VIDYA UNIVERSITY PRESS

TOUCH n PASS

सर्वश्रेष्ठ परीक्षा पथ-प्रदर्शक

B.Com.
प्रथम वर्ष
(सर्टिफिकेट कोर्स)
सेमेस्टर-I

व्यावसायिक सांख्यिकी

SYLLABUS

UNIT-I

Evolution of Statistics in Indian, contribution of Indian Statistics Prof. Prasanta Chandra Mahalanobis. Introduction to Statistics : Meaning, Scope, Importance and Limitation, Statistical Investigation-Planning and organization, Statistical units, Methods of Investigation, Census and Sampling. Collection of Data-Primary and Secondary Data, Editing of Data, Classification of Data, Frequency Distribution and Statistical Series, Tabulation of Data, Diagrammatical and Graphical Presentation of Data.

UNIT-II

Measures of Central Tendency : Mean, Median, Mode, Quartile, Decile, Percentile, Geometric and Harmonic Mean; Dispersion : Range, Quartile Deviation, Mean Deviation, Standard Deviation and its Co-efficient, Co-efficient of Variation and Variance, Test of Skewness and Dispersion, Its Importance, Co-efficient of Skewness.

UNIT-III

Correlation : Meaning, application, types and degree of correlation, Methods : Scatter Diagram, Karl Pearson's Coefficient of Correlation, Spearman's Rank Coefficient of Correlation, concurrent method, Parabola Error & Standard Error.

UNIT-IV

Index Number : Meaning, Types and Uses, Methods of constructing Price Index Number, Fixed-Base Method, Chain-Base Method, Base conversion, Base shifting deflating and splicing. Consumer Price Index Number, Fisher's Ideal Index Number, Reversibility Test-Time and Factor, Analysis of Time Series : Meaning, Importance and Components of a Time Series. Decomposition of Time Series : Moving Average Method and Method of Least square.

VIDYA®
UNIVERSITY PRESS

पंजीकृत कार्यालय
विद्या लोक, टी०पी० नगर, बागपत रोड,
मेरठ, उत्तर प्रदेश (NCR) 250 002
फोन : 0121-2513177, 2513277
www.vidyauniversitypress.com

सम्पादन एवं लेखन
शोध एवं अनुसन्धान प्रकोष्ठ

मुद्रक
विद्या यूनिवर्सिटी प्रेस

विषय-सूची

UNIT-I

भारत में सांख्यिकी का उद्भव

खण्ड-अ अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. भारतीय संविधान में सूची का विभाजन कितने वर्गों में किया गया है?

उत्तर भारतीय संविधान में सूची को तीन वर्गों में विभाजित किया गया है, जो निम्न प्रकार हैं—1. संघ सूची, 2. राज्य सूची तथा 3. समवर्ती सूची।

प्र.2. स्वतन्त्र भारत का पहला सांख्यिकीय सलाहकार किसे मनोनित किया गया?

उत्तर स्वतन्त्र भारत का पहला सांख्यिकीय सलाहकार प्रो० पी०सी० महालनोबिस को मनोनीत किया गया।

प्र.3. सांख्यिकी दिवस कब मनाया जाता है?

उत्तर सांख्यिकी दिवस प्रत्येक वर्ष 29 जून को मनाया जाता है।

प्र.4. अपवर्जी व समावेशी रीतियों में अन्तर स्पष्ट कीजिए।

उत्तर अपवर्जी व समावेशी रीतियों में निम्नलिखित प्रमुख अन्तर हैं—

1. अपवर्जी रीति में एक वर्ग की ऊपरी सीमा अगले वर्ग की निचली सीमा होती है, परन्तु समावेशी रीति में इन दोनों सीमाओं में अधिकतर 1 का अन्तर होता है।
2. अपवर्जी वर्गान्तरों में एक वर्ग की ऊपरी सीमा के बराबर मूल्य की इकाई उस वर्ग में सम्मिलित नहीं की जाती जबकि समावेशी रीति में ऊपरी सीमा के बराबर मूल्य भी उसी वर्ग में सम्मिलित रहता है।
3. किसी भी सांख्यिकीय माप की गणना हेतु अपवर्जी वर्गान्तरों में संशोधन करने की कोई आवश्यकता नहीं होती, परन्तु समावेशी वर्गान्तरों की अपवर्जी वर्गान्तरों में परिवर्तित करना पड़ता है।
4. जहाँ मूल्य पूर्णांकों में होते हैं वहाँ समावेशी विधि उपयुक्त होती है, अन्य स्थितियों में अपवर्जी विधि उपयुक्त होती है।

प्र.5. संचयी आवृत्ति श्रेणी को समझाइए।

उत्तर जब प्रत्येक वर्ग (Class) की आवृत्ति या बारम्बारता अलग-अलग न लिखकर आवृत्तियों को संचयी रूप में लिखा जाता है तो उसे संचयी आवृत्ति श्रेणी कहते हैं। संचयी आवृत्ति वितरण तैयार करते समय वर्ग की दोनों सीमाएँ नहीं लिखी जातीं, केवल ऊपरी या निचली सीमा ही लिखी जाती है। ऊपरी सीमा के आधार पर संचयी आवृत्ति श्रेणी तैयार करते समय 'से कम' (Below, Under or Less than) शब्द का प्रयोग होता है, जबकि निचली सीमा के आधार पर आवृत्ति वितरण तैयार करते समय 'से अधिक' (More than, Over or Above) शब्द का प्रयोग किया जाता है।

प्र.6. खण्डित तथा अखण्डित श्रेणी में अन्तर समझाइए।

उत्तर खण्डित तथा अखण्डित श्रेणी में प्रमुख अन्तर निम्नलिखित हैं—

1. **स्वरूप में अन्तर**—खण्डित श्रेणी में पदों का मूल्य (size) दिया हुआ होता है, जबकि अखण्डित श्रेणी में वर्गान्तर (class intervals) दिये हुए होते हैं।
2. **माप का अन्तर**—खण्डित श्रेणी में यथार्थ माप होते हैं और ये अधिकतर पूर्णांकों में होते हैं। इसके विपरीत अखण्डित श्रेणी में यथार्थ माप नहीं होते बल्कि उन्हें कृत्रिम रूप से बनाये गये माप-समूहों में शामिल किया जाता है।

3. **विच्छिन्नता का अन्तर**—खण्डित श्रेणी में विच्छिन्नता (discontinuity) होती है अर्थात् उसके पद-मूल्यों में एक निश्चित अन्तर (definite break) होता है। इसके विपरीत अखण्डित श्रेणी में निरन्तरता या अविच्छिन्नता पाई जाती है।
4. **रचना-स्रोत का अन्तर**—खण्डित श्रेणी की रचना खण्डित चरों (जैसे व्यक्ति, बच्चों की संख्या, दुर्घटना आदि) से होती है जबकि अखण्डित श्रेणी, अखण्डित चरों (जैसे—आयु, लम्बाई, वजन, आय आदि) से तैयार की जाती है।

प्र.7. अपवर्जी विधि को समझाइए।

उत्तर अपवर्जी विधि—इस प्रकार के वर्गीकरण में एक वर्ग की ऊपरी सीमा अगले वर्ग की निचली सीमा होती है। इस विधि में महत्त्वपूर्ण बात यह है कि प्रत्येक वर्ग की ऊपरी सीमा के बराबर वाले पद-मूल्य को उस वर्ग के अन्तर्गत सम्मिलित नहीं किया जाता, वरन् उस वर्ग से तुरन्त अगले वाले वर्ग में सम्मिलित किया जाता है। उदाहरण के लिए,

आयु (वर्षों में)
0 – 10
10 – 20
20 – 30
30 – 40
40 – 50

उपर्युक्त उदाहरण में, यदि किसी व्यक्ति की आयु 20 वर्ष है तो उसे 10 – 20 वाले वर्ग में सम्मिलित नहीं करेंगे बल्कि 20 – 30 वाले वर्ग में शामिल करेंगे।

