 (घ) 21

उत्तर (ख) 11

प्र.26. एक्स पर 15 अवलोकनों के साथ एक प्रयोग में निम्नलिखित परिणाम उपलब्ध थे। $Sx_2 = 2830, Sx = 170$ एक अवलोकन जो 20 था गलत पाया गया और उसे सही मान 30 से बदल दिया गया। सही किया गया विचरण क्या है?

(क) 8, 33 (ख) 78, 00 (ग) 188, 66 (घ) 177, 33

उत्तर (ख) 78, 00

UNIT-VII

सह-सम्बन्ध
Correlation

खण्ड-अ अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. सह-सम्बन्ध का अर्थ बताइए।

Write the meaning of correlation.

उत्तर सह-सम्बन्ध दो या दो से अधिक चरों के बीच सहचर्यात्मक सम्बन्ध होता है। हम सह-सम्बन्ध गुणांक के माध्यम से सांख्यिकी में यह ज्ञात करते हैं कि एक चर पर पड़ने वाला प्रभाव दूसरे चर को किस तरह प्रभावित करता है एवं इस प्रभाव की दिशा क्या है? लेकिन हमें स्पष्टत: यह समझना चाहिए कि सह-सम्बन्ध हमें कार्य-कारण सम्बन्धों के सम्बन्ध में नहीं बताता है। दो परिवर्तियों में कार्य-कारण सम्बन्ध होने पर सह-सम्बन्ध हो सकता है अथवा सह-सम्बन्ध होने पर कार्य-कारण सम्बन्ध हो सकता है, लेकिन हमें सह-सम्बन्ध से इसके सन्दर्भ में ज्ञान प्राप्त नहीं होता। हमें सह-सम्बन्ध सम्बन्धों की गहनता तथा उनकी दिशा के सम्बन्ध में बताते हैं। जैसे + .72 तथा – .72 का सह-सम्बन्ध गुणांक समान आकार अथवा गहनता के सम्बन्ध को दर्शाता है। लेकिन इनकी दिशा भिन्न-भिन्न है। जब दो परिवर्तियों में साथ-साथ बदलाव होता है तो इनसे प्राप्त प्रदत्तों को बाई-वेरियेट प्रदत्त कहा जाता है। इस तरह के प्रदत्त मापों के युग्म के रूप में प्राप्त होते हैं।

प्र.2. स्पीयरमैन सह-सम्बन्ध गुणांक क्या है?

What is Spear/man's coefficient correlation?

उत्तर स्पीयरमैन ने इस विधि का प्रतिपादन किया था इसीलिए इसे स्पीयरमैन विधि के नाम से जाना जाता है। इसे कोटि अन्तर विधि एवं रोह (Rho) के नाम से भी जानते हैं एवं ग्रीक अक्षर p से प्रदर्शित करते हैं। इसका उपयोग तब होता है जब N छोटा हो एवं प्राप्तांकों की गहनता महत्त्वपूर्ण परिवर्ती न हो।

प्र.3. कोटि-अन्तर विधि के गुण लिखिए।

Write the merits of rank-difference method.

उत्तर (i) यह विधि छोटे न्यादर्श की अवस्था में उपयोगी होती है।

(ii) यह विषम जातीय प्रदत्तों में बहुत उपयोगी होती है।

(iii) इस विधि के माध्यम से सह-सम्बन्ध की गणना आसान होती है।

(iv) इसमें वास्तविक अंकों की शुद्धता जरूरी नहीं होती।

प्र.4. कोटि-अन्तर विधि की सीमाएँ लिखिए।

Write the limitations of rank-difference method.

उत्तर (i) इस विधि के माध्यम से ज्ञात सह-सम्बन्ध गुणांक, प्रोडक्ट मोमेण्ट सह-सम्बन्ध गुणांक से कम होता है।

(ii) जब न्यादर्श बड़ा हो तो इसका प्रयोग नहीं हो सकता।

(iii) वास्तविक गुणों की मात्रा का क्रमों से ज्ञान नहीं होता।

खण्ड-ब लघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. सह-सम्बन्ध की परिभाषाएँ दीजिए।

Give the definitions of correlation.

उत्तर

सह-सम्बन्ध की परिभाषाएँ
(Definitions of Correlation)

सह-सम्बन्ध की विभिन्न विद्वानों ने निम्नलिखित परिभाषाएँ दी हैं—

इंगलिश एवं इंगलिश (English and English) के अनुसार, "सह-सम्बन्ध एक प्रकार का सम्बन्ध अथवा आश्रितता है। सह-सम्बन्ध इस तथ्य की ओर संकेत करता है कि दो वस्तुएँ अथवा चर इस प्रकार सम्बन्धित हैं कि एक में परिवर्तन होने के साथ-साथ दूसरे में भी समरूप अथवा समानान्तर परिवर्तन होता है।"

लैथरॉप (Lathrop) के अनुसार, "सह-सम्बन्ध दो चरों में पाये जाने वाले संयुक्त सम्बन्ध की ओर संकेत करता है।"

एडवर्ड (Edward) के अनुसार, "सह-सम्बन्ध गुणांक को X तथा Y के सह-प्रसरण को X एवं Y के प्रसरण के गुणनफल के वर्गमूल में विभाजित करने पर प्राप्त भजनफल के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।"

गिलफोर्ड (Guilford) के अनुसार, "सह-सम्बन्ध गुणांक एक ऐसी संख्या है, जो हमें यह सूचित करती है कि दो वस्तुएँ किस सीमा तक सम्बन्धित हैं तथा एक में होने वाले विचलनों का दूसरे के विचलनों पर किस सीमा तक प्रभाव पड़ता है।"

वोलमैन (Wolman) के अनुसार, "यह-सम्बन्ध एक सहगामी परिवर्तन है, वह सीमा जिस सीमा तक दो परिवर्ती साथ-साथ परिवर्तित होते हैं।"

फरग्यूसन (Ferguson) ने सह-सम्बन्ध को परिभाषित करते हुए कहा है कि "सह-सम्बन्ध का उद्देश्य दो चरों के मध्य पाये जाने वाले सम्बन्ध की मात्रा का वर्णन करना है।"

उपरोक्त सभी परिभाषाओं से स्पष्ट होता है कि दो चरों में प्राप्त सम्बन्ध को सह-सम्बन्ध कहा जाता है। इसमें इस तरह के सम्बन्ध का अध्ययन होता है, जिसके अन्तर्गत एक चर में वृद्धि अथवा अवनति दूसरे चर में होने वाली वृद्धि अथवा अवनति को सूचित करती है। इसके माध्यम से इस बात का अध्ययन किया जाता है कि व्यक्ति अथवा वस्तुएँ एक दिशा में अगर औसत, औसत से कम अथवा अधिक हैं तो दूसरी दिशा में उनकी प्रवृत्ति क्या है अर्थात् औसत, औसत से कम अथवा अधिक हैं। अगर माता-पिता के बौद्धिक स्तर के उच्च होने से बालकों का बौद्धिक स्तर भी उच्च होता है तो यह कहा जा सकता है कि यह दोनों चर परस्पर सम्बन्धित हैं। अगर थकान के बढ़ने से कार्य का उत्पादन कम होता है तो इन दोनों में सह-सम्बन्ध है। सह-सम्बन्ध की मात्रा को सह-सम्बन्ध गुणांक के माध्यम से दर्शाया जाता है। इसे ρ (रो) से भी प्रदर्शित करते हैं।

प्र.2. सह-सम्बन्ध गुणांक के उपयोगों को बताइए।

To state the uses of coefficient of correlation.

उत्तर

सह-सम्बन्ध गुणांक के उपयोग
(Uses of Coefficient-Correlation)

मनोविज्ञान एवं शिक्षा में सह-सम्बन्ध गुणांक के उपयोग निम्नलिखित हैं—

(i) सह-सम्बन्ध की मदद से दो चरों के गुणों, क्षमताओं या विशेषताओं की प्रकृति तथा मात्रा के सम्बन्ध में जानकारी प्राप्त की जा सकती है।

(ii) सह-सम्बन्ध की मदद से किसी गुण अथवा व्यवहार विशेष से सम्बन्धित पूर्व कथन किया जा सकता है।

(iii) कारक विश्लेषण हेतु सह-सम्बन्ध गुणांकों की गणना की जाती है।

(iv) सह-सम्बन्ध गुणांक का सबसे अधिक उपयोग मनोवैज्ञानिक परीक्षणों के निर्माण में होता है। परीक्षणों की वैधता, विश्वसनीयता इत्यादि के लिए सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना करना जरूरी होता है।

(v) अनुसन्धान का एक वर्ग ही सह-सम्बन्धात्मक अनुसन्धान कहलाता है।

सह-सम्बन्ध गुणांक के उपयोग
(Use of Coefficient-Correlation)

सह-सम्बन्ध गुणांक का मान	मान की व्याख्या
1. 0.00 से + .20 तक	धनात्मक बहुत कम (slight)
2. + .20 से + .40 तक	धनात्मक निम्न (low)
3. + .40 से + .70 तक	धनात्मक सामान्य (moderate)
4. + .70 से + .90 तक	धनात्मक उच्च (high)
5. + .90 से 1.00 तक	धनात्मक अति उच्च (very high)

इसी तरह ऋणात्मक सह-सम्बन्ध गुणांक की व्याख्या की जा सकती है।

सह-सम्बन्धों की व्याख्या

सह-सम्बन्ध गुणांक की मात्रा	व्याख्या
.00 से ± .20 तक	नगण्य सह-सम्बन्ध
± .20 से ± .40 तक	कम सह-सम्बन्ध
± .40 से ± .70 तक	सामान्य सह-सम्बन्ध
± .70 से ± .99 तक	उच्च सह-सम्बन्ध
± 1.00	पूर्ण सह-सम्बन्ध

प्र.3. सह-सम्बन्ध की अवधारणा का उल्लेख कीजिए।
Explain the concept of correlation.

उत्तर

सह-सम्बन्ध की अवधारणा
(Concept of Correlation)

वैज्ञानिक विषयों की प्रमुख विशेषता भविष्य कथन अथवा पूर्वानुमान है। एक विषय जितना ज्यादा विकसित अथवा वैज्ञानिक पद्धति पर आधारित होता है, उसमें प्राय: उतनी ही ज्यादा भविष्य-कथन की शक्ति है। भविष्य कथन की क्षमता भौतिक विज्ञान के क्षेत्र में दूसरे विषयों की अपेक्षा सर्वाधिक होती है। इसका मुख्य कारण यह है कि भौतिक विज्ञान के क्षेत्र में कार्य-कारण के सम्बन्ध को सामान्यत: सफलतापूर्वक रोका जा सकता है, जबकि मनोविज्ञान तथा शिक्षा के क्षेत्र में कार्य-कारण सम्बन्धों को समझना अपेक्षाकृत अत्यधिक जटिल कार्य है। मानव-व्यवहार एक जटिल प्रक्रिया है एवं उसको प्रभावित करने वाले कारकों तथा चरों का सही-सही पता लगाना भी एक जटिल समस्या है। लेकिन इन समस्याओं के होते हुए भी मनोवैज्ञानिकों ने अपने सिद्धान्तों के सृजन में वैज्ञानिक पद्धति को ही अध्ययन का मुख्य आधार बनाया है और कार्य-कारण सम्बन्धों को समझने हेतु सह-सम्बन्ध विधियों का सहारा लिया जाता है। सह-सम्बन्ध के अर्थ को कुछ उदाहरणों की मदद से समझ सकते हैं। चरों के सह-सम्बन्ध को निम्नवत् उदाहरणों द्वारा प्रदर्शित किया गया है—

1. प्रधानाध्यापक की नेतृत्व शैली का विद्यालय के शैक्षिक वातावरण पर प्रभाव।
2. छात्रों के मानसिक स्वास्थ्य का शैक्षिक उपलब्धि पर प्रभाव।
3. छात्रों के अभिप्रेरणा स्तर तथा अधिगम प्रक्रिया में सम्बन्ध।
4. बौद्धिक स्तर तथा सृजनात्मकता का सम्बन्ध।
5. अभिभावकों की सामाजिक-आर्थिक दशा का बच्चों का शैक्षिक उपलब्धि पर प्रभाव।
6. अध्यापकों के मानसिक स्वास्थ्य का रोजगार सन्तुष्टि पर प्रभाव।
7. छात्रों की शैक्षिक उपलब्धि तथा सृजनात्मक क्षमता का सम्बन्ध।

निष्कर्षत: स्पष्ट है कि मनोविज्ञान एवं शिक्षा के क्षेत्र में सह-सम्बन्ध की गणना सबसे अधिक महत्त्व रखती है। इस सम्बन्ध में **डब्ल्यू० एल० समनेर** ने लिखा है, "सह-सम्बन्ध मनोवैज्ञानिक परीक्षक के लिए उतना ही महत्त्वपूर्ण है, जितना कि रसायनशास्त्री के लिए उसकी तराजू है।"

प्र.4. कोटि-अन्तर विधि द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए।

Explain the computing coefficient of correlation by rank-difference method.

उत्तर

कोटि-अन्तर विधि द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना

(Computing Coefficient of Correlation by Rank-Difference Method)

कोटि-अन्तर विधि द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक का चिह्न ρ है, जिसका उच्चारण रोह (Rho) होता है। इसका निम्नलिखित सूत्र है—

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2 - 1)}$$

जहाँ $D =$ कोटियों का अन्तर

$D^2 =$ कोटियों के अन्तर का वर्ग

$N =$ पदों की संख्या

इस विधि से सह-सम्बन्ध निकालने हेतु निम्नांकित चरणों का पालन करना पड़ता है—

(i) सबसे पहले दोनों चरों पर भिन्न-भिन्न कोटि क्रम दिये जाते हैं।

(ii) कोटि क्रम देते समय जिस व्यक्ति के अंक सर्वाधिक हों उसे प्रथम क्रम, उससे कम वाले को द्वितीय क्रम इत्यादि। लेकिन यह क्रम हमेशा अधिक अंक पाने वाले को प्रथम क्रम के रूप में नहीं होता। परिवर्ती की प्रकृति के आधार पर यह दिये जाते हैं। जैसे—गति अथवा त्रुटियों की अवस्था में सर्वाधिक कम मूल्य वाले अंक को प्रथम क्रम, उससे ज्यादा वाले को तृतीय क्रम इत्यादि दिया जाता है।

(iii) R_1 (प्रथम परिवर्ती पर कोटि क्रम) पूर्ण करने के बाद R_2 की गणना की जाती है।

(iv) R_1 में से R_2 को घटाकर D ज्ञात करते हैं।

(v) D के मूल्यों का वर्ग ज्ञात कर D^2 निकाला जाता है।

(vi) D^2 के मूल्यों को जोड़कर मूल्यों को सूत्र में रखकर ρ ज्ञात किया जाता है।

खण्ड-स विस्तृत उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. सह-सम्बन्ध के प्रकारों का वर्णन कीजिए।

Describe the kinds of correlation.