प्र.8. समावेशी विधि को समझाइए।

उत्तर समावेशी विधि—इस प्रकार के वर्गीकरण में एक वर्ग की ऊपरी सीमा व दूसरे वर्ग की निचली सीमा एकसमान नहीं होती है। यह अन्तर अधिकतम एक (1) हो सकता है। इस प्रकार इस विधि में एक वर्ग की जो ऊपरी सीमा होती है, उससे तुरन्त अगले वर्ग की निचली सीमा एक अधिक होती है। जैसे 0 – 9, 10 – 19, 20 – 29 आदि। ऐसा करने से प्रत्येक वर्ग में आने वाले मूल्यों का स्पष्ट रूप से निर्धारण हो जाता है। इस प्रकार के वर्गीकरण में प्रत्येक वर्ग की ऊपरी तथा निचली सीमा, दोनों के बराबर पद-मूल्यों को उसी वर्ग में सम्मिलित करते हैं। इसीलिए इसे समावेशी रीति कहते हैं।

प्र.9. सविचार निदर्शन के गुण लिखिए।

उत्तर सविचार निदर्शन के गुण—इसके प्रमुख गुण निम्न प्रकार हैं—
1. निदर्शन की यह पद्धति बहुत सरल है।
2. न्यादर्श का आकार निश्चित कर लेने पर योजना बना लेने से न्यादर्श का चुनाव ठीक होने की सम्भावना रहती है।
3. महत्त्वपूर्ण इकाइयों को न्यादर्श में शामिल किया जा सकता है।

प्र.10. सांख्यिकी नियमितता नियम की विशेषताएँ लिखिए।

उत्तर सांख्यिकी नियमितता नियम की विशेषताएँ—इसकी विशेषताएँ निम्न प्रकार हैं—
1. यह नियम सम्भावना सिद्धान्त पर आधारित है।
2. यह नियम समग्र की इकाइयों की वह प्रवृत्ति है जिसके अनुसार चुने हुए पदों या इकाइयों में समग्र के गुण आ जाते हैं।
3. इस नियम का आधार यह है कि प्रकृति में ऊपर से भिन्नता दिखाई देते हुए भी एक अन्तर्निहित नियमितता होती है।

प्र.11. सविचार निदर्शन व दैव निदर्शन में अन्तर स्पष्ट कीजिए।

उत्तर सविचार निदर्शन व दैव निदर्शन में प्रमुख अन्तर निम्नलिखित हैं—

क्र० सं०	सविचार निदर्शन	दैव निदर्शन
1.	इकाइयों का चयन अन्वेषक की इच्छा अनुसार या जानबूझकर होता है।	इकाइयों का चयन दैव आधार पर होता है।
2.	अन्वेषक के पक्षपात से प्रभावित होता है।	यह पक्षपातरहित होता है।

3.	विभ्रमों का स्वभाव संचयी प्रकृति का होता है।	विभ्रम समकारी अर्थात् क्षतिपूरक होती है।
4.	सजातीय इकाइयों वाली समग्र के लिए उपयुक्त है।	विविध प्रकार के समग्रों में प्रयोग किया जा सकता है।

प्र.12. मिश्रित निदर्शन के गुण लिखिए।

उत्तर **मिश्रित निदर्शन के गुण**—इसी रीति में दोनों प्रमुख रीतियों (सविचार निदर्शन एवं दैव निदर्शन) के गुण आ जाते हैं। इस रीति में चुनाव अधिक विश्वसनीय होता है; क्योंकि समग्र के विभिन्न स्तरों का प्रतिनिधित्व (representation) होता है। दैव निदर्शन में यद्यपि प्रत्येक इकाई के चुने जाने का समान अवसर रहता है परन्तु अवसर के कारण अनेक महत्त्वपूर्ण समूहों का प्रतिनिधित्व न्यादर्श में नहीं हो पाता। मिश्रित निदर्शन में कोई ऐसा महत्त्वपूर्ण समूह नहीं रह जाता जिसका प्रतिनिधित्व न्यादर्श में न हो।

खण्ड-ब लघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. भारतीय सांख्यिकी के जनक के बारे में संक्षेप में लिखिए।

उत्तर

भारतीय सांख्यिकी के जनक
(Father of Indian Statistics)

भारतीय सांख्यिकी के जनक कहे जाने वाले **प्रोफेसर प्रशांत चन्द्र महालनोबिस** का जन्म कलकत्ता (कोलकाता) में एक सुस्थापित परिवार में हुआ था। इनका परिवार धनी था तथा इनके सभी सदस्य उद्यमी, साहसी थे तथा वे ब्रह्मसमाज का पालन करते थे तथा बंगाल में जीवन के सभी क्षेत्रों में सक्रिय थे। प्रोफेसर महालनोबिस का जन्म 29 जून, 1893 को 210 कार्नवालिस स्ट्रीट में हुआ था। वह प्रबोध चन्द्र महालनोबिस तथा निरोदवासिनी देवी के दो पुत्रों तथा चार पुत्रियों में सबसे बड़े थे। प्रोफेसर ने 1912 में प्रेसीडेंसी कॉलेज में कलकत्ता विश्वविद्यालय से भौतिक में ऑनर्स के साथ विज्ञान स्नातक की उपाधि प्राप्त की है जिसके बाद वे कैम्ब्रिज विश्वविद्यालय में शामिल होने के लिए इंग्लैंड चले गए थे। 17 दिसम्बर, 1913 को, प्रोफेसर ने सांख्यिकी में उन्नत अनुसंधान तथा प्रशिक्षण के लिए भारतीय सांख्यिकी संस्थान (आई०एस०आई०) की स्थापना की। कुछ वर्षों के पश्चात्, 1950 के दशक के दौरान, आई०एस०आई० के पश्चिम बंगाल के कोलकाता जिले के बारानगर में वर्तमान परिसर में स्थानान्तरित कर दिया गया। प्रोफेसर प्रशिक्षण से एक भौतिक विज्ञानी तभी सांख्यिकीविद थे। उन्होंने आई०एस०आई० के निर्माता, भारतीय सांख्यिकी तकनीकों के अनुप्रयोग में अग्रणी, दूसरी पंचवर्षीय योजना के निर्माता तथा बहुत कुछ के रूप में शैक्षिक योगदान दिया है।

सांख्यिकीय विज्ञान एक प्रारम्भिक क्षेत्र था तथा 1920 के दशक से पहले भारतीयों को व्यावहारिक रूप से इसकी सूचना नहीं थी। सांख्यिकी का विकास करना एक नए क्षेत्र की खोज करने के समान था तथा प्रोफेसर के समान एक अग्रणी तथा साहसी की आवश्यकता थी जो समस्त विरोधों से लड़ने, बाधाओं को दूर करने तथा समाज के साथ-साथ विज्ञान की उन्नति के लिए ज्ञान के नए व्यापक मार्ग को खोलने का साहस तथा दृढ़ता रखता हो। प्रोफेसर ने सांख्यिकी को 'आगमनात्मक अनुमान के सार्वभौमिक उपकरण', प्राकृतिक तथा सामाजिक विज्ञान में अनुसंधान तथा तकनीकी अनुप्रयोगों तथा व्यापक अर्थों में मानव प्रयासों की क्षमता में वृद्धि करने के लिए प्रमुख तकनीक के रूप में सोचा। सामाजिक-आर्थिक योजना तथा नीति निर्माण में सांख्यिकी के महत्त्व के बारे में जन जागरूकता उत्पन्न करने के लिए प्रत्येक वर्ष 29 जून को भारत में राष्ट्रीय सांख्यिकी दिवस के रूप में मनाया जाता है। प्रोफेसर महालनोबिस ने भारत की दूसरी पंचवर्षीय योजना (1956-1961) के निर्माण में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाई है जिसने भारत में औद्योगीकरण तथा विकास का मूल योजना तैयार किया है। उनकी सबसे उल्लेखनीय उपलब्धि दो आँकड़ों के समूह की तुलना के लिए एक उपाय तैयार करना है तथा इसे 'महालनोबिस दूरी' कहा जाता है तथा अध्ययन का अधिकतम उपयोग वर्गीकरण एवं समूह विश्लेषण के क्षेत्र में किया जाता है। उनके द्वारा फ्रैक्टाइल ग्राफिकल विश्लेषण की तकनीक भी पेश की गई तथा विभिन्न समूहों की सामाजिक-आर्थिक स्थितियों की तुलना करने के लिए इसका उपयोग किया जाता है। उन्होंने ओडिशा में बाढ़ से सम्बन्धित आँकड़ों का भी विश्लेषण किया तथा 1926 में निष्कर्ष प्रकाशित किए तथा बाद में इस विश्लेषण को महानदी नदी पर हीराकुड बाँध के निर्माण का आधार बनाया गया था।