उत्तर

सह-सम्बन्ध के प्रकार

(Kinds of Correlation)

सह-सम्बन्ध मुख्य रूप से दो प्रकार का होता है—

1. **गुणात्मक सह-सम्बन्ध** (Qualitative Correlation)—
   - (i) रेखीय (Linear)
   - (ii) वक्रात्मक (Curvilinear)
2. **मात्रात्मक सह-सम्बन्ध** (Quantitative Correlation)—
   - (i) धनात्मक सह-सम्बन्ध (Positive Correlation)
   - (ii) ऋणात्मक सह-सम्बन्ध (Negative Correlation)
   - (iii) शून्य सह-सम्बन्ध (Zero Correlation)

1. गुणात्मक सह-सम्बन्ध (Qualitative Correlation)

(i) **रेखीय सह-सम्बन्ध** (Linear Correlation)—जब रेखाचित्र में स्तम्भों तथा पंक्तियों के औसत अंक एक ही रेखा में पड़ें तो उनमें रेखीय सह-सम्बन्ध होता है। अगर दो चरों में रेखीय सह-सम्बन्ध है तो रेखाचित्र में दोनों चरों के औसत अंक एक सरल रेखा में पड़ते हैं। जैसे—अगर हम किसी एक चर X से विभिन्न औसत अंक लें तथा इन्हें ग्राफ पर लिख

लें तो ये औसतांक एक सरल रेखा पर पड़ेंगे। इसी तरह दूसरे चर Y के औसतांकों को रेखाचित्र में लिखने पर भी वे एक रेखा में पड़ेंगे। अत: हमें दो प्रतिगमन रेखाएँ प्राप्त होती हैं। अगर दोनों चरों X तथा Y में + 1.00 का सह-सम्बन्ध है तो ये प्रतिगमन रेखाएँ परस्पर समाहित हो जाती हैं तथा केवल एक ही प्रतिगमन रेखा प्राप्त होती है। दो चरों में रेखीय सह-सम्बन्ध होने पर पियर्सन प्रोडक्ट मोमेण्ट सह-सम्बन्ध विधि का उपयोग होता है जिसे अक्षर 'r' से प्रदर्शित किया जाता है।

(ii) **वक्रात्मक सह-सम्बन्ध** (Curvilinear Correlation)—जब दो परिवर्तियों में होने वाला बदलाव एक सीमा तक एक दिशा में हो पर उसके बाद उनकी दिशा बदल जाए अर्थात् वे विपरीत दिशा में बढ़ने लगें तो उन दोनों में वक्रात्मक सह-सम्बन्ध होता है। जैसे—अगर हम देखें तो चिन्ता (Anxiety) की मात्रा तथा उत्पादन में हमें ऐसा सह-सम्बन्ध दिखाई देता है। निम्न चिन्ता होने पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता, मध्यम चिन्ता होने पर उत्पादन में वृद्धि होने लगती है पर चिन्ता की मात्रा एक सीमा से ज्यादा होने पर उत्पादन पर विपरीत प्रभाव पड़ता है। निष्कर्षत: कह सकते हैं कि चिन्ता तथा उत्पादन में वक्रात्मक सह-सम्बन्ध है।

2. मात्रात्मक सह-सम्बन्ध (Quantitative Correlation)

(i) **धनात्मक अथवा सकारात्मक सह-सम्बन्ध** (Positive Correlation)—जब दो चरों में से एक चर की मात्रा बढ़ने से दूसरे चर की मात्रा भी बढ़ने लगती है या एक चर की मात्रा घटने पर दूसरे चर की मात्रा भी घटने लगती है तो इस तरह के चरों के बीच सम्बन्ध को धनात्मक अथवा सकारात्मक सह-सम्बन्ध कहा जाता है। दूसरे शब्दों में, जब एक चर में होने वाला बदलाव दूसरे चर को भी उसी दिशा में प्रभावित करता है तो दोनों चरों का सह-सम्बन्ध धनात्मक सह-सम्बन्ध कहलाता है। अगर उच्च बुद्धि लब्धि (I.Q.) वाले विद्यार्थियों के परीक्षा में अच्छे अंक व निम्न बुद्धि लब्धि वाले विद्यार्थियों के निम्न अंक आते हैं तो यह धनात्मक सह-सम्बन्ध होगा। निम्नलिखित चित्र से यह बात स्पष्ट होती है—

'अ' चर	**'ब' चर**		**'अ' चर**	**'ब' चर**
↓	↓	अथवा	↓	↓
उन्नति	उन्नति		अवनति	अवनति

इंगलिश एवं **इंगलिश** (English and English) ने लिखा है कि "धनात्मक सह-सम्बन्ध दो चरों के मध्य ऐसा सम्बन्ध है कि एक चर के उच्च मान दूसरे चर के उच्च मानों से जुड़े होते हैं तथा एक चर के निम्न मान दूसरे चर के निम्न मानों से जुड़े होते हैं।"

गैरेट (Garrett) के अनुसार, "एक धनात्मक सह-सम्बन्ध यह सूचित करता है कि एक चर की उच्च मात्राएँ दूसरे चर की उच्च मात्राओं का साथ देती हैं।"

निष्कर्षत: कह सकते हैं कि धनात्मक सह-सम्बन्ध से हमारा आशय दो चरों के बीच इस तरह के सह-सम्बन्ध से होता है, जिसमें दोनों चरों में बदलाव एक दिशा में होता है अर्थात् अगर वृद्धि होती है तो दोनों ही चरों में, अगर अवनति होती है तो दोनों ही चरों में होती है।

(ii) **ऋणात्मक अथवा नकारात्मक सह-सम्बन्ध** (Negative Correlation)—जब दो चरों में से एक चर की मात्रा में वृद्धि होने लगती है तथा दूसरे चर की मात्रा घटने लगती है या जब पहले चर की मात्रा घटती है व दूसरे चर की मात्रा बढ़ती है तो इस तरह के दोनों चरों के बीच ऋणात्मक अथवा नकारात्मक सह-सम्बन्ध होता है। दूसरे शब्दों में, कह सकते हैं कि जब एक चर का बदलाव दूसरे चर में बदलाव उसी दिशा में न करके विपरीत दिशा में करता है तो इसे ऋणात्मक सह-सम्बन्ध कहते हैं। उदाहरण हेतु—अगर कार्य की गति बढ़ती है तो उसमें शुद्धता की मात्रा घटती है। अत: कार्य व गति में ऋणात्मक सह-सम्बन्ध होता है। थकान की मात्रा बढ़ने से कार्योत्पादन कम होता है। निम्नलिखित चित्र से यह बात स्पष्ट होती है—

'अ' चर	**'ब' चर**		**'अ' चर**	**'ब' चर**
↓	↓	अथवा	↓	↓
उन्नति	अवनति		अवनति	उन्नति

वोलमैन (Wolman) ने इस तरह के सह-सम्बन्ध को समझाते हुए कहा है कि "ऋणात्मक सह-सम्बन्ध दो चरों के मध्य वह सम्बन्ध है, जिसमें एक चर के बढ़ते हुए मानों का सम्बन्ध दूसरे चर के घटते हुए मानों से होता है।"
गैरेट (Garrett) ने लिखा है कि "ऋणात्मक सह-सम्बन्ध वह है, जिसमें एक चर की उच्च मात्रा दूसरे चर की निम्न मात्रा से सम्बन्धित हो सकती है।"
उपरोक्त परिभाषाओं से स्पष्ट है कि ऋणात्मक सह-सम्बन्ध से हमारा आशय सह-सम्बन्ध के उस प्रकार से है, जिसमें एक चर में होने वाली वृद्धि दूसरे चर में होने वाली अवनति से सम्बन्धित होती है। निम्नवत् दो चरों के मूल्यों में अगर सह-सम्बन्ध निकाला जाए तो ऋणात्मक ही होगा—

'अ' चर	'ब' चर
50	22
36	30
52	20
42	32
48	24

(iii) **शून्य सह-सम्बन्ध** (Zero Correlation)—जब एक चर में होने वाली उन्नति अथवा अवनति दूसरे चर की उन्नति अथवा अवनति पर किसी भी तरह का प्रभाव नहीं डालती है या इस प्रकार कह सकते हैं कि जब एक चर में होने वाले बदलाव का दूसरे चर पर कोई प्रभाव नहीं पड़ा रहता है तो यह शून्य सह-सम्बन्ध कहलाता है। उदाहरण हेतु—बालकों के भार का उनकी बुद्धि लब्धि (I.Q.) से कोई सम्बन्ध नहीं है या बालकों के भार के बढ़ने अथवा घटने से उनकी बुद्धि लब्धि पर किसी तरह का प्रभाव नहीं पड़ता है। माता-पिता की आर्थिक अवस्था व उनकी शैक्षिक उपलब्धि किसी भी तरह से सम्बन्धित नहीं है। इस प्रकार दोनों में शून्य सह-सम्बन्ध है। **वोलमैन** (Wolman) ने लिखा है कि "शून्य सह-सम्बन्ध वह सम्बन्ध है, जिसमें कोई सम्बन्ध प्रदर्शित नहीं होता अथवा जिसका सह-सम्बन्ध गुणांक शून्य होता है।"
गैरेट (Garrett) के अनुसार, "शून्य सह-सम्बन्ध कोई भी स्थिर सम्बन्ध सूचित नहीं करता है।"

अत: स्पष्ट होता है कि शून्य सह-सम्बन्ध से हमारा आशय सह-सम्बन्ध के उस प्रकार से है, जिसमें दो चर किसी भी तरह से परस्पर सम्बन्धित नहीं होते हैं।

प्र.2. कार्ल पियर्सन के गुणनफल आघूर्ण विधि का वर्णन कीजिए।
Describe the Karl Pearson's product moment method.

उत्तर

कार्ल पियर्सन का गुणनफल आघूर्ण विधि
(Karl Pearson Product Moment Method)

इस विधि का सबसे पहले उपयोग **कार्ल पियर्सन** ने किया। प्रोडक्ट मोमेण्ट सह-सम्बन्ध एक प्रकार का वह अनुपात है जो एक चर के पारस्परिक अथवा स्वतन्त्र परिवर्तन को दूसरे चर की तरफ बढ़ने की सीमा को व्यक्त करता है।

अवधारणाएँ (Assumptions)—इस विधि की निम्नलिखित अवधारणाएँ हैं—

1. अगर उन आँकड़ों के मानक विचलन (S.D.) को बदल दिया जाए जिनसे इस सह-सम्बन्ध की गणना की गई है तो सह-सम्बन्ध गुणांक भी प्रभावित होता है।
2. जब प्राप्तांकों का वितरण सामान्य सम्भाव्य हो तो इस विधि से सह-सम्बन्ध सबसे अधिक उत्तम होता है।
3. इस सह-सम्बन्ध को अगर ग्राफ पर दर्शाया जाए तो ग्राफ रेखीय (linear) सह-सम्बन्ध दर्शाता है।
4. इस सह-सम्बन्ध की गणना वास्तविक औसतांक विधि व काल्पनिक औसतांक दोनों ही विधियों से हो सकती है।

इसका उपयोग करने हेतु आवश्यक स्थितियाँ—

1. दोनों चरों में सम्बन्ध रेखीय हो।
2. दोनों चरों का मानक विचलन बराबर हो।
3. प्राप्तांकों का वितरण सामान्य हो।
4. प्रतिदर्श (Sample) बड़ा हो।

प्रोडक्ट मोमेण्ट विधि तथा कोटि-अन्तर विधि का उपयोग तथा इनमें अन्तर
(Use and Difference between Product Moment Method and Rank-difference Method)

1. प्रोडक्ट मोमेण्ट विधि सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की बहुत प्रचलित विधि है। इस विधि का उपयोग प्रायः सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना के लिए किया जाता है। कोटि-अन्तर विधि का उपयोग कम होता है। इसका उपयोग तब होता है जब प्राप्तांकों का सापेक्षिक क्रम दिया होता है।
2. शिक्षा-मनोविज्ञान व अन्य विषय के अनुसन्धान कार्यों में दो चर राशियों के मध्य सम्बन्ध ज्ञात करने हेतु प्रोडक्ट मोमेण्ट विधि से 'r' की गणना की जाती है।
3. प्रोडक्ट मोमेण्ट विधि से ज्ञात सह-सम्बन्ध गुणांक के पीयर्सन 'r' कहते हैं, जबकि कोटि-अन्तर विधि के माध्यम से सह-सम्बन्ध गुणांक को ग्रीक अक्षर ρ (rho) से व्यक्त करते हैं।
4. स्पीयरमैन की कोटि-अन्तर विधि एक सरल विधि है। इसका उपयोग शीघ्रता से सुविधापूर्वक सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने हेतु होता है। विशेषतः जब समूह के प्राप्तांकों की संख्या कम होती है तो इस विधि का उपयोग होता है।
5. प्रोडक्ट मोमेण्ट विधि के माध्यम से 'r' की गणना करते समय विचलन इत्यादि निकालने में $\pm$ अथवा $-$ चिह्न का ध्यान रखा जाता है। इस विधि में + अथवा $-$ का ध्यान नहीं रखा जाता है।
6. पीयर्सन 'r' अपेक्षाकृत ज्यादा विश्वसनीय होता है, जबकि कोटि अन्तर विधि के माध्यम से ज्ञात 'ρ' उतना विश्वसनीय नहीं होता है, क्योंकि समूह के प्राप्तांकों के क्रम (rank) को कोटि-अन्तर विधि में महत्त्व दिया जाता है। प्राप्तांक के मूल्य को गणना में महत्त्व नहीं दिया जाता है।

उदाहरण (Illustration) 1

निम्नलिखित आँकड़ों से प्रोडक्ट मोमेण्ट द्वारा सह-सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।

Calculate the co-relation of through product moment from given datas.