प्र.2. जनगणना तथा न्यादर्श में अन्तर स्पष्ट कीजिए।

उत्तर

जनगणना तथा न्यादर्श में अन्तर
(Differences between Census and Sample)

जनगणना तथा न्यादर्श में अन्तर अग्रलिखित है—

क्र० सं०	आधार	जनगणना	न्यादर्श
1.	**अर्थ**	जब जनसंख्या के सदस्यों के सम्बन्ध में प्रासंगिक सूचना एकत्र करने के लिए अध्ययन किया जाता है इसे जनगणना कहते हैं।	जब प्रासंगिक सूचना एकत्र करने के लिए लक्षित जनसंख्या से एक प्रतिनिधि नमूना तैयार किया जाता है, तो इसे न्यादर्श कहते हैं।
2.	**आँकड़ों की विश्वसनीयता**	जनगणना के द्वारा प्राप्त आँकड़े सम्पूर्ण तथा विश्वसनीय होते हैं।	न्यादर्श द्वारा आँकड़े पूर्ण रूप से विश्वसनीय नहीं होते हैं, इनमें कुछ त्रुटियाँ हो सकती हैं।
3.	**समय, धन की खपत**	चूँकि यह पूरी जनसंख्या को शामिल करता है अत: यह समय तथा अधिक व्यय वाली प्रक्रिया होती है।	चूँकि यह जनसंख्या के केवल कुछ भागों को शामिल करता है अत: यह समय लेने वाली प्रक्रिया नहीं है।
4.	**निदर्शन विचरण**	इसमें लगभग निदर्शन विचरण नहीं होता है क्योंकि प्रयोग किए गए आँकड़े पूरी जनसंख्या से लिए जाते हैं।	चूँकि निदर्शन में प्रयुक्त आँकड़े जनसंख्या के कुछ ही समूहों से लिए जाते हैं, इसलिए निदर्शन विचरण हो सकता है।
5.	**आँकड़ों का आरेख**	जनगणना में, जनसंख्या के सभी तत्त्वों को आँकड़ों में परिवर्तित करने के लिए इसे संसाधित किया जाता है।	निदर्शन में जनसंख्या के केवल मुख्य प्रतिनिधि तत्त्वों को आँकड़ों में परिवर्तित करने के लिए संसाधित किया जाता है।
6.	**प्रयोज्यता**	सीमित क्षेत्र सहित अनुसंधान के लिए जनगणना लागू की जाती है।	निदर्शन एक बड़े क्षेत्र सहित अनुसंधान के लिए लागू किया जाता है।
7.	**एकरूपता**	यह विषम तत्त्वों वाले जनसंख्या के लिए उपयोगी हो सकता है।	यह समरूप तत्त्वों वाली जनसंख्या के लिए उपयोगी होती है।

प्र.3. प्राथमिक आँकड़ों/समंकों के लाभ संक्षेप में लिखिए।

उत्तर

प्राथमिक आँकड़ों के लाभ
(Advantages of Primary Data)

निम्नलिखित कारणों से अनुसंधान में प्राथमिक आँकड़ा महत्त्वपूर्ण है—

1. **विश्वसनीयता**—प्राथमिक आँकड़ों को वास्तविक रूप से शोधकर्त्ता द्वारा एकत्र किया जाता है। यह सहायक आँकड़ों की तुलना में अधिक विश्वसनीय होते हैं। प्राथमिक आँकड़े स्पष्ट तथा सटीक होते हैं।
2. **तकनीकों की विविधता**—विभिन्न तकनीकों के माध्यम से प्राथमिक आँकड़े एकत्र किए जा सकते हैं। प्राथमिक आँकड़ों को अभिलिखित करने तथा विश्लेषण करने के लिए कई साधन तथा शैलियाँ उपलब्ध हैं, जैसे कि साक्षात्कार, प्रश्नावली, अवलोकन अंकेक्षण इत्यादि। जहाँ तक सम्भव हो यह शोधकर्त्ता को प्रत्येक क्षेत्र में प्रभावी ढंग से कार्य करने का अवसर प्रदान करता है।
3. **विशेष स्थितियों के साथ व्यापक क्षेत्र**—प्राथमिक आँकड़े विशेष स्थितियों के साथ कई क्षेत्रों में उपयोगी/लागू होते हैं। कभी-कभी शोधकर्त्ता को उन विशेष स्थितियों के बारे में जानकारी की आवश्यकता होती है जिनके बारे में पहले से कोई जानकारी न उपलब्ध हो। इस तरह की समस्या या स्थितियों के समाधान के लिए प्राथमिक आँकड़ों का संग्रहण एकमात्र उपाय है। प्राथमिक आँकड़ों की जानकारियों को समाधान के रूप में विश्वसनीय माना जाता है।

4. **प्रक्रिया पर पूर्ण नियन्त्रण**—कभी-कभी संगठन शोधकर्त्ताओं से व्यापक दृष्टिकोण में कार्य करने के बजाय विशिष्ट क्षेत्रों में कार्य (शोध) करने की अनुमति देता है। प्राथमिक आँकड़ों का संग्रहण शोधकर्त्ताओं को इस बात की अनुमति देता है कि अपने प्रसंग से सम्बन्धित आँकड़ों का एकत्रीकरण करके संगठन के लाभ को ध्यान में रखते हुए उन आँकड़ों का प्रतिनिधित्व करे। शोधकर्त्ता अध्ययन की अवधि, स्थान जिसमें अनुसंधान किया जाना है, समय अवधि इत्यादि भी निर्धारित कर सकते हैं।
5. **लागत प्रभावी संग्रह**—प्राथमिक आँकड़ों की संग्रहण लागत प्रभावी होती है अर्थात् आँकड़ों के संग्रहण में धन अत्यधिक प्रभावित होता है। कई बार द्वितीयक आँकड़ों के संग्रहण में समय तथा धन की बर्बादी होती है, इसके साथ ही प्राप्त परिणाम व्यर्थ साबित होते हैं परन्तु प्राथमिक आँकड़ों के संग्रहण में शोधकर्त्ता सम्भावित स्रोतों पर ध्यान केन्द्रित कर विश्वसनीय परिणामों की प्राप्ति करता है।
6. **सूचना का एकल स्वामित्व**—प्राथमिक आँकड़ों से प्राप्त जानकारी नवीन तथा वास्तविक होती है इसलिए इसे प्रतिलिप्याधिकार/कॉपीराइट भी किया जा सकता है। इस प्रकार शोधकर्त्ता अपनी सूचनाओं का स्वामी बन जाता है अर्थात् जो भी तथ्य तथा सूचना प्रकट की गई हैं। शोधकर्त्ता लाभ प्राप्त कर सकते हैं। द्वितीयक आँकड़ों के मामले में ऐसा नहीं होता है, क्योंकि यह पूर्व से ही अन्य व्यक्ति या संगठन से सम्बन्धित होता है।

प्र.4. द्वितीय आँकड़ों के लाभ संक्षेप में लिखिए।

उत्तर

द्वितीयक आँकड़ों के लाभ
(Advantages of Secondary Data)