हल (Solution) :

x	y	x'	y'	x^2	y^2	$x'y'$
30	72	−8.1	−5.5	66.61	30.25	44.55
34	70	−4.1	−7.5	16.81	56.25	30.75
35	76	−3.1	−1.5	9.61	2.25	4.65
36	80	−2.1	2.5	4.41	6.25	−5.25
39	73	0.9	−4.5	0.81	20.25	−4.05
39	79	0.9	1.5	0.81	2.25	1.35
40	76	1.9	−1.5	3.61	2.25	−2.85
40	83	1.9	5.5	3.61	30.25	10.45
42	85	3.9	7.5	15.21	56.25	29.25
46	81	7.1	3.5	50.41	12.25	24.85
$\Sigma x = 381$	$\Sigma y = 775$			$\Sigma x^2 = 170.90$	$\Sigma y^2 = 218.50$	$\Sigma xy = 133.70$

$M_x = \dfrac{381}{10} = 38.1,$ $\qquad My = \dfrac{775}{10} = 77.5$

$$r = \frac{\Sigma x' y}{\sqrt{\Sigma x^2 \times \Sigma y^2}} = \frac{133.70}{\sqrt{170.90 \times 218.50}}$$

$$= \frac{133.70}{\sqrt{37341.65}} = \frac{133.70}{193.24} = .69$$

उत्तर

उदाहरण (Illustration) 2

निम्नलिखित व्यवस्थित प्रदत्तों से प्रोडक्ट मोमेण्ट विधि से सह-सम्बन्ध की गणना कीजिए—

Calculate correlation through product moment method from given systamatic datas.

	12–13	14–15	16–17	18–19	20–21	20–23	20–25	f_y	y'	fy'	fy'^2	Σxy	Σx
35–37					3 1 3		9 1 9	2	3	6	18	12	4
32–34					2 6 12	4 3 12		9	2	18	36	24	12
29–31		−2 1 −2	−1 2 −2	0 6 0	1 8 8	2 1 2		18	1	18	18	6	6
26–28		0 4 0	0 4 0	0 6 0	0 11 0	0 4 0	0 1 0	30	0	0	0	0	10
20–22	6 3 18	4 2 8	2 1 2	0 1 0				7	−2	14	28	28	−14
f_x	5	8	13	18	30	9	2	85		9	119	78	10

हल (Solution) :

x'	−3	−2	−1	0	1	2	3	
fx'	−15	−16	−14	0	30	8	6	10
fx^2	45	−32	−14	0	30	36	18	174
Σxy	24	8	6	0	19	12	9	78
Σy	−8	−4	−6	−1	19	6	3	9

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fx}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{174}{85} - \left(\frac{10}{85}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2.05 - .01}$$

$$= \sqrt{2.04} = 1.43$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma fy^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fy}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{119}{85} - \left(\frac{9}{85}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1.4 - .01}$$

$$= \sqrt{1.39} = 1.43$$

$$\sigma_x\sigma_y = 1.43 \times 1.43 = 2.04$$

$$r = \frac{\frac{\Sigma xy}{N} - C_xC_y}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{\frac{78}{85} - .11 \times .12}{1.43 \times 1.43}$$

$$= \frac{.918 - .013}{2.04} = \frac{.905}{2.04} = .44$$

1. सबसे पहले Σfx^2 एवं Σfy^2 तक की गणना उसी तरह कीजिए जैसे मानक विचलन की लघु विधि से गणना करते समय की थी।
2. किसी खाने (Column) के संगत x तथा y विचलन की गुणा कीजिए एवं उस खाने की संख्या के दाहिने कोने में उन पर लिख दें। जैसे—प्रथम खाने में x' का विचलन 3 व y' का विचलन भी 3 है इस प्रकार $3 \times 3 = 9$, जो प्रथम खाने में 1 के ऊपर लिख दिया। इसी तरह दूसरी पंक्ति में तीसरे खाने में 6 के ऊपर $2(2 \times 1)$ लिख दिया। ऐसा समस्त खानों में किया।
3. अब प्रत्येक खाने में ऊपर लिखी संख्या से उस खाने की संख्या का गुणा कर बायें कोने में नीचे लिख दिया जैसे $9 \times 1 = 9$ एवं $6 \times 2 = 12$।
4. प्रत्येक पंक्ति में बायें कोने में लिखी संख्या का जोड़ निकाला यह Σxy होगा। जैसे प्रथम पंक्ति में 12, दूसरी पंक्ति में $24(12 + 12)$ व तीसरी पंक्ति में $6(-2 + (-2) + 8 + 2)$ इसी तरह प्रत्येक कॉलम का जोड़ निकाला जो Σxy होगा जैसे $(6 + 18) = 24$, $(-2 + 2 + 8) = 8$ इत्यादि।
5. Σxy का योग निकाला।
6. अब x और y दोनों का मानक विचलन ज्ञात किया। यहाँ पर याद रखना चाहिए कि प्रदत्तों की इकाई वर्गान्तर में होने की वजह से मानक विचलन की गणना करते समय i का गुणा नहीं करते।
7. अब काल्पनिक औसतांक विधि से सह-सम्बन्ध निकालने वाले सूत्र का उपयोग कर r की गणना करते हैं।
8. यह गणना वास्तविक औसतांक विधि अथवा दीर्घ विधि से भी की जा सकती है पर उस अवस्था में गणना क्लिष्ट हो जाती है।

उदाहरण (Illustration) 3

इतिहास एवं भूगोल के अग्रलिखित प्राप्तांकों के बीच कोटि-क्रम विधि द्वारा सह-सम्बन्ध की गणना कीजिए तथा प्राप्त परिणाम की व्याख्या कीजिए—

Calculate and explain the result of correlation through rank-sequence method from given scores of History and Geography.

इतिहास	56	40	72	36	63	47	55	49	38	42	68	60
भूगोल	49	25	60	80	49	28	50	45	15	49	52	55

विधि—कोटि-क्रम विधि अथवा अन्तर स्थिति विधि अथवा स्पीयरमैन विधि की मदद से दो चरों के बीच सह-सम्बन्ध की गणना करते समय निम्नलिखित क्रिया-विधि अपनायी जाती है—

(i) प्रथम चर के प्राप्तांकों के आधार पर क्रम देते हैं अर्थात् सर्वाधिक बड़े प्राप्तांक को एक, उससे छोटे प्राप्तांक को दो व सबसे छोटे प्राप्तांक को अन्तिम क्रम देते हैं। (R_1)

(ii) द्वितीय चर के प्राप्तांकों के आधार पर क्रम देते हैं। (R_2)

(iii) यदि दो अथवा दो से ज्यादा प्राप्तांक समान हैं तो जितने प्राप्तांक समान हैं, उतने क्रमों को जोड़कर प्राप्तांकों की संख्या का भाग देते हैं व प्राप्त परिणाम को समस्त प्राप्तांकों के सामने रखते हैं।

(iv) दोनों क्रमों में अन्तर करते हैं। ($R_1 - R_2 = D$)

(v) D का वर्ग करके योग निकालते हैं। (ΣD^2)

(vii) निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करते हैं—

$$\rho = 1 - \frac{6 \times \Sigma D^2}{N(N^2 - 1)}$$

हल (Solution) :

इतिहास	भूगोल	R_1	R_2	$R_1 - R_2 = D$	D^2
56	49	5	7	−2	4
40	25	10	11	−1	1
72	60	1	2	−1	1
36	80	12	1	11	121
63	49	3	7	−4	16
47	28	8	10	−2	4
55	50	6	5	1	1
49	45	7	9	−2	4
38	15	11	12	−1	1
42	49	9	7	2	4
68	52	2	4	−2	4
60	55	4	3	1	1
					$\Sigma D^2 = 162$

$$\rho = 1 - \frac{6 \times \Sigma D^2}{N(N^2 - 1)}$$

यहाँ पर ρ = कोटि-क्रम विधि द्वारा प्राप्त सह-सम्बन्ध

Σ = योग

$D = R_1 - R_2$

N = प्राप्तांकों की संख्या

$$= 1 - \frac{6 \times 162}{12(12^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 162}{12(144 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 162}{12 \times 143}$$

$$= 1 - \frac{972}{1716} = 1 - .566 = 1 - .57 = \mathbf{.43}$$ उत्तर

व्याख्या—प्राप्त सह-सम्बन्ध गुणांक .43 है, जो कि सकारात्मक व सामान्य सह-सम्बन्ध इतिहास तथा भूगोल के बीच सूचित करता है।

उदाहरण (Illustration) 4

निम्नांकित दस विद्यार्थियों के नागरिकशास्त्र तथा अर्थशास्त्र के प्राप्तांकों में अनुपस्थिति-अन्तर विधि से सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए व परिणाम की व्याख्या कीजिए—

Calculate and explain the result of correlation coefficient through absent-difference method of given ten students get score of Civics and Economics.

विद्यार्थी	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
नागरिकशास्त्र	15	30	20	15	25	10	35	12	10	15
अर्थशास्त्र	25	25	35	25	30	35	40	20	28	25

हल (Solution) :

विद्यार्थी	नागरिकशास्त्र	अर्थशास्त्र	R_1	R_2	D	D^2
A	15	25	5.6	7.5	1.9	3.61
B	30	25	2	7.5	5.5	30.25
C	20	35	4	2.5	1.5	2.25
D	15	25	5.6	7.5	1.9	3.61
E	25	30	3	4	1	1
F	10	35	9.5	2.5	7.0	49
G	35	40	1	1	0	0
H	12	20	8	10	2	4
I	10	28	9.5	5	4.5	20.25
J	15	25	5.6	7.5	1.9	3.61
N = 10						$\Sigma D^2 = 113.97$

$$r = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2 - 1)}$$

सूत्र में मान रखने पर,

$$= 1 - \frac{6 \times 113.97}{10(100-1)} = 1 - \frac{683.82}{10 \times 99} = 1 - \frac{683.82}{990}$$

$$= 990 - \frac{683.82}{990} = \frac{306.18}{990} = +\,0.30$$

व्याख्या—नागरिकशास्त्र तथा अर्थशास्त्र विषय में निम्न धनात्मक सह-सम्बन्ध है।

उदाहरण (Illustration) 5

निम्नांकित X एवं Y विषयों में प्रोडक्ट मोमेण्ट विधि की कल्पित मध्यमान विधि से सह-सम्बन्ध की गणना तथा परिणाम की व्याख्या कीजिए—

Calculate correlation and explain the result of product moment method through assumed mean method in given X and Y subjects.

X	37	40	39	28	42	52	46	37	50	35
Y	41	36	34	45	26	23	28	43	24	32

विधि—(i) X-चर का मध्यमान निकालते हैं। (Mx)

(ii) Y-चर का मध्यमान निकालते हैं। (My)

(iii) X-चर हेतु कल्पित मध्यमान (Assumed Mean) के रूप में एक प्राप्तांक मान लेते हैं। कल्पित मध्यमान को वास्तविक मध्यमान (MX) के पास (छोटे या बड़े) के किस प्राप्तांक को लेना सुविधाजनक रहता है। (AMX)

(iv) Y-चर हेतु कल्पित मध्यमान के रूप में एक प्राप्तांक मान लेते हैं। कल्पित मध्यमान को वास्तविक मध्यमान (MY) के पास (छोटे या बड़े) के किस प्राप्तांक को लेना सुविधाजनक रहता है। (AMY)

(v) X के प्राप्तांकों में से AMX घटाकर विचलन ज्ञात करते हैं। धन व ऋण (+ एवं –) के चिह्नों को लगाना जरूरी है। ($X - AMX = x'$)

(vi) Y के प्राप्तांकों में से AMY घटाकर विचलनों को धन व ऋण के चिह्नों के साथ रखते हैं। ($Y - AMY = y'$)

(vii) x' का वर्ग (x'^2) करके योग निकालते हैं। ($\Sigma x'^2$)

(viii) y' का वर्ग (y'^2) करके योग निकालते हैं। ($\Sigma y'^2$)

(ix) x' का गुणा y' में करके ($x'\,y'$) ज्ञात करते हैं। इनमें धनात्मक व ऋणात्मक विचलनों को भिन्न-भिन्न जोड़कर अधिक वाले में से कम वाला घटा देते हैं। ($\Sigma x'\,y'$)

(x) MX में से AMY घटाकर cx ज्ञात करते हैं। (MX – AMX = cx)

(xi) MY में से AMY घटाकर cy ज्ञात करते हैं। (MY – AMY = cy)

(xii) X चर का मानक विचलन (S.D.) निम्नवत् सूत्र से ज्ञात करते हैं—

$$\sigma x = \sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{N} - c^2{}_x}$$

(xiii) Y चर का मानक विचलन (S.D.) निम्नवत् सूत्र से ज्ञात करते हैं—

$$\sigma y = \sqrt{\frac{\Sigma y'^2}{N} - c^2{}_y}$$

(xiv) निम्नलिखित सूत्र से सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करते हैं—

$$r = \frac{\Sigma xy/N - cxcy}{\sigma x\, \sigma y}$$

हल (Solution) :

X	Y	X – AMY = x'	Y – AMY = y'	x'^2	y'^2	$x'\,y'$ (+ 1) (– 1)
37	41	−3	+ 11	9	121	33
40	36	0	+ 6	0	36	0
39	34	−1	+ 4	1	16	4
28	45	−12	+ 15	144	225	180
42	26	+ 2	−4	4	16	8
52	23	+ 12	−7	144	49	84
46	28	+ 6	−2	36	4	12
37	43	−3	+ 13	9	169	39
50	24	+ 10	−6	100	36	60
35	32	−5	+ 2	25	4	10
406 Σx	**332** Σy			**472** $\Sigma x'^2$	**676** $\Sigma y'^2$	**430** $\Sigma x'y' = $ **−430**

$$Mx = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{406}{10} = \mathbf{40.60}$$

$$My = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{332}{10} = \mathbf{33.20}$$

AMX = **40**; AMY = **30**

$$Cx = MX - AMX = 40.60 - 40.00 = \mathbf{0.60}$$

$$Cy = MY - AMY = 33.20 - 30.00 = \mathbf{3.20}$$

$$\sigma x = \sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{N} - c^2{}_x} \qquad \sigma y = \sqrt{\frac{\Sigma y'^2}{N} - c^2{}_y}$$

$$= \sqrt{\frac{472}{10} - (.6)^2} \qquad\qquad = \sqrt{\frac{676}{10} - (3.20)^2}$$

$$= \sqrt{47.20 - .36} \qquad\qquad = \sqrt{67.60 - 10.24}$$

$$= \sqrt{46.84} = \mathbf{6.84} \qquad\qquad = \sqrt{57.36} = \mathbf{7.57}$$

$$r = \frac{\frac{\Sigma x' y'}{N} - cxcy}{\sigma x \, \sigma y}$$

जहाँ, r = प्रोडक्ट-मोमेण्ट विधि द्वारा सह-सम्बन्ध

Σ = योग

$x' = X - AMX$

$y' = Y - AMY$

C = शुद्धि

σ = प्रमाप विचलन

$$r = \frac{\frac{-430}{10} - (.60 \times 3.20)}{6.84 \times 7.57} = \frac{-43.0 - 1.92}{51.7788}$$

$$= \frac{-44.92}{51.78} = -.867 = -\mathbf{.87}$$

उत्तर

बहुविकल्पीय प्रश्न

प्र.1. सह-सम्बन्ध का कौन-सा प्रकार नहीं है?

(क) ऋणात्मक सह-सम्बन्ध (ख) शून्य सह-सम्बन्ध

(ग) सकारात्मक सह-सम्बन्ध (घ) वर्णनात्मक सह-सम्बन्ध

उत्तर (घ) वर्णनात्मक सह-सम्बन्ध

प्र.2. यदि एक चर में होने वाली वृद्धि दूसरे चर में भी वृद्धि करती है तो यह सह-सम्बन्ध है—

(क) ऋणात्मक (ख) शून्य (ग) धनात्मक (घ) ये सभी

उत्तर (घ) ये सभी

प्र.3. "सह-सम्बन्ध दो चरों में पाये जाने वाले संयुक्त सम्बन्ध की ओर संकेत करता है।" यह परिभाषा किसकी है?

(क) गैरेट की (ख) लैथरॉप की

(ग) फ्रीमैन की (घ) गिलफोर्ड की

उत्तर (ख) लैथरॉप की

प्र.4. सह-सम्बन्ध का प्रयोग कब नहीं करना चाहिए?

(क) जब प्रतिदर्श बड़ा हो (ख) जब प्राप्तांकों का वितरण असामान्य हो

(ग) जब प्राप्तांकों का वितरण सामान्य हो (घ) जब व्यक्तिगत सह-सम्बन्ध की आवश्यकता हो

उत्तर (ख) जब प्राप्तांकों का वितरण असामान्य हो

प्र.5. सह-सम्बन्ध का विस्तार किसके मध्य होता है?

(क) $\underline{\times}\, 1$ (ख) ± 1 (ग) $\underline{\div}\, 0$ (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ख) ± 1

प्र.6. जब किसी चर 'X' में वृद्धि करने पर चर Y में वृद्धि होती है अथवा चर 'X' में कमी होने से चर Y में कमी होती है, तो इस प्रकार के सम्बन्ध को कहते हैं—

(क) धनात्मक सह-सम्बन्ध (ख) शून्य सह-सम्बन्ध
(ग) पूर्ण सह-सम्बन्ध (घ) निषेधात्मक सह-सम्बन्ध

उत्तर (क) धनात्मक सह-सम्बन्ध

प्र.7. अन्तर विधि का प्रयोग किस अवस्था में नहीं करना चाहिए?

(क) जब N छोटा हो (ख) जब वक्र दिये गये हों
(ग) जब N बड़ा हो (घ) जब अंकों की गहनता महत्त्वपूर्ण हो

उत्तर (ग) जब N बड़ा हो

प्र.8. सह-सम्बन्ध गुणांक का अधिकतम मान हो सकता है—

(क) 2 (ख) −1 (ग) +1 (घ) 0

उत्तर (ग) +1

प्र.9. कोटि अन्तराल विधि का प्रतिपादन किया है—

(क) स्पीयरमैन (ख) गिलफोर्ड (ग) गाल्टन (घ) पीयर्सन

उत्तर (ग) गाल्टन

प्र.10. एक संगीत परीक्षा में दो परीक्षकों ने छात्रों को क्रम प्रदान किये, आप सह-सम्बन्ध की किस विधि का प्रयोग गणना में करेंगे?

(क) कोटि-क्रम विधि (ख) प्रोडक्ट-मोमेण्ट विधि
(ग) दोनों विधियाँ (घ) दोनों में कोई नहीं

उत्तर (क) कोटि-क्रम विधि

प्र.11. यदि $N = 10$ तथा $\Sigma D^2 = 55$ तो ρ (Rho) का मान होगा—

(क) −0.67 (ख) −0.33 (ग) 0.67 (घ) 0.76

उत्तर (ग) 0.67

प्र.12. सूत्र : सह-सम्बन्ध गुणांक $\rho = 1 - \dfrac{6 \times \Sigma D^2}{N(N^2 - 1)}$ के प्रतिपादक हैं—

(क) स्पीयरमैन (ख) गिलफोर्ड (ग) कार्ल पीयर्सन (घ) रोजर

उत्तर (क) स्पीयरमैन

प्र.13. मात्रात्मक सह-सम्बन्ध का प्रकार है—

(क) शून्य सह-सम्बन्ध (ख) ऋणात्मक सह-सम्बन्ध
(ग) धनात्मक सह-सम्बन्ध (घ) ये सभी

उत्तर (घ) ये सभी

प्र.14. प्रोडक्ट-मोमेण्ट विधि का प्रतिपादन किया था—

(क) स्पीयरमैन (ख) पीयर्सन (ग) गिलफोर्ड (घ) गाल्टन

उत्तर (ख) पीयर्सन

प्र.15. गुणात्मक सह-सम्बन्ध का प्रकार है—

(क) शून्य सह-सम्बन्ध (ख) धनात्मक सह-सम्बन्ध
(ग) रेखीय सह-सम्बन्ध (घ) ऋणात्मक सह-सम्बन्ध

उत्तर (ग) रेखीय सह-सम्बन्ध

प्र.16. यदि सह-सम्बन्ध गुणांक का मान + 0.91 हो तो हम उसे कहेंगे—

(क) सामान्य श्रेणी धनात्मक सह-सम्बन्ध

(ख) पूर्ण धनात्मक सह-सम्बन्ध

(ग) उच्च श्रेणी धनात्मक सह-सम्बन्ध

(घ) निम्न श्रेणी धनात्मक सह-सम्बन्ध

उत्तर (ग) उच्च श्रेणी धनात्मक सह-सम्बन्ध

प्र.17. वर्ग क्रमान्तर विधि से सह-सम्बन्ध ज्ञात करने का सूत्र है—

(क) $\frac{5\Sigma DF^2}{(N-1)}$ (ख) $\frac{6\Sigma DF^2}{N(N-1)}$

(ग) $\frac{2-1\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$ (घ) $\frac{1-6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$

उत्तर (घ) $\frac{1-6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$

प्र.18. ''शून्य सह-सम्बन्ध कोई भी स्थिर सम्बन्ध सूचित नहीं करता है।'' यह परिभाषा है—

(क) गिलफोर्ड (ख) गैरेट

(ग) इंगलिश एवं इंगलिश (घ) वोलमैन

उत्तर (ख) गैरेट

प्र.19. ''सह-सम्बन्ध के चरों के बीच पाए जाने वाले संयुक्त सम्बन्ध को इंगित करता है।'' यह कथन है—

(क) क्रो एवं क्रो (ख) ओडैल

(ग) लैथरॉप (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ग) लैथरॉप

प्र.20. सह-सम्बन्ध का उद्देश्य दो चरों के मध्य पाये जाने वाले सम्बन्ध की मात्रा का वर्णन करना है—

(क) फरग्यूसन (ख) गैरेट

(ग) एडवर्ड (घ) लैथरॉप

उत्तर (क) फरग्यूसन

❑

UNIT-VIII

प्रसामान्य प्रायिकता वक्र

Normal Probability Curve

खण्ड-अ अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. प्रसामान्यता की शर्तें लिखिए।

Write the conditions of normality.

उत्तर वितरण प्रसामान्य होने के लिए समग्र की व्यक्तिगत घटनाओं को प्रभावित करने वाले घटकों में निम्नांकित चार शर्तों का पूरा होना आवश्यक है—

1. कारण वाली शक्तियाँ (causal forces) अनेक हों तथा उनका भार अनुमानतः बराबर हो।
2. ये शक्तियाँ पूर्ण समग्र में, जिसमें से अवलोकनों को लिया गया है, पूर्णतः विद्यमान हों, यद्यपि उनका प्रभाव प्रत्येक घटना पर अलग-अलग होगा। यह एकरूपता की शर्त स्पष्ट करती है।
3. घटनाओं पर प्रभाव डालने वाली शक्तियाँ एक-दूसरे से स्वतन्त्र हों।
4. कारण वाली शक्तियाँ इस प्रकार कार्य करती हैं कि समग्र माध्य से ऊपर वाले व निचले वाले विचलनों की मात्रा में तथा संख्या में सन्तुलन रहता है। यह सममितता की शर्त है।

प्र.2. प्रसामान्य वितरण के अचर मूल्य क्या हैं?

What is constants of normal distribution?

उत्तर प्रसामान्य वितरण के अचर मूल्य निम्न प्रकार होते हैं—

माध्य (Mean)	$\overline{X}$ or μ
प्रमाप विचलन (Standard Deviation)	σ
प्रथम परिघात (First Moment)	$\mu_1 = 0$
द्वितीय परिघात (Second Moment)	$\mu_2 = \sigma^2$
तृतीय परिघात (Third Moment)	$\mu_3 = 0$
चतुर्थ परिघात (Fourth Moment)	$\mu_4 = 3\sigma^4 = 3\mu^2{}_2$

परिघात विषमता गुणांक या B_1 (Moment co-efficient of skewness) $= \dfrac{\mu^2{}_3}{\mu^3{}_2} = 0$

परिघात पृथुशीर्षत्व गुणाक या B_2 (Moment co-efficient of kurtosis) $= \dfrac{\mu_4}{\mu^2{}_2} = \dfrac{3\mu^2{}_2}{\mu^2{}_2} = 3$

प्र.3. सामान्य प्रायिकता वक्र क्या है?

What is probality curve?

उत्तर सभी सामान्य वक्र $\mu \pm \sigma$ पर विभक्ति बिन्दुओं के साथ घण्टी के आकार के होते हैं। सभी सामान्य वक्र माध्य के प्रति सममित होते हैं। इसलिए समरूपता की परिभाषा के अनुसार, सामान्य वक्र माध्य के बारे में सममित होता है। सम्पूर्ण सामान्य वक्र के अन्तर्गत क्षेत्रफल 1 होता है।

प्र.4. सामान्य सम्भाव्यता वितरण के गुण क्या हैं?

What are the merits of normal possibility distribution.

उत्तर सामान्य वितरण में प्रमुख विशेषताएँ होती हैं जिन्हें ग्राफ में देखना आसान होता है—माध्य, माध्यिका और मोड बिलकुल समान होते हैं। वितरण माध्य के बारे में सममित है—आधे मान माध्य से नीचे और आधे माध्य से ऊपर आते हैं। वितरण को दो मानों द्वारा वर्णित किया जा सकता है—माध्य और मानक विचलन।

प्र.5. सामान्य वितरण क्या है उदाहरण सहित बताइए?

What is normal distribution explain it through example?

उत्तर सामान्य वितरण के बुनियादी उदाहरण—ऊँचाई और वजन।

ऊँचाई उन मानों का एक सरल उदाहरण है जो सामान्य वितरण पैटर्न का पालन करते हैं। अधिकांश लोग औसत कद के होते हैं—चाहे वह किसी दी गई जनसंख्या के लिए कुछ भी हो।

प्र.6. सामान्य वितरण का उद्देश्य क्या है?

What is the objective of normal distribution?

उत्तर सामान्य वितरण का उपयोग डेटा का विश्लेषण करने के लिए किया जाता है जब निरन्तर डेटा के लिए औसत से ऊपर या नीचे होने की समान सम्भावना होती है जिसका हिस्टोग्राम एक घण्टी वक्र में फिट बैठता है। सांख्यिकीविद् सामान्य वक्र को गॉसियन सम्भाव्यता वितरण के रूप में सन्दर्भित करते हैं, जिसका नाम गॉस के नाम पर रखा गया है।

प्र.7. सामान्य वितरण क्यों महत्त्वपूर्ण है?

Why normal distribution is important?

उत्तर सामान्य वितरण गणित और सांख्यिकी में एक महत्त्वपूर्ण सम्भाव्यता वितरण है क्योंकि प्रकृति और मनोविज्ञान में कई निरन्तर डेटा संकलित और ग्राफ किये जाने पर इस घंटी के आकार का वक्र प्रदर्शित करते हैं।

खण्ड-ब लघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. प्रसामान्य प्रायिकता वक्र को संक्षेप में समझाइए।

To explain the normal probability curve in short.