निम्न विधियों से अनुसंधान के लिए द्वितीयक आँकड़े महत्त्वपूर्ण हैं—

1. **मितव्ययी प्रणाली**—द्वितीयक आँकड़ों का उपयोग आसान तथा सरल है। यह प्राथमिक आँकड़ों की तुलना में आर्थिक रूप से मजबूत प्रणाली है। यहाँ तक कि कुछ द्वितीयक आँकड़े बिना किसी लागत के प्राप्त किए जाते हैं।
2. **समय की बचत**—जैसा कि विगत है कि द्वितीयक आँकड़े पहले से ही अन्य शोधकर्त्ता द्वारा एकत्रित तथा संकलित होते हैं इसलिए इन आँकड़ों को एकत्रित करने में कम समय लगता है। इसमें शोधकर्त्ताओं को केवल उस स्रोत की खोज करनी पड़ती है जिससे ये आँकड़े प्राप्त किए जाएँगे।
3. **गुणवत्ता**—द्वितीयक आँकड़ों की गुणवत्ता अद्वितीय तथा दुर्लभ होती है। इसका कारण यह है कि इन आँकड़ों का संग्रहण प्रशिक्षित व्यक्तियों द्वारा किया जाता है जो कि इस क्षेत्र के विशेषज्ञ होते हैं।
4. **मापने के उपकरण की आवश्यकता नहीं**—इस प्रकार के आँकड़ों को एकत्रित करने तथा आवश्यक जानकारी के संग्रहण में किसी भी प्रकार के साधन या उपकरण की आवश्यकता नहीं होती है; क्योंकि यह संकलन उन आँकड़ों पर आधारित होता है जिनका अभिलेखन पहले से किया जा चुका है। वर्तमान शोधकर्त्ताओं को सम्बन्धित विषयों से सन्दर्भित आँकड़ों का चयन करके उन पर शोध करना होता है।
5. **उपलब्धता**—द्वितीयक आँकड़े व्यापक रूप में उपलब्ध होने के कारण सहजता से प्राप्त होते हैं। द्वितीयक आँकड़े तब विशेष रूप से सहायक होते हैं जबकि प्राथमिक आँकड़ों को एकत्रित करना कठिन होता है। द्वितीयक आँकड़ों के रूप में अधिकांश आँकड़े उपलब्ध होते हैं जिसका उपयोग शोध के लिए किया जाता है।
6. **तुलना का आधार**—द्वितीयक आँकड़े प्राथमिक आँकड़े की तुलना तथा विश्लेषण के लिए भी प्रयोग किए जाते हैं। इस प्रकार शोधकर्त्ता आँकड़ों से सम्बन्धित कई प्रकार की व्याख्या कर सकते हैं।
7. **समन्वेशी शोध में उपयोगी**—कभी-कभी किसी विशेष घटना या विषय के बारे में बेहतर जानकारी प्राप्त करने के उद्देश्य से समन्वेशी शोध किया जाता है इस प्रकार के शोध के लिए द्वितीयक आँकड़े विभिन्न स्रोतों से व्यापक रूप में जानकारी एकत्रित करके उद्देश्य की पूर्ति करते हैं। यह शोधकर्त्ताओं को आगे के शोध को कार्यान्वित करने में सहायक होता है।

8. **सम्भव विकल्प उत्पन्न करता है**—द्वितीयक आँकड़े एक ऐसे स्रोत होते हैं जो अनुसंधान में विभिन्न समस्याओं से सम्बन्धित शोधकर्त्ताओं को भिन्न प्रकार के विकल्प प्रदान करते हैं। शोधकर्त्ताओं विभिन्न दृष्टिकोणों, स्रोतों तथा विधियों आदि के माध्यम से इन आँकड़ों द्वारा प्रदान किए गए समाधानों का विश्लेषण तथा अध्ययन शोधकर्त्ताओं द्वारा/को करना आवश्यक होता है।

प्र.5. प्राथमिक आँकड़ों से होने वाली हानियों को लिखिए।

उत्तर

प्राथमिक आँकड़ों की हानियाँ (Disadvantages of Primary Data)

प्राथमिक आँकड़ों की निम्नलिखित हानियाँ हैं—

1. **बहुमूल्य प्रसंग**—प्राथमिक आँकड़ों के एकत्रीकरण में अत्यधिक धन की आवश्यकता होती है। इसीलिए यह एक खर्चीली प्रणाली है। यह कई प्रकार की प्रक्रिया से सम्बन्धित है, जैसे-तकनीक का चयन करना, प्रश्नों को तैयार करना जानकारी एकत्रित करना या लक्ष्य अथवा उद्देश्य का अवलोकन करने हेतु प्रशिक्षित पेशेवरों की नियुक्ति करना आदि सम्मिलित है। इन सभी क्रियाओं में बड़ी राशि व्यय की जाती है जिससे यह अत्यधिक महँगी हो जाती है।
2. **समय का उपयोग**—प्रभावी ढंग से प्राथमिक आँकड़ों के संग्रहण में अत्यधिक समय लगता है, जिसमें समय की खपत बहुत होती है। अनुसंधान योजना विकसित करना, सूचना के स्रोत निर्धारित करना तथा आँकड़ों के संग्रह के विधियों का चयन करना समय लेने वाली गतिविधियाँ होती हैं।
3. **कुछ समय के लिए संभव**—हालाँकि प्राथमिक आँकड़ों को सूचना का विश्वसनीय स्रोत माना जाता है, परन्तु कभी-कभी प्राथमिक आँकड़े एकत्र करना आसान कार्य नहीं होता है, क्योंकि सूचना का स्रोत शोधकर्त्ता की पहुँच में नहीं होता है। जिससे अधिक धनराशि की शोधकर्त्ता को हानि हो सकती है।
4. **आँकड़ों की अधिकता/प्रचण्ड मात्रा**—कभी-कभी प्राथमिक स्रोतों द्वारा प्राप्त आँकड़ों की मात्रा बहुत अधिक होती है। इतनी बड़ी मात्रा होने के फलस्वरूप परिणाम की शुद्धता में कई सन्देह उत्पन्न होते हैं। आँकड़ों का विश्लेषण तथा स्पष्टीकरण बड़ी मात्रा में होने के कारण जटिल तथा बोझिल हो जाता है।
5. **उत्तर देने की अनिच्छा**—कई स्थितियों में प्रतिभागी असत्य सूचना देकर या उत्तर देने की अनिच्छा दिखाकर आँकड़ों के संग्रहण में सहयोग नहीं करते हैं। प्राथमिक आँकड़ों के संग्रहण में ये कारक बाधा के रूप में कार्य करते हैं तथा प्रतिक्रियाओं में पूर्वाग्रह को भी दर्शाते हैं।

प्र.6. द्वितीयक आँकड़ों से होने वाली हानियों को लिखिए।

उत्तर

द्वितीयक आँकड़ों की हानियाँ (Disadvantages of Secondary Data)

द्वितीयक आँकड़ों की हानियाँ निम्नलिखित हैं—

1. **प्रासंगिकता**—हालाँकि जैसा कि द्वितीयक आँकड़े किसी विशेष स्थिति के शोधकर्त्ताओं द्वारा कई स्रोतों से एकत्रित किए जाते हैं, परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि यह आँकड़े वर्तमान शोध के लिए उपयोगी हों। कई कारणों की वजह से द्वितीयक आँकड़े भिन्न हो सकते हैं, जैसे—मापन, समंक विश्लेषण शैली, शोध का उद्देश्य, समयावधि आदि।
2. **सटीकता**—कई कारकों की उपलब्धता के कारण द्वितीयक आँकड़े की सटीकता पर प्रश्न उठते हैं। यह कारक कई प्रकार के हो सकते हैं, जैसे—अनुचित नमूना शैली, अनुचित आँकड़ें संग्रहण विधि आदि। इन सभी कारकों के कारणों से द्वितीयक आँकड़े हर बार सटीक नहीं होते हैं।
3. **पुराने/अप्रचलित आँकड़े**—वर्तमान आवश्यकता तथा द्वितीयक आँकड़ों के मध्य एक महत्त्वपूर्ण समयान्तराल होता है, क्योंकि द्वितीयक आँकड़े गत प्रयोग तथा पुराने प्राथमिक आँकड़ों पर आधारित होते हैं इसलिए कई बार यह वर्तमान परिदृश्य/समय में लागू नहीं होते हैं। अत: इस प्रकार के आँकड़े अनुसंधान कार्य की प्रभावशीलता के लिए जोखिम होता है।
4. **शोध निष्कर्षों का गैर-प्रकटीकरण**—किसी विशेष शोध के निष्कर्षों तक पहुँचना आसान कार्य नहीं होता है। कुछ संगठन या शोध संस्थान इसको प्रकटीकरण की अनुमति नहीं प्रदान करते हैं।

5. **स्त्रोतों की पहुँच में कठिनाई**—कभी -कभी शोधकर्त्ता या व्यक्ति द्वितीयक आँकड़ों के उचित स्त्रोत की पहचान करने में सक्षम नहीं होते हैं। इससे भ्रमात्मक निष्कर्ष निकलने की सम्भावना बनी रहती है।

प्र.7. प्राथमिक एवं द्वितीयक आँकड़ों की तुलना कीजिए।

उत्तर

प्राथमिक आँकड़े बनाम द्वितीयक आँकड़े
(Primary Data *vs* Secondary Data)

क्र० सं०	अन्तर का आधार	प्राथमिक आँकड़े	द्वितीयक आँकड़े
1.	**अर्थ**	वे आँकड़े जिन्हें शोधकर्त्ता अपने निर्धारित उद्देश्य तथा समस्या या स्थिति की पूर्ति के लिए पहली बार संगृहीत करता है। वे प्राथमिक आँकड़े कहलाते हैं। **उदाहरण के लिए**—ऐतिहासिक एवं कानूनी दस्तावेज प्रत्यक्षदर्शी खाते, प्रयोगों के परिणाम, सांख्यिकीय आँकड़े रचनात्मक लेखन के भाग, आडियो एवं वीडियो विवरण, भाषण एवं कला वस्तुएँ आदि।	द्वितीयक आँकड़े वे आँकड़े होते हैं, जिनका संकलन पहले से ही किसी व्यक्ति या संस्था द्वारा किया जा चुका है तथा वर्तमान में शोधकर्त्ता अपने प्रयोग में लाता है।
2.	**लागत**	प्राथमिक आँकड़ों के संग्रहण में कई तकनीक तथा साधन प्रयोग किए जाते हैं इसलिए यह महँगी विधि है।	प्राथमिक आँकड़ों की तुलना में इसमें कम लागत लगती है। द्वितीयक आँकड़ा आसानी से प्राप्त किया जा सकता है जिससे शून्य या न्यूनतम लागत आती है।
3.	**स्त्रोत**	प्राथमिक आँकड़े प्रत्यक्ष रूप से उत्तरदाताओं से एकत्रित किए जाते हैं।	यह कुछ पहले से उपलब्ध प्रकाशित या अप्रकाशित स्त्रोतों से एकत्र किया जाता है।
4.	**विधियाँ**	प्राथमिक आँकड़े के संकलन में साक्षरता, प्रश्नावली, रिक्त फार्म, अवलोकन व सर्वे शामिल होते हैं।	द्वितीयक आँकड़े पत्र-पत्रिकाओं, सरकारी तथा गैर-सरकारी प्रकाशनों की सहायता से तैयार किए जाते हैं।
5.	**विश्वसनीयता**	वास्तविक तथा नवीन होने के कारण प्राथमिक आँकड़े अत्यधिक विश्वसनीय हैं।	द्वितीयक आँकड़े की विश्वसनीयता तुलनात्मक रूप से कम विश्वसनीय होते हैं; क्योंकि यह आँकड़ा विभिन्न समस्या या स्थिति से सम्बन्धित होता है।
6.	**वैज्ञानिक विधि**	प्राथमिक आँकड़ों का चयन प्रकृति में वैज्ञानिक होता है। इसमें समस्या या स्थिति के सम्बन्ध में परिकल्पना करना, आँकड़े एकत्र करना, परिकल्पना को सत्य एवं असत्य करने के लिए आँकड़ों का विश्लेषण करना शामिल होता है।	द्वितीयक आँकड़ों का चयन हस्तगत होता है। यह स्त्रोत की सामग्री एवं वर्तमान शोध विषय के अनुसार चुना जाता है।
7.	**सावधानी**	प्राथमिक आँकड़ों के प्रयोग में सावधानी तथा सतर्कता की आवश्यकता कम होती है।	द्वितीयक आँकड़ों के चयन में अधिक सावधानी बरती जाती है।
8.	**आँकड़ों का रूप**	प्राथमिक आँकड़ों का प्रपत्र कच्चे जैसे होता है जिसे सार्थक सूचना प्राप्त करने के लिए संसाधित करने की आवश्यकता होती है।	द्वितीयक आँकड़े पूर्व ही संसाधित आँकड़े होते हैं, जिन्हें शोध अध्ययन में प्रयोग करने के लिए विश्लेषण एवं अध्ययन करने की आवश्यकता है।
9.	**शुद्धता**	प्राथमिक आँकड़े मूल एवं सटीक होते हैं, क्योंकि यह आवश्यकता के अनुसार विकसित किया गया है।	द्वितीयक आँकड़े पूर्ण रूप से सटीक नहीं होते हैं क्योंकि इन्हें किसी अन्य माध्यम से एकत्रित किया जाता है।

प्र.8. सांख्यिकीय इकाई की विशेषताएँ और प्रकार लिखिए।

उत्तर

सांख्यिकीय इकाई की विशेषताएँ
(Characteristics of Statistical Units)

सांख्यिकी इकाई की प्रमुख विशेषताएँ निम्नलिखित हैं—

1. परीक्षण के उद्देश्य के लिए इकाई उपयुक्त होनी चाहिए।
2. इकाई ऐसी होनी चाहिए जिसकी माप स्थायी हो।
3. आँकड़े सरलता से स्पष्ट रूप से समझने योग्य होने चाहिए।
4. इकाई में तुलनीय होनी चाहिए।
5. इकाई स्पष्ट एवं उचित प्रकार से परिभाषित होनी चाहिए।
6. चयनित इकाई में एकरूपता होनी चाहिए।
7. इकाई पर्याप्त होनी चाहिए तथा असत्य नहीं होनी चाहिए।

सांख्यिकीय इकाई के प्रकार (Kinds of Statistical Units)

सांख्यिकीय इकाइयाँ निम्नलिखित दो प्रकार की होती हैं—

1. **आँकड़ों के संग्रहण के लिए इकाई**—इन इकाइयों में आँकड़ों का संग्रहण गणना तथा मापन द्वारा किया जाता है। गिनती भौतिक वस्तुओं के लिए तथा माप गुणात्मक पहलुओं के लिए प्रयोग की जाती है। इसलिए आँकड़ों के संग्रह प्रक्रिया असतत मूल्यों या औसत दर्जे के मूल्यों से निपट सकती है। यहाँ असतत मान मौतों की संख्या, व्यक्तियों की संख्या आदि तथा औसत दर्जे का मान—किलोग्राम, मीटर, लीटर आदि होता है। यह तीन प्रकार की होती है—

   (i) **सरल इकाई**—सरल इकाई सिर्फ एक शब्द को व्यक्त करती है। साधारण तथा सहज होने के अतिरिक्त यह इकाई किसी भी विशेषता को व्यक्त नहीं करती है। **उदाहरण के लिए**—कार्यकर्त्ता, घंटा, रुपया, घर आदि के रूप में सरल इकाइयाँ होती हैं।

   (ii) **मिश्रित इकाई**—मिश्रित इकाई वह इकाई है जिसमें एक से अधिक शब्दों को व्यक्त किया जाता है। यह कुछ विशेषता व्यक्त करती है। अर्थात् सरल इकाई के पूर्व विशेषण जोड़ देने से बनती है। **उदाहरण के लिए**—कुशल श्रमिक, मशीन, घण्टे इत्यादि।

   (iii) **जटिल इकाई**—वह इकाई जो कि दो या दो से अधिक सरल इकाइयों को मिलाकर बनायी जाती है, जटिल इकाई कहलाती है। **उदाहरण के लिए**—प्रति मशीन घंटे का उत्पादन एक जटिल इकाई है।

2. **सांख्यिकीय विश्लेषण तथा निर्वाचन के लिए इकाइयाँ**—सांख्यिकीय इकाई संग्रहण का मुख्य उद्देश्य दो विभिन्न आँकड़ों के समूह के मध्य तुलना करना है। यह तुलना समय या स्थान के आधार पर की जाती है। इकाई द्वारा विभिन्न मापों में व्यक्त तथ्यों को ही एक माप के रूप में परिवर्तित करके तुलना की जाती है।

   ये इकाइयाँ निम्न प्रकार की हो सकती हैं—

   (i) **गुणांक**—यह अंश तथा हर की तुलना के लिए उपयोग की जाने वाली इकाई है। इसका सूत्र है—

   गुणांक = संख्या/कुल आधार संख्या

   (ii) **दर**—इसे सामान्यतः प्रति सौ, प्रति हजार या प्रति मिलियन आदि में व्यक्त किया जाता है, **उदाहरण के लिए**—मृत्यु दर प्रति हजार के रूप में व्यक्त की जानी चाहिए।