उत्तर द्विपद तथा प्वॉयसन वितरण खण्डित दैव-चरों के अत्यन्त उपयोगी सैद्धान्तिक वितरण हैं। सतत् दैव-चरों के प्रायिकता या सैद्धान्तिक वितरण भी सांख्यिकी में विशिष्ट महत्त्व रखते हैं। प्रसामान्य वितरण वक्र, जिसे **प्रसामान्य प्रायिकता वितरण** भी कहा जाता है, सतत् चरों (Continuous Variable) का सबसे अधिक महत्त्वपूर्ण सैद्धान्तिक वितरण है। प्रसामान्य वितरण सांख्यिकीय व्यवहारों में प्रयुक्त सबसे अधिक महत्त्वपूर्ण वितरण माना जाता है। इसका एक कारण यह है कि अनेक भौतिक मापों व प्राकृतिक तथ्यों में अवलोकित आवृत्ति वितरण प्रसामान्य वितरण के काफी अनुरूप पाया जाता है। वास्तव में, प्रसामान्य वितरण सांख्यिकी सिद्धान्तों व व्यवहारों में केन्द्रीय भूमिका अदा करता है, विशेषकर सांख्यिकी निष्कर्षण में। अतएव इसे आधुनिक सांख्यिकी की आधारशिला कहा जा सकता है।

अंग्रेज गणितज्ञ **डी० मॉयर** (D. Moiyre, 1667-1754) ने सबसे पहले 'प्रसामान्य वितरण' ज्ञात किया था। इस सिद्धान्त की फ्रेंच गणितज्ञ लाप्लेस (Laplace, 1749-1827) ने पुन: खोज की एवं इसका प्रयोग प्राकृतिक व सामाजिक विज्ञानों तथा व्यावहारिक मामलों में किया। जर्मन गणितज्ञ, भौतिकशास्त्री और खगोलशास्त्री गॉस (Gauss, 1777-1855) ने इस सिद्धान्त का विकास, विस्तार एवं व्यावहारिक उपयोग किया। यह उन प्रथम व्यक्तियों में थे जिन्होंने इसकी गणितीय विशेषताओं का वर्णन किया था। गॉस के सम्मान में प्रसामान्य वितरण को कभी-कभी गॉसियन वितरण भी कहा जाता है बेल्जियन संख्याशास्त्री तथा खगोलशास्त्री क्यूटलेट (Quetelet, 1796-1874) ने सर्वप्रथम प्रसामान्य वितरण का प्रयोग सामाजिक समंकों में व्यापक रूप से किया। जीव-विज्ञान (Biology) में इस वितरण के प्रयोग का श्रेय प्रसिद्ध अंग्रेज संख्याशास्त्री सर फ्रांसिस गाल्टन (Sir Francis Galton, 1822-1911) का है जो चार्ल्स डार्विन के चचेरे भाई थे।

सम्पूर्ण प्रायिकता वितरण में प्रसामान्य वितरण का प्रयोग सबसे अधिक होता है। अधिकांश प्रतिदर्श मापांकों का प्रायिकता वितरण प्रसामान्य वितरण से घनिष्ठ सम्बन्ध होता है। सांख्यिकी विज्ञान में प्रसामान्य वितरण का महत्त्व इसलिए ज्यादा है क्योंकि मौलिक समंकों का प्रसामान्य वितरण न होने पर भी प्रतिदर्श माध्यों तथा अन्य वृहताकार प्रतिदर्शों के मापांकों के वितरण की प्रवृत्ति प्रसामान्य वितरण होने की पायी जाती है। अगर समग्र जिसमें से प्रतिदर्श लिए गये हों, प्रसामान्य वितरण के स्वरूप का हो तो

प्रतिदर्शों के माध्य के आस-पास प्रसामान्य रूप से वितरित होंगे चाहे प्रतिदर्शों का आकार कुछ भी क्यों न हो। प्रसामान्य वितरण की सुविधाजनक गणितीय विशेषताएँ होती हैं और वह अन्य खण्डित प्रायिकता वितरणों; जैसे—द्विपद, प्वॉयसन आदि का अनुमानत: होता है। विशेषकर द्विपद वितरण का अनुमानत: होने के लिए उपयोगी होता है अगर प्रतिदर्श का आकार बड़ा हो, क्योंकि द्विपद वितरण में एक भूयिष्ठक होता है, अगर $p = .5$ तो वह सममितीय होता है व प्रतिदर्श का आकार अनन्त की तरफ जाने से वह प्रसामान्य वितरण के अत्यधिक समीप आ जाता है। द्विपद वितरण प्रसामान्य वितरण के बिल्कुल समीप होगा चाहे $p = .5$ न हो, लेकिन n अधिक हो। अगर माध्य ज्यादा बड़ा होता है तो प्वॉयसन वितरण प्रसामान्य वितरण के अनुमानत: होता है।

प्र.2. प्रसामान्य वितरण का महत्त्व लिखिए।

Write the importance of normal distribution.

उत्तर

प्रसामान्य वितरण का महत्त्व
(Importance of Normal Distribution)

निम्नांकित बातें प्रसामान्य वितरण के महत्त्व को स्पष्ट करती हैं—

1. प्रसामान्य वितरण केन्द्रीय सीमा प्रमेय में व्यक्त विशेषताएँ रखता है, जिसके कारण सांख्यिकी में उसका आधारभूत महत्त्व है। केन्द्रीय सीमा प्रमेय बताता है कि "जैसे-जैसे प्रतिदर्श का आकार 'n' बड़ा होता जाता है, जबकि प्रत्येक अवलोकन को समग्र में से, जिसका माध्य μ है तथा प्रमाप विचलन σ है, स्वतन्त्र रूप से चुना जाए तो $\overline{X}$ का प्रतिदर्शन वितरण की प्रवृत्ति प्रसामान्य वितरण की पायी जाती है। जिसका माध्य μ तथा प्रमाप विचलन $\sigma\overline{X}$ होगा।" यह केन्द्रीय सीमा प्रमेय लागू होती है चाहे समग्र के आवृत्ति वितरण का स्वरूप कैसा भी क्यों न हो। यह विषम द्वि-भूयिष्ठक की समान या विस्तृत आवृत्ति वितरणों पर भी लागू होता है। इसका प्रयोग किया जा सकता है चाहे आवृत्ति वितरण खण्डित हो या सतत्। जैसे-जैसे प्रतिदर्श का आकार बढ़ता है, $\overline{X}$ का प्रतिदर्शन वितरण प्रसामान्य होता जाता है। यह विशेषता न्यूनतम तथा अधिकतम सीमाएँ, जिनके मध्य समग्र के मूल्य फैले हैं, निर्धारित करना सम्भव करती है। उदाहरणार्थ, समग्र के माध्य $\pm 3\sigma$ की सीमाओं के अन्तर्गत 99.73% पदों का समावेश होता है।
2. जैसे-जैसे n बड़ा होता जाता है, प्रसामान्य वितरण अनेक खण्डित वितरणों; जैसे—द्विपद, प्वॉयसन आदि जहाँ बिल्कुल सही खण्डित प्रायिकता वितरण ज्ञान करना कठिन या असम्भव होता है, का उचित अनुमानत: होता है।
3. सैद्धान्तिक एवं व्यावहारिक सांख्यिकी में अनेक ऐसी समस्याएँ हैं जिनका हल प्रसामान्य वितरण की मान्यता से सन्तोषप्रद परिणामों सहित किया जा सकता है।
4. प्रसामान्य वितरण की गणितीय विशेषताएँ उसको लोकप्रिय एवं व्यवहार करने में सुलभ बनाती हैं समंकों के विवरण देने तथा निर्वचन करने की कई सांख्यिकीय तकनीकें प्रसामान्य वक्र के गुणों से प्रत्यक्षत: सम्बन्धित हैं। बिना इसके प्रतिदर्शन तकनीक का विकास सम्भव न होगा। आधुनिक संख्याशास्त्री **डब्ल्यू०जे० योडन** (W.J. Youden) ने प्रसामान्य वितरण को एक कलात्मक ढंग से प्रदर्शन करके परिभाषित किया है, उसे यहाँ प्रस्तुत किया जा रहा है—

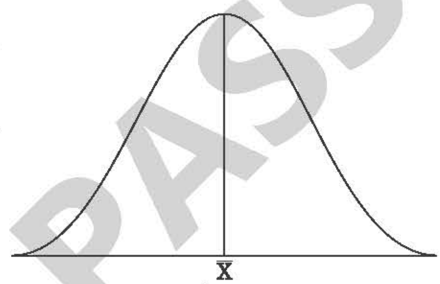
THE
NORMAL
LAW OF ERROR
STANDS OUT IN THE
EXPERIENCE OF MANKIND
AS ONE OF THE BROADEST
GENERALISATION OF NATURAL
PHILOSOPHY.IT SERVES AS THE
GUIDING INSTRUMENT IN RESEARCHES
IN THE PHYSICAL AND SOCIAL SCIENCES AND
IN MEDICINE AGRICULTURE AND ENGINEERING. IT IS
AN INDISPENSABLE TOOL FOR THE ANALYSIS AND THE INTER-
PRETATION OF THE BASIC DATA OBTAINED BY OBSERVATION
EXPERIMENT.

खण्ड-स विस्तृत उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. प्रसामान्य प्रायिकता वक्र व इसकी विशेषताओं का वर्णन कीजिए।
Describe the normal probability curve and its characteristics.

उत्तर

प्रसामान्य प्रायिकता वक्र
(The Normal Probability Curve)

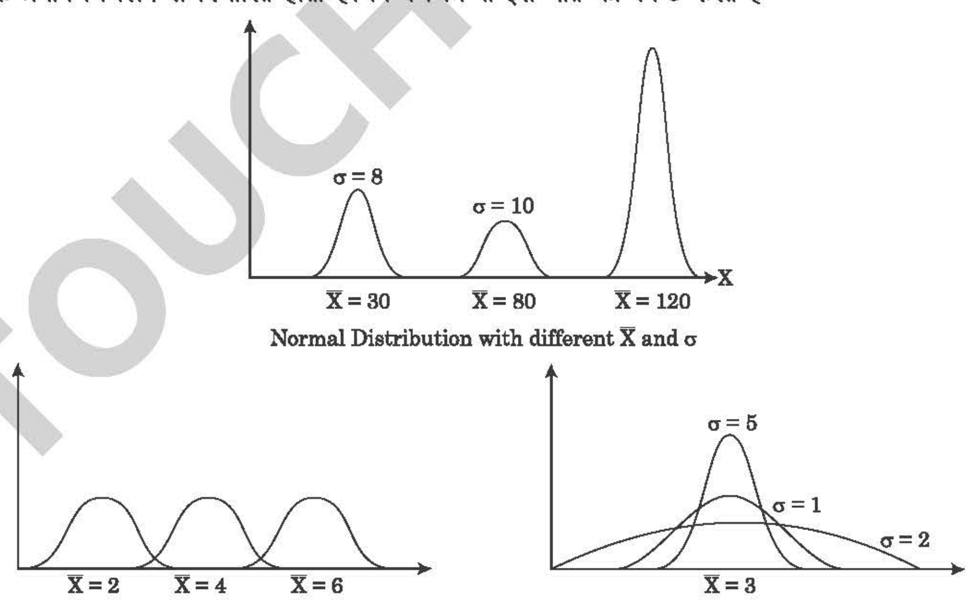


चित्र 1

किसी भी समूह के किसी भी चर पर प्राप्त प्राप्तांक (Score) प्रायः औसत (मध्यमान) की ओर झुके हुए होते हैं। जब इन प्राप्तांकों का मध्यमान के दोनों ओर वितरण एकदम समान होता है तो प्राप्तांकों के इस प्रकार के वितरण को सामान्य वितरण (Normal Distribution) कहते हैं और इस प्रकार के प्राप्तांकों के आरेख (Graph) को सामान्य वितरण वक्र (Normal Distribution Curve) कहते हैं। वास्तविकता यह है कि प्राप्तांकों का इस प्रकार का सामान्य वितरण व्यावहारिक रूप में कभी नहीं होता, इसके लगभग ही होता है और इस लगभग होने के आधार पर ही सम्भावना की जाती है। यही कारण है कि इस प्रकार के सम्भावित प्राप्तांकों के आरेख को सामान्य वक्र (Normal Curve) न कहकर सामान्य प्रायिकता वक्र (Normal Probability Curve, NPC) कहते हैं।

सामान्य वक्र (Normal Curve) घण्टाकार (bell shaped) आकृति का होता है और भुजाक्ष (x-axis) के दोनों तरफ सममितीय (Symmetrical and a symptotic) होता है। यह वितरण की दो मापों, माध्य एवं प्रमाप विचलन पर आधारित होता है। वक्र का स्वरूप निम्न प्रकार का होता है—

यद्यपि प्रसामान्य वक्र घण्टाकार आकृति का होता है और माध्य के आधार पर सममितीय होता है, परन्तु उसका वास्तविक स्वरूप वितरण के प्रमाप विचलन से निर्धारित होता है। निम्न चित्र से इस बात को स्पष्ट करते हैं—



Normal Distribution with different $\overline{X}$ and σ

Normal Distribution X = 2, 4, 8 -3 and same standard distance

Normal Distribution $\overline{X}$ = 3 and σ = 5, 7, 8

चित्र 2

प्रसामान्य वक्र को कई रूपों में व्यक्त किया जा सकता है। निम्न प्रसामान्य वक्र का मूलभूत सूत्र है—

$$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

इसमें

Y = माध्य से x की दूरी पर कोटि अक्ष की परिगणित ऊँचाई (The computed height of an ordinate at a distance of x from the mean)

σ = सामान्य वितरण का प्रमाप विचलन (Standard Deviation of the given normal distribution)

π = अचर 22/7 या 3.1417; $\sqrt{2\pi} = 2.5066$

e = नेप्यूरियन लॉग (अचर 2.7173, 10 के लॉग के आधार पर)

$x = (X - \overline{X})$ माध्य से किसी चर का अन्तर (Stated value of the variable expressed as a deviation from the mean)

उपर्युक्त सूत्र में सम्भावना '1' के लिए ज्ञात होती है, उसको 'N' से गुणा करके सम्पूर्ण वितरण के लिए सम्भावित आवृत्ति ज्ञात की जा सकती है। सूत्र को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है—

$$Y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}\; e_{2\sigma}} \frac{-x^2}{2}$$

इसमें, $\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{N}{\sigma}.39894$

सूत्र को इस प्रकार भी व्यक्त किया जा सकता है—

$$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

प्रसामान्य वक्र की विशेषताएँ
(Characteristics of Normal Curve)