   (iii) **अनुपात**—इसका उपयोग दो सजातीय तथ्यों के सापेक्ष मूल्यों को व्यक्त करने के लिए किया जाता है। **उदाहरण के लिए**—यदि किसी कारखाने में 800 पुरुष तथा 200 महिलाएँ हैं तो पुरुषों तथा महिलाओं का अनुपात 4 : 1 होगा।

प्र.9. सम्पादन की अनिवार्यता को संक्षेप में समझाइए।

उत्तर

सम्पादन की अनिवार्यता
(Essentials of Editing)

सम्पादन निम्नलिखित बिंदुओं को ध्यान में रखते हुए किया जाना चाहिए—

1. **शुद्धता**—आँकड़ों के सम्पादन को रिकॉर्ड किए गए आँकड़ों की सटीकता को ध्यान में रखना चाहिए। आँकड़े एकत्रित करते समय, अनुसन्धानकर्त्ता को उत्तरों की विश्वसनीयता की जाँच स्वयं करनी होती है, जो सदैव सम्भव नहीं होता है।

विनिर्दिष्ट रूप से महत्त्वपूर्ण आँकड़ों के लिए प्रश्नावली "चेक प्रश्न" का उपयोग करके उत्तरों की सटीकता का अनुमान लगाया जा सकता है। 'चेक प्रश्न' प्रत्यक्ष रूप से उत्तर की अस्पष्टता का आकलन कर सकते हैं या अनुसन्धानकर्त्ता को सही उत्तर प्राप्त करने में सहायता कर सकते हैं। अनुसन्धानकर्त्ता प्रश्नावली पर अन्य सम्बन्धित प्रश्नों के साथ भी उत्तर पूरा कर सकते हैं। सही उत्तर के लिए अनुसन्धानकर्त्ता कभी-कभी उत्तरदाताओं से भी सम्पर्क कर सकते हैं।

2. **पूर्णता**—प्रभावी सम्पादन के लिए, यह ध्यान में रखा जाना चाहिए कि कोई चूक न हो। इसलिए यह अनिवार्य है कि सभी प्रश्न पूछे जाएँ तथा अनुरूप उत्तर दर्ज किए जाएँ। यदि आँकड़े, अनुपस्थित है, तो अनुसन्धानकर्त्ता अनुपस्थित आँकड़ों को प्रश्नावली में अन्य आँकड़ों से प्राप्त कर सकता है या आँकड़ों को पुनर्प्राप्ति द्वारा पूर्ण कर सकता है।
3. **संगति**—जब अनुसन्धानकर्त्ता आँकड़ों को सम्पादित करते हैं तो उत्तरों या प्रतिक्रियाओं की निरंतरता बनाए रखना महत्त्वपूर्ण विचारों में से एक है। यह सत्यापित किया जाना चाहिए कि उत्तर उसी प्रकार से दिए गए हैं जैसे प्रश्न पूछे गए हैं। इसका अर्थ यह है कि प्रश्न के उत्तर, सभी उत्तरदाताओं द्वारा एक ही प्रकार से दिया जाना चाहिए। अनुपयुक्त तथा अपर्याप्त उत्तरों से भ्रम तथा गलत व्याख्या होती है, इसलिए अनुसन्धानकर्त्ता को यह सुनिश्चित करने की आवश्यकता है कि उत्तरों से उचित निष्कर्ष निकले।

प्र.10. आँकड़ों का सम्पादन कितने चरणों में किया जाता है? समझाइए।

उत्तर

सम्पादन के चरण
(Stages of Editing)

आँकड़ों का सम्पादन दो चरणों में किया जा सकता है—

1. **क्षेत्र सम्पादन**—यह सम्पादन प्रसंस्करण आँकड़ों के संग्रह के दौरान किया जाता है। सभी एकत्रित उत्तरों या प्रतिक्रियाओं की त्रुटियों तथा चूक के लिए जाँच की जाती है। आँकड़े एकत्रित करके, शोधकर्त्ता तुरन्त प्रतिक्रियाओं की निरन्तरता, सटीकता तथा पूर्णता को सत्यापित करते हैं। क्षेत्रीय सम्पादन करने की दो विधियाँ निम्नलिखित हैं—
   (i) **अनुसन्धानकर्त्ता द्वारा**—समय के अभाव के कारण, साक्षात्कारकर्त्ता साक्षात्कार के दौरान प्रतीकों या संक्षिप्त नोट्स के रूप में उत्तरों को रिकॉर्ड करते हैं। साक्षात्कार पूरा करने के पश्चात्, अनुसन्धानकर्त्ता उत्तरों की समीक्षा करता है, यदि आवश्यक हो तो उनमें सुधार करता है, तथा प्रत्येक प्रश्न के उत्तर को निर्दिष्ट करते हुए प्रश्नावली भरता है।
   (ii) **पर्यवेक्षक द्वारा**—क्षेत्रीय सम्पादन का यह रूप, साक्षात्कार दल के पर्यवेक्षक द्वारा किया जाता है, जिसका कार्य उत्तरदाताओं के नमूने से आँकड़े एकत्र करना है। पर्यवेक्षक आँकड़ों की गुणवत्ता के लिए उत्तरदायी होते हैं। इस कार्य को प्राप्त करने के लिए, वह सदैव यह सुनिश्चित करता है कि सभी अनुसन्धानकर्त्ता अपना कार्य ईमानदारी से कर रहे हैं। यह साक्षात्कार के उत्तर की समीक्षा करके प्राप्त किया जाता है तथा यदि प्रथम चरण में कोई त्रुटि पाई जाती है तो उसे ठीक किया जाता है।
2. **कार्यालय/केन्द्रीय सम्पादन**—जब भरे गए फार्म मुख्य कार्यालय में आ जाते हैं, तो कोई एक व्यक्ति या दल इस फार्म को संसाधित करता है। इस प्रक्रिया को कार्यालय "सम्पादन" या "केन्द्रीय सम्पादन" के रूप में जाना जाता है। क्षेत्रीय सम्पादन की तुलना में कार्यालय सम्पादन कहीं अधिक सटीक होता है। यह मेल सर्वेक्षण के लिए सबसे उपयुक्त है क्योंकि इस मामले में कोई क्षेत्र सर्वेक्षण नहीं किया जाता है।

प्र.11. वर्गीकरण तथा सारणीयन में अन्तर को संक्षेप में समझाइए।

उत्तर

वर्गीकरण तथा सारणीयन में अन्तर
(Differences between Classification and Tabulation)

वर्गीकरण तथा सारणीयन दोनों ही सांख्यिकीय अनुसन्धान कार्य में महत्त्वपूर्ण क्रियाएँ हैं जिनके द्वारा संकलित समंकों को संक्षिप्त बनाने और उन्हें व्यवस्थित तथा क्रमबद्ध करने में सहायता मिलती है। फिर भी दोनों में महत्त्वपूर्ण अन्तर अग्रलिखित हैं—

क्र० सं०	अन्तर का आधार	वर्गीकरण	सारणीयन
1.	क्रम	आँकड़ों को पहले वर्गीकृत किया जाता है।	सारणीयन वर्गीकरण के पश्चात् किया जाता है।
2.	प्रकृति	वर्गीकरण सांख्यिकीय विश्लेषण की एक विधि है।	सारणीयन समंकों के प्रस्तुतीकरण की एक रीति है।
3.	आधार	वर्गीकरण मूल समंकों की विशेषताओं के आधार पर किया जाता है।	सारणीयन का आधार वर्गीकृत आँकड़े होते हैं।
4.	प्रस्तुतीकरण	वर्गीकरण में समंकों को उनकी समानता व असमानता के आधार पर अलग-अलग वर्गों में विभाजित किया जाता है।	सारणीयन में वर्गीकृत समंकों को खानों व पंक्तियों में क्रमबद्ध करके प्रस्तुत किया जाता है।

प्र.12. निम्नलिखित सूचना को सारणीबद्ध कीजिए—

एक कॉलेज द्वारा आयोजित पर्यटन में 80 व्यक्तियों ने भाग लिया जिनमें से प्रत्येक ने औसत रूप से ₹ 15.50 का भुगतान किया। इनमें से 60 छात्र थे और प्रत्येक ने ₹ 16 चन्दा दिया। अध्यापकों से अधिक दर से चन्दा वसूल किया गया। नौकरों (पुरुष) की संख्या 6 थी और उनसे कोई चन्दा नहीं लिया गया। स्त्रियों की संख्या कुल पर्यटकों की संख्या का 20 प्रतिशत थी जिनमें से एक अध्यापिका थी।