प्रसामान्य वक्र की विशेषताएँ निम्नलिखित हैं—

1. यह घण्टाकार आकृति (bell-shaped) की सममितीय वक्र होती है।
2. सामान्य वक्र में एक ही भूयिष्ठक (monomodal) होता है तथा वह शीर्ष (peak) बिन्दु से दोनों ओर सममितीय होती है। यह वक्र दोनों ओर अनन्त तक फैला होता है अर्थात् वक्र भुजाक्ष के निकट आती-जाती है, परन्तु उसको कभी भी स्पर्श नहीं करती है।
3. केन्द्रीय प्रवृत्ति की सभी मापें समान होती हैं तथा उच्चतम कोटि अक्ष (ordinate) पर स्थिर होती हैं। $(\overline{X} = M = M_0)$
4. वितरण के सभी अवलोकन वक्र के अन्दर भुजाक्ष (x-axis) के ऊपर ही होते हैं।
5. माध्य कोटि अक्ष (Mean ordinate) वक्र को दो समान भागों में विभक्त करता है। आवृत्तियों का वितरण वक्र के एक ओर जितना होता है ठीक उतना ही वक्र के दूसरी ओर भी होता है।
6. माध्य मूल्य के निकट वक्र अवतल (Concave) होता है तथा $\pm 3\sigma$ के निकट समतल आधार के उत्तल (Convex) के रूप में होता है। वक्र $\pm 1\sigma$ के बिन्दुओं पर मुड़ता है।
7. माध्य के दोनों ओर .6745σ के विस्तार के अन्तर्गत 50% आवृत्तियाँ आ जाती हैं। यही सम्भाव्य विभ्रम होता है।
8. प्रथम तथा तृतीय चतुर्थक मध्यका से समान दूरी पर होते हैं। $[(Q_3 - M) = (M - Q_1)]$
9. चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation) = सम्भाव्य विभ्रम (Probable Error)।
10. माध्य विचलन (δ) प्रमाप विचलन (σ) का .7979 अथवा $\frac{4}{5}$ होता है। यदि माध्य विचलन को प्रथम चतुर्थक में जोड़ दिया जाए या तृतीय चतुर्थक में से घटा दिया जाए तो माध्य = मध्यका = भूयिष्ठक का मान ज्ञात हो जाता है।
11. सम्भाव्य विभ्रम (Probable error) माध्य विचलन (δ) का .845 होता है।

12. सामान्य वक्र तथा भुजाक्ष के मध्य का क्षेत्र 'वक्र के अन्तर्गत क्षेत्र' कहलाता है तथा वह उस क्षेत्र में आवृत्तियों के वितरण की संख्या स्पष्ट करता है।

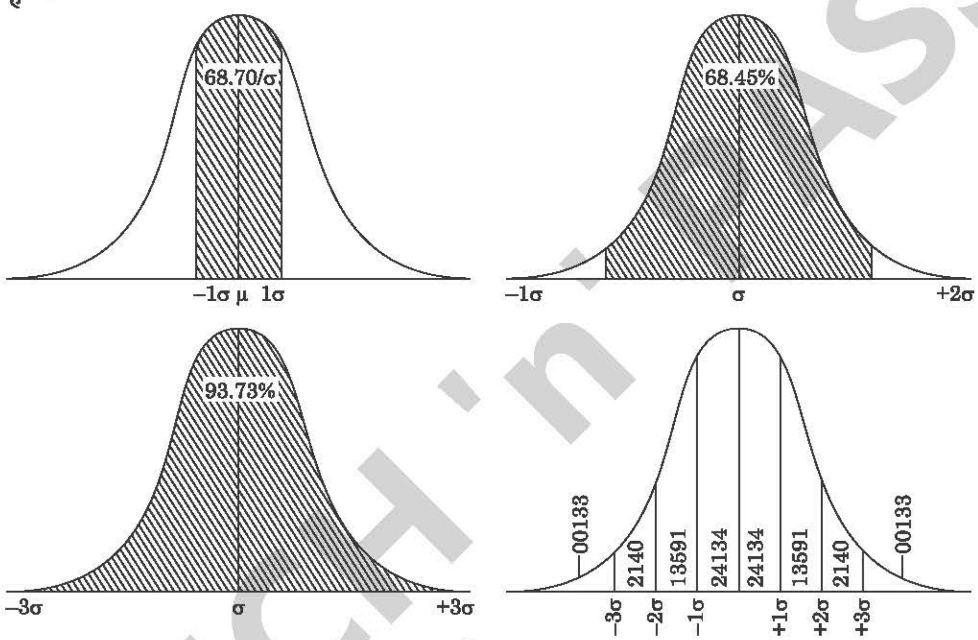
सामान्य वक्र के अन्तर्गत क्षेत्र का माध्य (μ) तथा प्रमाप विचलन के आधार पर वितरण इस प्रकार होता है—

(i) Mean $\pm \sigma$ के अन्तर्गत 68.268% आवृत्तियाँ आती हैं। माध्य के प्रत्येक ओर 34.134% आवृत्तियाँ होती हैं।

(ii) Mean $\pm 2\sigma$ के अन्तर्गत 95.45% आवृत्तियाँ आती हैं। माध्य के प्रत्येक ओर 47.725 आवृत्तियाँ होती हैं।

(iii) Mean $\pm 3\sigma$ के अन्तर्गत 99.73% आवृत्तियाँ आती हैं। माध्य के प्रत्येक ओर 49.865% आवृत्तियाँ होती हैं।

Mean $\pm 3\sigma$ लगभग सारे क्षेत्र को ढँक लेता है, केवल 27% क्षेत्र ही वक्र के बाहर रहता है। निम्नलिखित चित्र इनको स्पष्ट रूप से दर्शाते हैं—



चित्र 3

इसके अलावा क्षेत्र सम्बन्धी इन तथ्यों को भी ध्यान में रखना चाहिए—

$\overline{X} \pm 196\sigma$ covers 95% area, 47.5% on each side,

$\overline{X} \pm 2.5758\sigma$ covers 99% area, 49.5% on each side,

$\overline{X} \pm 0.6745\sigma$ covers 50% area, 25% on each side.

प्र.2. प्रसामान्य वक्र के अन्दर क्षेत्र उदाहरण सहित ज्ञात कीजिए।

Describe the finding area under normal curve.

उत्तर

प्रसामान्य वक्र के अन्दर क्षेत्र ज्ञात करना
(Finding Area under Normal Curve)

प्रसामान्य वक्र समीकरण एक दिये गये x मूल्य के लिए वक्र के कोटि-अक्ष (ordinate) को बताता है। यद्यपि प्रसामान्य वितरण को एक समीकरण के रूप में परिभाषित करना महत्त्वपूर्ण है जिससे x-मूल्यों तथा y-मूल्यों के मध्य सम्बन्ध देखा जा सके, फिर भी सांख्यिकीय निष्कर्षण के अधिकांश व्यवहारों में हम वक्र के कोटि-अक्षों में रुचि नहीं लेते हैं। जैसा कि पहले बताया जा चुका है प्रसामान्य वितरण सतत् होता है तथा सतत् वितरण में दैव-चर एक वर्ग के अन्तर्गत अनन्त मूल्य हो सकते हैं। दो निर्दिष्ट मूल्यों के मध्य के दैव-चर की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए यह जानना जरूरी होता है कि इन दोनों निर्दिष्ट मूल्यों के मध्य प्रसामान्य वक्र का कितना क्षेत्र आता है। प्रसामान्य वितरण के समीकरण में दो मापांक, माध्य (μ) तथा प्रमाप विचलन (σ) निहित होते हैं। क्योंकि μ तथा σ अनन्त मूल्य अख्तियार कर सकते हैं, अतः μ तथा σ के अलग-अलग मूल्यों के लिए वक्र क्षेत्रफल की सारणियाँ

बनाना असम्भव होता है। प्रसामान्य वितरण, जिसमें $\mu = 0$ तथा $\sigma = 1$ होता है, को प्रमापित प्रसामान्य वितरण या इकाई प्रसामान्य वितरण कहा जाता है, जैसा कि समीकरण व्यक्त करता है। ऐसा प्रसामान्य वक्र जिसका माध्य शून्य हो तथा प्रमाप विचलन एक हो, प्रमाणित प्रसामान्य वक्र कहलाता है।

सुविधा के लिए यह उपयोगी होता है कि एक प्रसामान्य रूप से वितरित चर को इस रूप में बदला जाए जिससे प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत क्षेत्र की एक तालिका का प्रयोग किया जा सके चाहे वास्तविक समंकों के मापांक कुछ भी क्यों न हों। यह जानना जरूरी होता है कि माध्य तथा प्रमाप विचलनों में मापित एक निश्चित दूरी वाले बिन्दु के मध्य, प्रसामान्य वक्र में कितना क्षेत्र आता है। क्योंकि दूरी स्थिति के अनुसार बदलती है, अतः इसको एक चर के रूप में माना जा सकता है तथा उसको 'z' संकेताक्षर दिया जा सकता है। कभी-कभी z के मान को प्रसामान्य विचलन (normal deviate) भी कहा जाता है। 'z' दूरी को जो एक प्रसामान्य दैव-चर, x मूल्य, को उसके माध्य से अलग करती है, प्रसामान्य विचलन के लिए निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है—

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

जिसमें $z = z$ परिवर्तन (z transformation)

$n =$ अवलोकन का मूल्य (The value of the observation)

$\mu =$ वितरण का माध्य (The mean of the distribution)

$\sigma =$ वितरण का प्रमाप विचलन (The standard deviation of the distribution)

माना कि एक वितरण का माध्य 300 है तथा प्रमाप विचलन 20 है। जब $n = 300$ हो तो z का मूल्य होगा, $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ अथवा $\frac{300 - 300}{20} = 0$, यह इसलिए है क्योंकि Z = मापदण्ड माध्य से दूरी नापता है। x-मापदण्ड (x-Scale) पर 320, z-मापदण्ड (z-scale) पर 1 के बराबर है,

40 से ज्यादा अंक प्राप्त करने वाले छात्र

$= 50 + 32.89 = 82.89$ ($32.89\% = .95\sigma$ का प्राप्त मान है)

$\because$ 100 छात्रों में 40 से ज्यादा अंक प्राप्त करने वाले = 82.89

$\therefore$ 200 छात्रों में 40 से ज्यादा अंक प्राप्त करने वाले $= \frac{82.89}{100} \times 200 = 165.78$

166 छात्रों को 40 से ज्यादा अंक प्राप्त हुए। **उत्तर**

उदाहरण (Illustration) 1

500 छात्रों के एक समूह पर निष्पत्ति परीक्षण प्रशासित किया गया। मध्यमान 40 व मानक विचलन 12 प्राप्त हुआ। ज्ञात कीजिए कि—

I. 30% श्रेष्ठतम छात्रों ने किस प्राप्तांक से ज्यादा अंक प्राप्त किए हैं?

II. बीच के 50% छात्रों ने किन-किन प्राप्तांकों के मध्य अंक प्राप्त किए हैं?

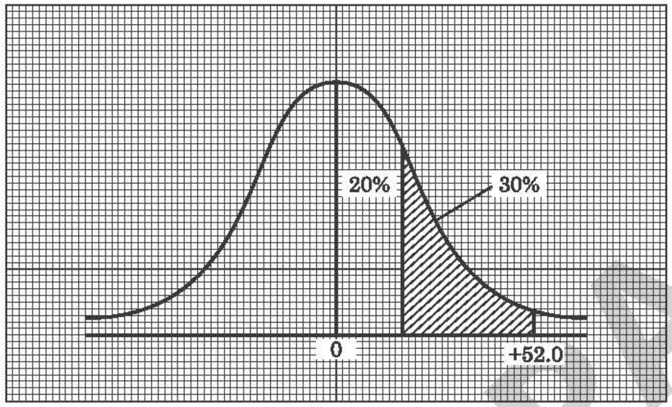
III. नीचे के 400 छात्रों के प्राप्तांक किस प्राप्तांक से निम्न हैं?

$N = 500, M = 40, \sigma = 12$

हल (Solution) I

NPC के सबसे दायीं तरफ का 30% क्षेत्रफल इन छात्रों को प्रकट करेगा। NPC में इस क्षेत्रफल को आड़ी रेखाओं से प्रदर्शित किया गया है। जो कोटि इस 30% क्षेत्रफल का शेष 70% क्षेत्रफल से भिन्न कर रही है उस कोटि के सापेक्ष मूल्य प्राप्तांक ही 30% श्रेष्ठ विद्यार्थियों के प्राप्तांकों की कम सीमा है। अतएव इस कोटि के सापेक्ष मानक प्राप्तांक NPC की मदद से ज्ञात करके उसे मूल प्राप्तांक में परिवर्तित कर लेते हैं। NPC में पहले वांछित कोटि व 0σ पर स्थित कोटि के मध्य छात्रों का प्रतिशत ज्ञात करते हैं। क्योंकि 0σ के दायीं तरफ 50% छात्र होते हैं और वांछित कोटि के दायीं तरफ 30% छात्र हैं, इसलिए 0σ व वांछित कोटि के मध्य 20% छात्र होंगे। अब NPC सारणी से देखते हैं कि 20% के लिए σ का मान क्या है? सारणी में 19.95% के लिए σ का मान 0.52σ हैं। क्योंकि वांछित कोटि 0σ के दायीं तरफ स्थित है, इसलिए इसका मान धनात्मक होता है। अतएव 0σ तथा $+ .52\sigma$ के मूल प्राप्तांक के मध्य लगभग 20% छात्र होते हैं। अब $+ 0.52\sigma$ के मूल प्राप्तांक में बदलने पर—

$$X = M + (\sigma \text{ मान} \times SD)$$
$$= 40 + (0.52 \times 12) = 46.24$$



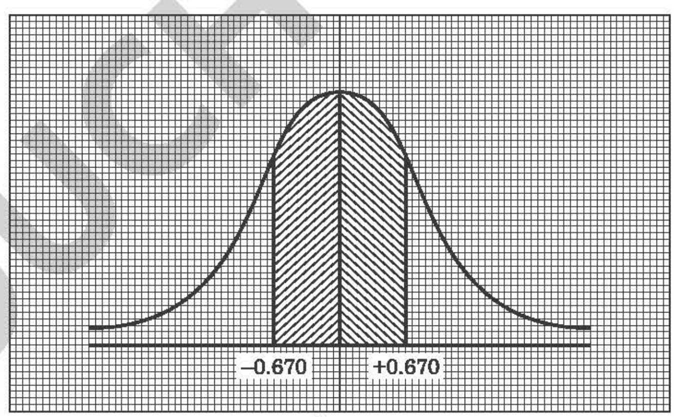
चित्र 1

अतएव ऊपर के 30% विद्यार्थियों के प्राप्तांक 46.24 से ज्यादा होंगे। दूसरे शब्दों में 30% छात्र कम-से-कम 46 या इससे ज्यादा अंक प्राप्त करेंगे।