हल **श्रेणी, लिंग एवं चन्दा के आधार पर एक कॉलेज के पर्यटक दल का विवरण**

पर्यटक श्रेणी	लिंग			अंशदान (₹)	
	पुरुष	महिला	योग	प्रति व्यक्ति	कुल राशि
छात्र	45	15	60	16	960
अध्यापक	13	1	14	20	280
नौकर	6	—	6	—	—
योग	**64**	**16**	**80**	**15.5**	**1,240**

Working Notes :

80 व्यक्तियों का औसत भुगतान = ₹ 15.50

∴ कुल भुगतान = 15.50 × 80 = ₹ 1,240

60 छात्रों द्वारा कुल भुगतान = 16 × 60 = ₹ 960

∴ अध्यापकों द्वारा भुगतान = 1,240 − 960 = ₹ 280

∴ प्रति अध्यापक भुगतान = $\frac{280}{14}$ = ₹ 20

प्र.13. एक समाचार-पत्र विवरण में एक ही परिवार में रहने वाले क्षय-ग्रस्त व्यक्तियों में फ्लू के प्रभाव से सम्बन्धित निम्न अवतरण प्रकाशित हुआ—

एक लाख निवासियों में से ठीक पाँचवें भाग के बराबर व्यक्तियों में क्षयरोग (T.B.) के लक्षण प्रकट हुए और उनमें से 5,000 व्यक्ति फ्लू से पीड़ित हुए, परन्तु उनमें से केवल 1,000 व्यक्ति ही दूषित घरों में रहते थे। इसके विपरीत जिन्हें फ्लू नहीं हुआ, ऐसे क्षय-ग्रस्त व्यक्तियों के पन्द्रहवें भाग पर अभी भी संक्रमण का प्रभाव था। कुल मिलाकर 21,000 फ्लू से पीड़ित हुए और 41,000 संक्रमण से प्रभावित थे। परन्तु ऐसे व्यक्तियों की संख्या केवल 2,000 थी जो फ्लू के शिकार हुए और क्षयरोग से प्रभावित नहीं हुए तथा जो ऐसे घरों में रहते थे जहाँ फ्लू का कोई और रोगी नहीं था (अर्थात् अदूषित घरों में) उपर्युक्त सूचना को स्पष्ट सारणी के रूप में पुनर्व्यवस्थित कीजिए।

हल प्रश्न में तीन विशेषताओं के आधार पर सूचनायें दी गयी हैं—(1) इन्फ्लुएन्जा—होना या न होना, (2) क्षय रोग—होना या न होना, (3) घर की स्थिति-कीटाणुयुक्त (infected) और गैर-कीटाणुयुक्त (uninfected)। प्रश्न में दी गई सूचनाओं को अग्रलिखित सारणी के अन्तर्गत प्रदर्शित किया जा सकता है—

सारणी संख्या ....
एक परिवार में क्षय रोग से पीड़ित
व्यक्तियों में फ्लू की घटना

अवस्था	फ्लू से पीड़ित			फ्लू से पीड़ित नहीं			महायोग
	दूषित घर	अदूषित घर	योग	दूषित घर	अदूषित घर	योग	
क्षयग्रस्त	1,000	4,000	5,000	1,000	14,000	15,000	20,000
क्षयग्रस्त नहीं	14,000	2,000	16,000	25,000	39,000	64,000	80,000
योग	**15,000**	**6,000**	**21,000**	**26,000**	**53,000**	**79,000**	**1,00,000**

टिप्पणी—

1. कुल 1,00,000 निवासियों में से 1/5 अर्थात् 20,000 व्यक्तियों में क्षय रोग के लक्षण प्रकट हुए तथा 80,000 में क्षय रोग के लक्षण प्रकट नहीं हुए।
2. क्षय रोग ग्रस्त 20,000 व्यक्तियों में से 5,000 में फ्लू के लक्षण प्रकट हुए अर्थात् 15,000 क्षयग्रस्त व्यक्तियों को फ्लू नहीं था।
3. 5,000 फ्लूग्रस्त व्यक्तियों में से 1,000 व्यक्ति दूषित (Infected) घरों में रहते थे अर्थात् 4,000 ऐसे घरों में रहते थे जो प्रदूषित नहीं थे।
4. 21,000 व्यक्ति फ्लू से पीड़ित हुए अर्थात् 79,000 फ्लू से पीड़ित नहीं हुए। इनके आधार पर क्षय रोग से ग्रस्त लेकिन फ्लू से ग्रस्त (21,000 – 5,000 = 16,000) तथा फ्लू से ग्रस्त नहीं (79,000 – 15,000 = 64,000) व्यक्तियों की गणना की जा सकती है।
5. कुल 41,000 व्यक्ति प्रदूषित मकानों में रहते थे अत: 59,000 बिना प्रदूषित मकानों में रहते थे।
6. फ्लूग्रस्त नहीं लेकिन क्षयग्रस्त व्यक्तियों की संख्या 15,000 है इसके पन्द्रहवें भाग अर्थात 1,000 प्रदूषित मकानों में रहते थे लेकिन 14,000 प्रदूषित मकानों में नहीं रहते थे।
7. शेष आवृत्तियाँ परस्पर योग तथा अन्तर की साधारण गणितीय क्रियाओं के आधार पर ज्ञात की गयी हैं।

प्र.14. निम्नलिखित सूचना को एक उपयुक्त सारणी के रूप में दर्शाइये—

खाद्यान्न जाँच समिति ने पूर्वी आन्ध्र प्रदेश में कृषि जोतों के आकार का शेष आन्ध्र प्रदेश के साथ निम्न तुलनात्मक अध्ययन किया–

''आन्ध्र प्रदेश के 14 पूर्वी जिलों में 2 एकड़ से कम क्षेत्रफल वाली जोतों का अनुपात सभी आकार की जोतों के कुल क्षेत्रफल 12,280 हजार एकड़ का 20% है, जबकि शेष आन्ध्र प्रदेश के लिये तत्संवादी समंक 29,036 हजार एकड़ और 11% है। इसी प्रकार 2 एकड़ से अधिक और 5 एकड़ तक क्षेत्रफल वाली जोतों का अनुपात कुल क्षेत्रफल का 29%। (14 जिलों के लिये) और केवल 3% शेष आन्ध्र प्रदेश के लिये है। इसके विपरीत 5 एकड़ से अधिक क्षेत्रफल वाली जोतों का प्रतिशत 14 जिलों की तुलना में शेष आन्ध्र प्रदेश में कहीं अधिक है।''

हल

सारणी संख्या ....
आन्ध्र प्रदेश के पूर्वी जिलों तथा शेष आन्ध्र प्रदेश में
कृषि जोतों के आकार का तुलनात्मक प्रदर्शन

(क्षेत्रफल हजार एकड़ में)

कृषि जोतों का आकार (एकड़ में)	पूर्वी जिले		शेष आन्ध्र प्रदेश	
	क्षेत्रफल	प्रतिशत	क्षेत्रफल	प्रतिशत
2 से कम	2,456	20	3,194	11
2, लेकिन 5 से कम	3,561	29	871	3
5 से अधिक	6,263	51	24,971	86
योग	**12,280**	**100**	**29,036**	**100**

प्र.15. किसी विश्वविद्यालय में अध्यापकों के एक वर्ग द्वारा घर से प्रस्थान करने का समय और संस्था में बिताये गये घण्टों की संख्या निम्न सारांश रूप में उपलब्ध है—

''एक अध्यापक प्रात: 5: 30 बजे से पहले घर छोड़ता है और विश्वविद्यालय में 4 घण्टे रहता है। ऐसे 23 अध्यापकों में से जो अपने घर से प्रात: 6 और 7 बजे के बीच चलते हैं, 7 अध्यापक संस्था में 3 घण्टे, 11 अध्यापक 4 घण्टे, 2 अध्यापक 5 घण्टे और 3 अध्यापक 6 घण्टे रहते हैं। ऐसे 16 अध्यापकों में से जो प्रात: 7 और 8 बजे के मध्य घर छोड़ते हैं, 4 अध्यापक 3 घण्टे, 6 अध्यापक 4 घण्टे, 1 अध्यापक 5 घण्टे और 5 अध्यापक 6 घण्टे संस्था में व्यतीत करते हैं। उन 82 अध्यापकों में से जो प्रात: 8 और 10 बजे के बीच घर से निकलते हैं, 6 अध्यापक 3 घण्टे, 9 अध्यापक 4 घण्टे, 21 अध्यापक 5 घण्टे ओर 46 अध्यापक 6 घण्टे विश्वविद्यालय में रहते हैं। प्रात: 10 और 11 बजे के मध्य घर छोड़ने वाले 21 अध्यापकों में से 2 अध्यापक 3 घण्टे, 8 अध्यापक 4 घण्टे, 7 अध्यापक 5 घण्टे और 4 अध्यापक 6 घण्टे संस्था में रहते हैं।'' उपर्युक्त सारांश को एक उपयुक्त सारणी में प्रस्तुत कीजिए।

उत्तर

सारणी संख्या ....