हल (Solution) II

क्योंकि मध्य के 50% छात्र ही वांछित हैं,

अतएव 25% छात्र मध्यमान के नीचे होंगे व 25% छत्र मध्यमान के ऊपर होंगे। NPC मध्य में इन्हें आड़ी रेखाओं से प्रदर्शित किया गया है। 0σ व वांछित कोटियों के मध्य 25% छात्र हैं। अत: NPC में 25% के लिए σ मान देखेंगे जो 0.67σ है। इससे स्पष्ट है कि 0σ के दायीं तरफ की कोटि के लिए यह $+ 0.67\sigma$ तथा बायीं तरफ की कोटि के लिए -0.67σ होगा।



चित्र 2

अतएव

0.67σ तथा $+ 0.67\sigma$ को मूल प्राप्तांकों में परिवर्तित करने पर—

$+ 0.67\sigma$ के लिए मूल प्राप्तांक $= 40 + (-0.67 \times 12)$
$= 31.96$

$+ 0.67\sigma$ के लिए मूल प्राप्तांक $= 40 + (+ 0.67 \times 12)$
$= 48.04$

50% छात्र 32 व 48 के मध्य अंक प्राप्त करेंगे। **उत्तर**

हल (Solution) III

समस्या के नीचे के 400/500 × 100 = 80% छात्र ही वांछित छात्र हैं तथा ये NPC में बायीं तरफ स्थित होंगे। अतएव NPC के बायीं तरफ का 80% क्षेत्रफल तथा दायीं तरफ NPC में 0σ से नीचे व ऊपर 50-50% छात्र होते हैं, इसलिए वांछित छात्र में से 50% छात्र 0σ के बायीं तरफ तथा 30% छात्र 0σ के दायीं तरफ स्थित होंगे। NPC में छात्रों को आड़ी देखा से दर्शाया गया है। स्पष्ट है कि नीचे के 80% विद्यार्थियों को 20% छात्रों से भिन्न करने वाली कोटि के सापेक्ष प्राप्तांक 80% छात्रों के प्राप्तांकों की उच्च सीमा तक क्योंकि 0σ पर स्थित कोटि व वांछित कोटि के मध्य 30% छात्र हैं अतएव NPC सारणी में अंक के लिए σ का मान देखेंगे। स्पष्ट है कि 29.95% के लिए σ का मान 0.84σ है। क्योंकि वांछित कोटि 0σ के दायीं तरफ स्थित है, अतएव वांछित कोटि का मान + 0.84σ होगा।

+ 0.84σ को मूल प्राप्तांक में परिवर्तित करने पर—

+ 0.84σ के लिए मूल प्राप्तांक

$$= 40 + (-0.84 \times 12)$$
$$= 50.08$$

NPC के आधार पर यह कहा जा सकता है कि 400 छात्र 50 अथवा इससे कम अंक प्राप्त करेंगे। उत्तर

उदाहरण (Illustration) 2

किसी परीक्षण के तीन प्रश्नों को सही हल करने वाले छात्रों की संख्या नीचे सारणी में दी गई है। प्रश्नों के सापेक्षिक कठिनाई स्तर की तुलना कीजिए।

प्रश्न संख्या	सही हल करने वाले विद्यार्थियों की संख्या
1	50%
2	70%
3	60%

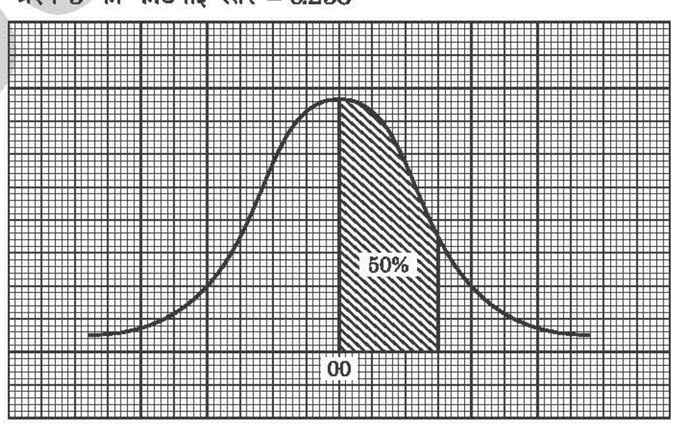
हल (Solution) :

प्रश्न 1 को 50% विद्यार्थी सही हल करते हैं। स्पष्ट है कि 50% श्रेष्ठ विद्यार्थी हैं तथा दायीं तरफ स्थित होंगे। इसी तरह प्रश्न 2 व 3 को सही हल करने वाले 70% व 60% छात्र श्रेष्ठ विद्यार्थी होने के चरण NPC में दायीं तरफ स्थित होंगे। NPC सारणी से उन कोटियों को सही हल करने वाले छात्रों को शेष छात्रों से भिन्न करती हैं, σ मान ज्ञात करने पर छात्रों का कठिनाई स्तर ज्ञात हो जाएगा।

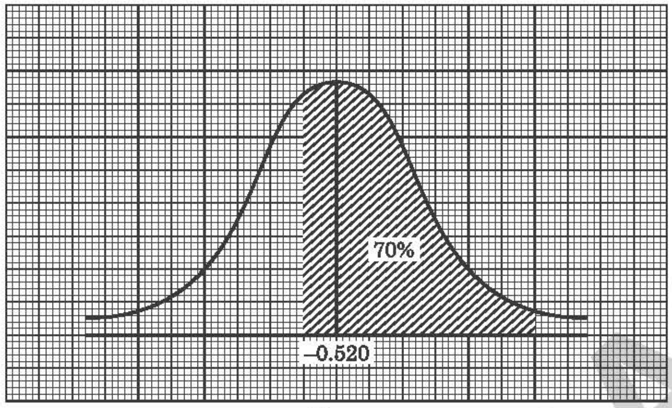
अतएव प्रश्न 1 का कठिनाई स्तर = 0σ

प्रश्न 2 का कठिनाई स्तर = 0.52σ

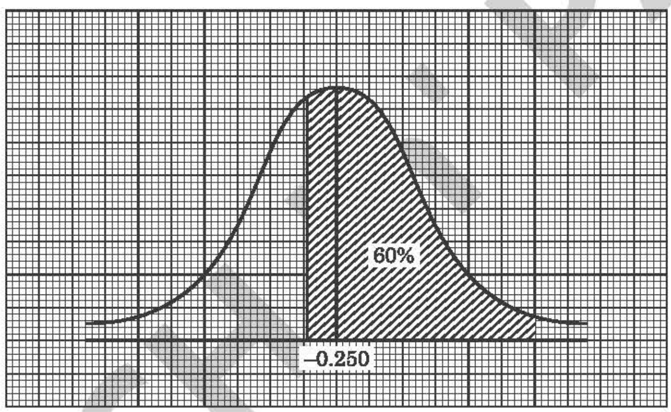
प्रश्न 3 का कठिनाई स्तर = 0.25σ



चित्र 3



चित्र 4



चित्र 5

प्रश्न 1 की अपेक्षा प्रश्न 2, 0.52σ ज्यादा कठिन व प्रश्न 3, 0.25σ अधिक कठिन है। उत्तर

प्र.3. प्रसामान्य वक्र का आसंजन का वर्णन कीजिए।

Describe the fitting of normal curve.

उत्तर

प्रसामान्य वक्र का आसंजन
(Fitting of Normal Curve)

प्रतिदर्श समंकों के लिए प्रसामान्य वक्र का आसंजन निम्नवत् उद्देश्यों के लिए किया जाता है—

1. प्रतिदर्श-समंकों के लिए प्रसामान्य वक्र सही बैठता है या नहीं, इस बात की जाँच करने के लिए दृष्टिगत तरीका दिया जाता है।
2. समग्र की विशेषताओं का अनुमान लगाने के लिए प्रतिदर्श समंकों की अनियमित वक्र के स्थान पर सरलित प्रसामान्य वक्र का उपयोग किया जाता है।

अवलोकित समंकों के लिए प्रसामान्य वक्र की रचना निम्नलिखित दो विधियों में से किसी भी विधि का उपयोग करके की जाती है—

(i) कोटि अक्षों की विधि (Method of Ordinates)

(ii) क्षेत्रफल की विधि (Method of Areas)

(i) कोटि अक्षों की विधि (Method of rank axis)

बिन्दुरेखीय पत्र (graph) पर वक्र बनाने के लिए कोटि-अक्ष पर आवृत्तियाँ तथा भुजाक्ष पर चर मूल्य लिए जाते हैं। अत: वक्र का आसंजन करने के लिए भुजाक्ष के विभिन्न बिन्दुओं की आवृत्तियाँ ज्ञात होनी चाहिए। प्रसामान्य वक्र का आसंजन करने के लिए माध्य से विभिन्न प्रमाप विचलन दूरी के कोटि-अक्ष ज्ञात किये जाते हैं। कोटि-अक्ष ज्ञात करने की विधि यहाँ समझायी जा रही है—

माध्य कोटि-अक्ष (mean ordinate) की ऊँचाई होती है—

$$y = \frac{Ni}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\bar{X}}{\sigma}\right)^2} \quad \text{या} \quad y = \frac{Ni}{2.5066\sigma}2.71828^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\bar{X}}{\sigma}\right)^2}$$

अत: किसी वितरण के लिए प्रसामान्य वक्र आसंजित करने के लिए N, $\bar{X}$ तथा σ के मूल्य जानना आवश्यक होता है। उपर्युक्त सूत्र में $(X-\bar{X}) = 0$, तथा 2.71828 को शून्य घात 1 के बराबर होता है। $e - \frac{x^2}{2\sigma^2}$, माध्य पर कोटि-अक्ष के लिए सदैव 1 होता है। अत: माध्य कोटि-अक्ष को निम्न सूत्र द्वारा आसानी से ज्ञात किया जा सकता है—

$$y_0 = \frac{Ni}{2.5066\sigma} \text{ or } y_0 = .3989\left(\frac{Ni}{\sigma}\right)$$

जिसमें,

y_0 = माध्य पर कोटि अक्ष (Ordinate at mean)

N = पदों की कुल संख्या (Total number of items)

i = वर्गान्तर (Width of the class-interval)

आसंजित वक्र (fitted curve) का यह सबसे ऊँचा कोटि-अक्ष होता है। माध्य से 1σ की दूरी पर कोटि-अक्ष की ऊँचाई होगी—

$$y_1 = .3989\left(\frac{Ni}{\sigma}\right)e^{-\frac{1}{2(1)}^2}$$

इसी प्रकार माध्य से σ के शब्दों में दूरी के लिए अन्य कोटि-अक्षों की ऊँचाईयाँ ज्ञात की जा सकती हैं। परन्तु व्यवहार में माध्य से विभिन्न σ दूरियों के कोटि-अक्षों की ऊँचाईयों की गणना करने की आवश्यकता नहीं होती है। केवल माध्य कोटि-अक्ष की ऊँचाई ही निकालनी पड़ती है। अन्य कोटि-अक्षों की ऊँचाईयाँ विशेष रूप से तैयार की गयी गणितीय तालिका को सन्दर्भित करके ज्ञात किया जा सकता है। यह तालिका प्रसामान्य प्रायिकता वक्र (Normal Probability Curve) के कोटि-अक्ष बताती है। इस तालिका को सन्दर्भित करके प्रमापित प्रसामान्य चर (Standard Normal Variate) से दूरी अर्थात् $\frac{X-\bar{X}}{\sigma}$ बिन्दु, जिसे $\frac{X}{\sigma}$ का संकेत दिया जाता है, से सम्बन्धित मूल्य ज्ञात किया जाता है। यह मूल्य माध्य कोटि-अक्ष के अनुपात के रूप में कोटि-अक्ष की ऊँचाई बताता है। अत: एक निश्चित बिन्दु पर कोटि-अक्ष की ऊँचाई ज्ञात करने के लिए इस मूल्य को माध्य कोटि-अक्ष की ऊँचाई से गुणा किया जाता है। निम्न उदाहरण में इस गणन प्रक्रिया को स्पष्ट किया गया है—

कोटि-अक्षों की ऊँचाई ज्ञात करने की प्रक्रिया (Calution Process of Height of Rank-axis)

कोटि-अक्षों की ऊँचाईयों की गणना में निम्नलिखित पदक्षेप निहित होते हैं—

1. विभिन्न वर्गों के मध्य बिन्दु ज्ञात किये जाते हैं।
2. माध्य से विभिन्न मध्य बिन्दुओं के विचलन निकाले जाते हैं $(m-\bar{X})$ तथा उन्हें 'x' से संकेत दिया जाता है।
3. प्रत्येक x को σ से भाग दिया जाता है $\left(\frac{x}{\sigma}\right)$।
4. सामान्य वक्र के कोटि अक्षों की तालिका से प्रत्येक $\frac{x}{\sigma}$ के लिए कोटि-अक्षों के मान निकाले जाते हैं।
5. इसके बाद प्रत्येक संख्या का माध्य कोटि-अक्ष के मूल्य से गुणा किया जाता है। प्राप्त संख्याएँ माध्य से विभिन्न दूरी के कोटि-अक्षों की ऊँचाई के मूल्य होती हैं अर्थात् वे प्रसामान्य वितरण में प्रत्याशित आवृत्तियाँ होती हैं।

(ii) क्षेत्रफल की विधि (Method of Areas)

प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत आने वाला क्षेत्र आवृत्तियों की कुल संख्या का प्रतिनिधित्व करता है। 'प्रसामान्य' वक्र के अन्तर्गत क्षेत्र (Area under Normal Curve) तालिका सम्पूर्ण क्षेत्र को 1 के बराबर मानती है। अन्य शब्दों में, तालिका माध्य के कोटि-अक्ष तथा माध्य से प्रमाप-विचलन इकाईयों में व्यक्त दूरी के कोटि-अक्ष के बीच आने वाले क्षेत्र को कुल क्षेत्र के अनुपात के रूप में देती है। प्रसामान्य वितरण वक्र में माध्य वितरण के ठीक मध्य में होता है तथा माध्य $\pm\,\sigma$ 68.27% माध्य $\pm\, 2\sigma$95.45% तथा माध्य $\pm\, 3\sigma$ 99.73% क्षेत्र को ढँकते हैं। जब क्षेत्रफल विधि से प्रसामान्य वक्र का आसंजन किया जाता है तो विभिन्न वर्गान्तरों के मध्य आने वाले क्षेत्रफल को ज्ञात करके कुल आवृत्तियों से गुणा करके प्रत्येक वर्गान्तर की आवृत्ति ज्ञात करते हैं।

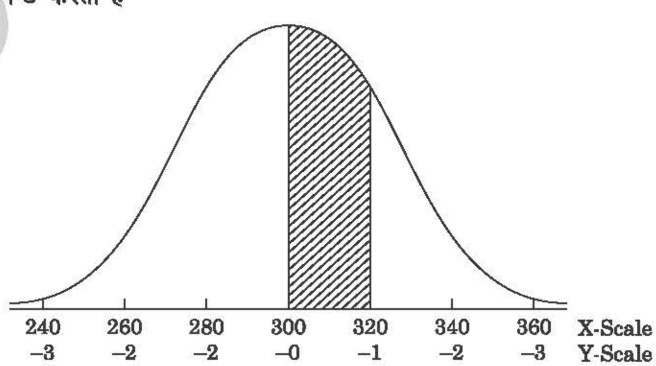
उदाहरण—क्षेत्रफल रीति से प्रसामान्य वितरण का आसंजन इस प्रकार किया जाएगा—

Class	Lower X Class Limit	Observed f Frequency	$xX - X$	$\frac{x}{\sigma} = z$	Area from 0 to z	Area under each Class-interval	Expected Frequency
10–20	10	2	34	−2.72	.4967	.4967 − .4726 = .0241	.0241 × 100 = 2.41 या 2
20–30	20	11	24	−1.92	.4716	.4726 − .3686 = .1040	.1040 × 100 = 10.40 या 10
30–40	30	24	14	−1.12	.3683	.3686 − .1255 = .2431	.2431 × 100 = 24.31 या 24
40–50	40	33	4	−0.32	.1255	.1255 + .1844 = .3099	.3099 × 100 = 30.99 या 31
50–60	50	20	6	0.48	.1844	.3997 − .1844 = .2153	.2153 × 100 = 21.53 या 22
60–70	60	8	16	1.28	.3997	.4812 − .3997 = .0815	0.815 × 100 = 8.15 या 8
70–80	70	2	26	2.08	.4812	.4980 − .4812 = 0.168	.0168 × 100 = 1.68 या 2
	80		36	2.88	.4980		
		100					**.99 या 100**

क्योंकि $\frac{x-\mu}{\sigma}\ \frac{320-300}{1} = 1$, तथा x-मापदण्ड पर 340, z-मापदण्ड के 2 के बराबर है क्योंकि, $\frac{340-300}{20} = 2$।

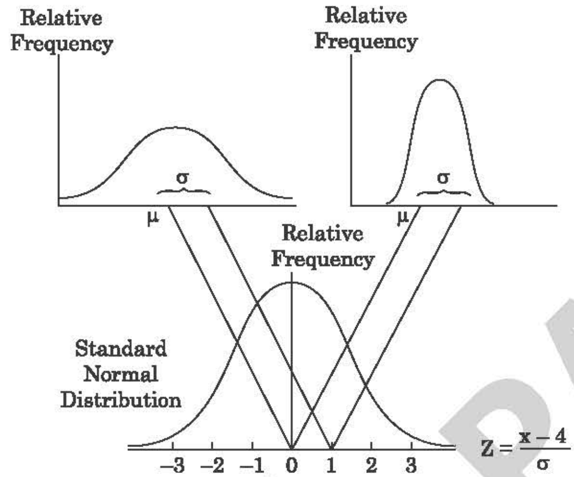
z-मापदण्ड के सभी मूल्य इसी प्रकार ज्ञात किये जाते हैं।

निम्न चित्र इस बात को स्पष्ट करता है—



चित्र 1

z-परिवर्तन किस प्रकार होता है, निम्न चित्र द्वारा प्रदर्शित किया गया है—



चित्र 2

यहाँ यह स्पष्ट किया जा सकता है कि किसी खण्ड (segment) के अन्दर वक्र के अन्तर्गत जो क्षेत्र आता है वह उस खण्ड की ऊपरी व निचली सीमा के मध्य होता है। प्रत्येक क्षेत्र सम्पूर्ण क्षेत्र, जिसे 1.00 के बराबर माना जाता है, के अनुपात अथवा अंश के रूप में व्यक्त किया जाता है।

बहुविकल्पीय प्रश्न

प्र.1. सामान्य सम्भावना वक्र का विषमता गुणांक होता है—

(क) तीन (ख) शून्य (ग) दो (घ) एक

उत्तर (ख) शून्य

प्र.2. सामान्य वक्र एक है—

(क) गणितीय कार्य (ख) वैज्ञानिक कार्य (ग) शोध कार्य (घ) ये सभी

उत्तर (क) गणितीय कार्य

प्र.4. यदि सामान्य सम्भावना वक्र घण्टाकार न हो तो विवरण होता है—

(क) संक्षिप्त (ख) विकृत (ग) कृत (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ख) विकृत

प्र.5. सामान्य वितरण वक्र के लिए 1733 में सर्वप्रथम किसने समीकरण निकाला?

(क) डी० मॉयर (ख) थॉर्नडाइक (ग) मैकनेमर (घ) गॉस

उत्तर (क) डी० मॉयर

प्र.6. सामान्य वितरण वक्र होता है—

(क) काल्पनिक (ख) परिकाल्पनिक
(ग) (क) एवं (ख) दोनों (घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (क) काल्पनिक

प्र.7. निम्नलिखित में से कौन सह-सम्बन्ध के प्रकार हैं?

(क) सकारात्मक और नकारात्मक (ख) सरल, आंशिक और एकाधिक
(ग) रैखिक और अरेखीय (घ) ये सभी

उत्तर (घ) ये सभी

प्र.8. सह-सम्बन्ध के गुणांक के लिए निम्नलिखित में से कौन-सा सत्य है?
(क) सह-सम्बन्ध का गुणांक पैमाने के परिवर्तन पर निर्भर नहीं है
(ख) सह-सम्बन्ध का गुणांक उत्पत्ति के परिवर्तन पर निर्भर नहीं है
(ग) सह-सम्बन्ध का गुणांक पैमाने के परिवर्तन और उत्पत्ति के परिवर्तन दोनों पर निर्भर नहीं है
(घ) उपरोक्त में से कोई नहीं

उत्तर (ग) सह-सम्बन्ध का गुणांक पैमाने के परिवर्तन और उत्पत्ति के परिवर्तन दोनों पर निर्भर नहीं है

प्र.9. सह-सम्बन्ध विश्लेषण के लिए निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है?
(क) यह एक द्विचर विश्लेषण है
(ख) यह एक बहु भिन्नरूपी विश्लेषण है
(ग) यह एक अविभाज्य विश्लेषण है
(घ) (क) और (ग) दोनों

उत्तर (ग) यह एक अविभाज्य विश्लेषण है

प्र.10. यदि दो चरों के मान एक ही दिशा में चलते हैं, तो ....।
(क) सह-सम्बन्ध को गैर-रैखिक कहा जाता है
(ख) सह-सम्बन्ध को रैखिक कहा जाता है
(ग) सह-सम्बन्ध को नकारात्मक कहा जाता है
(घ) सह-सम्बन्ध को सकारात्मक कहा जाता है

उत्तर (घ) सह-सम्बन्ध को सकारात्मक कहा जाता है

प्र.11. यदि दो चरों के मान विपरीत दिशा में चलते हैं, तो ....।
(क) सह-सम्बन्ध को रैखिक कहा जाता है
(ख) सह-सम्बन्ध को गैर-रैखिक कहा जाता है
(ग) सहसम्बन्ध को सकारात्मक कहा जाता है
(घ) सह-सम्बन्ध को नकारात्मक कहा जाता है

उत्तर (घ) सह-सम्बन्ध को नकारात्मक कहा जाता है

प्र.12. निम्नलिखित में से कौन-सी तकनीक भविष्यवाणी तन्त्र प्रदान करने में मदद करने के लिए दो चर के बीच सम्बन्धों का विश्लेषण है?
(क) मानक त्रुटि
(ख) सह-सम्बन्ध
(ग) वापसी
(घ) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (ग) वापसी

प्र.13. निम्नलिखित में से कौन-सा कथन दो प्रतिगमन गुणांकों के अंकगणितीय माध्य के बारे में सत्य है?
(क) सह सह-सम्बन्ध गुणांक से कम है
(ख) यह सह-सम्बन्ध गुणांक के बराबर है
(ग) यह सह-सम्बन्ध गुणांक से अधिक या उसके बराबर है
(घ) यह सह-सम्बन्ध गुणांक से अधिक है

उत्तर (घ) यह सह-सम्बन्ध गुणांक से अधिक है

प्र.14. परिकल्पना के परीक्षण का क्या अर्थ है?
(क) यह समस्या का एक महत्त्वपूर्ण अनुमान है
(ख) यह शोध समस्या की परिकल्पना को स्वीकार या अस्वीकार करने का नियम है
(ग) यह एक महत्त्वपूर्ण वक्तव्य देने की एक विधि है
(घ) उपरोक्त में से कोई नहीं

उत्तर (ख) यह शोध समस्या की परिकल्पना को स्वीकार या अस्वीकार करने का नियम है

प्र.15. निम्नलिखित में से कौन-सा कथन शून्य परिकल्पना के बारे में सत्य है?
(क) शून्य परिकल्पना से सम्बन्धित किसी भी गलत निर्णय के परिणामस्वरूप दो प्रकार की त्रुटियाँ होती हैं
(ख) शून्य परिकल्पना से सम्बन्धित किसी भी गलत निर्णय के परिणामस्वरूप एक प्रकार की त्रुटि होती है
(ग) शून्य परिकल्पना से सम्बन्धित किसी भी गलत निर्णय के परिणामस्वरूप चार प्रकार की त्रुटियाँ होती हैं
(घ) शून्य परिकल्पना से सम्बन्धित किसी भी गलत निर्णय के परिणामस्वरूप तीन प्रकार की त्रुटियाँ होती हैं

उत्तर (क) शून्य परिकल्पना से सम्बन्धित किसी भी गलत निर्णय के परिणामस्वरूप दो प्रकार की त्रुटियाँ होती हैं

प्र.16. टाइप दो त्रुटि के बारे में निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है?

(क) टाइप टू त्रुटि का अर्थ है गलत परिकल्पना को स्वीकार करना

(ख) टाइप टू त्रुटि का अर्थ है गलत परिकल्पना को अस्वीकार करना

(ग) टाइप टू त्रुटि का अर्थ है एक सही परिकल्पना को स्वीकार करना

(घ) टाइप टू त्रुटि का अर्थ है एक सही परिकल्पना को अस्वीकार करना

उत्तर (क) टाइप टू त्रुटि का अर्थ है गलत परिकल्पना को स्वीकार करना

प्र.17. महत्त्व के स्तर के बारे में निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है?

(क) एक परिकल्पना का परीक्षण करते समय हम महत्त्व के स्तर को 2% के रूप में लेते हैं यदि इसका पहले उल्लेख नहीं किया गया है

(ख) एक परिकल्पना का परीक्षण करते समय हम महत्त्व के स्तर को 1% के रूप में लेते हैं यदि इसका पहले उल्लेख नहीं किया गया है

(ग) एक परिकल्पना का परीक्षण करते समय हम महत्त्व के स्तर को 10% मानते हैं यदि इसका पहले उल्लेख नहीं किया गया है

(घ) एक परिकल्पना का परीक्षण करते समय हम महत्त्व के स्तर को 5% के रूप में लेते हैं यदि इसका पहले उल्लेख नहीं किया गया है

उत्तर (क) एक परिकल्पना का परीक्षण करते समय हम महत्त्व के स्तर को 2% के रूप में लेते हैं यदि इसका पहले उल्लेख नहीं किया गया है

प्र.18. स्वतन्त्र चर का उपयोग .... में आश्रित चर को समझने के लिए किया जाता है।

(क) रेखीय प्रतिगमन विश्लेषण

(ख) कई प्रतिगमन विश्लेषण

(ग) गैर-रेखीय प्रतिगमन विश्लेषण

(घ) इनमें से कोई भी नहीं

उत्तर (क) रेखीय प्रतिगमन विश्लेषण

प्र.19. प्रतिगमन रेखा के बारे में निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है?

(क) प्रतिगमन रेखा को औसत सम्बन्ध की रेखा के रूप में भी जाना जाता है

(ख) प्रतिगमन रेखा को अनुमान समीकरण के रूप में भी जाना जाता है

(ग) प्रतिगमन रेखा को पूर्वानुमान समीकरण के रूप में भी जाना जाता है

(घ) उपरोक्त सभी

उत्तर (घ) उपरोक्त सभी

प्र.20. डेटा के दो सेटों के बीच सह-सम्बन्ध विश्लेषण के बारे में निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है?

(क) डेटा के दो सेटों के बीच सह-सम्बन्ध विश्लेषण को सरल सह-सम्बन्ध के रूप में जाना जाता है

(ख) डेटा के दो सेटों के बीच सह-सम्बन्ध विश्लेषण को एकाधिक सह-सम्बन्ध के रूप में जाना जाता है

(ग) डेटा के दो सेटों के बीच सह-सम्बन्ध विश्लेषण को आंशिक सह-सम्बन्ध के रूप में जाना जाता है

(घ) उपरोक्त में से कोई नहीं

उत्तर (क) डेटा के दो सेटों के बीच सह-सम्बन्ध विश्लेषण को सरल सह-सम्बन्ध के रूप में जाना जाता है

प्र.21. मूल परिकल्पना को .... के रूप में जाना जाता है।

(क) वैकल्पिक परिकल्पना

(ख) शून्य परिकल्पना

(ग) (क) और (ख) दोनों गलत हैं

(घ) (क) और (ख) दोनों सही हैं

उत्तर (ख) शून्य परिकल्पना

❑