विश्वविद्यालय के अध्यापकों का घर छोड़ने का समय तथा संस्था में बिताए गए घण्टे

घर छोड़ने का समय (A.M.)	संस्था में बिताए गए घण्टों की संख्या				योग
	3 घण्टे	4 घण्टे	5 घण्टे	6 घण्टे	
5-6	—	1	—	—	1
6-7	7	11	2	3	23
7-8	4	6	1	5	16
8-10	6	9	21	46	82
10-11	2	8	7	4	21
Total	**19**	**35**	**31**	**58**	**143**

प्र.16. निम्नलिखित समंकों के आधार पर एक आवृत्ति बंटन बनाइये यदि (i) समावेशी वर्गान्तर हो जिसका पहला समूह 1-5 हो तथा (ii) अपवर्जी वर्गान्तर हो जिसका पहला समूह 0-5 हो।

3,	5,	7,	11,	15,	9,	6,	25,	7,	10
16,	18,	22,	29,	25,	20,	26,	28,	15,	6.

हल इस प्रश्न में न्यूनतम संख्या 3 तथा अधिकतम संख्या 29 है, अत: समावेशी तथा अपवर्जी वर्गान्तर निम्न प्रकार बनाये जाएँगे—

समावेशी तथा अपवर्जी विधियों पर आधारित वर्गान्तर

(i) समावेशी वर्गान्तर			(ii) अपवर्जी वर्गान्तर		
(X)	टैली चिह्न	(f)	(X)	टैली चिह्न	(f)
1-5	||	2	0-5	|	1
6-10	~~||||~~ |	6	5-10	~~||||~~ |	6
11-15	|||	3	10-15	||	2
16-20	|||	3	15-20	||||	4
21-25	|||	3	20-25	||	2
26-30	|||	3	25-30	~~||||~~	5
		$N = 20$			$M = 20$

टिप्पणी—5, 10, 15, 20 तथा 25 मूल्य अपवर्जी रीति में अगले समूह में सम्मिलित किए गए हैं जबकि समावेशी रीति में ऐसी कोई समस्या ही नहीं है, क्योंकि इसमें दोनों सीमाओं के बराबर मूल्य सम्मिलित किये जाते हैं।

खण्ड-स विस्तृत उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. सांख्यिकी का अर्थ समझाते हुए इसकी प्रकृति एवं क्षेत्र की विवेचना कीजिए।

उत्तर

सांख्यिकी
(Statistics)

अर्थ—सांख्यिकी का शाब्दिक अर्थ 'संख्या से सम्बन्धित शास्त्र' है। अत: सांख्यिकी ज्ञान की वह शाखा है, जिसका सम्बन्ध संख्यात्मक तथ्यों से है। 'Statistics' शब्द का प्रयोग एकवचन तथा बहुवचन दोनों में किया जाता है किन्तु दोनों के अर्थ में अन्तर है। एकवचन के रूप में प्रयुक्त होने पर इसे 'सांख्यिकी का विज्ञान' तथा बहुवचन के रूप में प्रयुक्त होने पर 'आँकड़ा' अथवा 'समंक' कहते हैं।

सांख्यिकी की प्रकृति (Nature of Statistics)

सांख्यिकी की प्रकृति से अभिप्राय यह अध्ययन करना है कि सांख्यिकी विज्ञान है या कला अथवा दोनों। इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए यह जानना आवश्यक है कि विज्ञान एवं कला का क्या अर्थ है?

विज्ञान (Science)—किसी भी विषय के क्रमबद्ध ज्ञान को विज्ञान कहते हैं, जिसमें किसी तथ्य विशेष के कारण एवं परिणाम के पारस्परिक सम्बन्ध का अध्ययन किया जाता है। अत: किसी भी ज्ञान को विज्ञान तभी कह सकते हैं जबकि उस ज्ञान में निम्नलिखित विशेषताएँ विद्यमान हों—

1. ज्ञान का क्रमबद्ध समूह हो;
2. कारण तथा परिणाम के सम्बन्धों का विश्लेषण करता हो;
3. उसके नियम तथा रीतियाँ सर्वमान्य एवं सर्वव्यापक हों;
4. पूर्वानुमान की क्षमता हो।

सांख्यिकी एवं विज्ञान (Statistics and Science)—सांख्यिकी का अध्ययन करने से पता चलता है कि उपरोक्त सभी लक्षण सांख्यिकी में पाये जाते हैं। सांख्यिकी ज्ञान का एक क्रमबद्ध समूह है, इसमें तथ्य के कारण और परिणाम का अध्ययन किया जाता है। इसकी विभिन्न रीतियों का सभी क्षेत्रों में व्यापक प्रयोग होता है। इसके अनेक नियम एवं सिद्धान्त; जैसे—महांक जड़ता नियम (Law of inertia of large number), सांख्यिकीय नियमितता नियम (Law of statistical regularity) आदि सर्वव्यापी एवं सार्वभौमिक हैं। प्रतीपगमन विश्लेषण, बाह्यगणन एवं काल-श्रेणियों का विश्लेषण ऐसी सांख्यिकीय रीतियाँ हैं जिनके द्वारा भावी पूर्वानुमान भी लगाया जा सकता है। अत: सांख्यिकी को विज्ञान कहना सर्वथा उचित है परन्तु यह ध्यान रखें कि सांख्यिकी को भौतिक शास्त्र अथवा रसायन शास्त्र या अन्य प्राकृतिक विज्ञानों की भाँति पूर्ण विज्ञान नहीं माना जा सकता; क्योंकि समंक अनेक कारणों से प्रभावित होते हैं, इसलिए सांख्यिकीय निष्कर्ष औसत रूप से ही सही होते हैं। यही कारण है कि कुछ विद्वानों ने इसे पूर्ण रूप में विज्ञान नहीं माना है और सांख्यिकी को विज्ञान न कहकर वैज्ञानिक विधि कहा है। **क्रॉक्सटन** और **काउडेन** के अनुसार, "सांख्यिकी एक विज्ञान नहीं है, वह एक वैज्ञानिक विधि है।" अर्थात् सांख्यिकी स्वयं में पूर्ण विज्ञान नहीं है, वरन विभिन्न विज्ञानों में सहायता करने वाली महत्त्वपूर्ण विधि है। वैज्ञानिक विधि के चार चरण होते हैं—1. अवलोकन (Observation), 2. परिकल्पना (Hypothesis), 3. पूर्वानुमान (Prediction), तथा 4. परीक्षण (Verification)। इन चारों ही चरणों में सांख्यिकीय रीतियों का व्यापक प्रयोग होता है। **वालिस** एवं **रॉबर्ट्स** ने भी लिखा है कि "सांख्यिकी स्वतन्त्र और मूलभूत ज्ञान का समूह नहीं है, वरन् यह ज्ञान प्राप्त करने की रीतियों का समूह है।" सांख्यिकी और विज्ञान के सम्बन्धों में यह कथन भी महत्त्वपूर्ण है कि "सांख्यिकी के बिना विज्ञान के फल प्राप्त नहीं होते और विज्ञान के बिना सांख्यिकी निर्मूल होती है।"

कला का अर्थ (Meaning of Art)—कला किसी कार्य को करने का सर्वोत्तम उपाय बतलाती है। दूसरे शब्दों में, कला से तात्पर्य ज्ञान की उस शाखा से है जो विभिन्न समस्याओं के समाधान हेतु सर्वोत्तम रीतियों को बताती है।

सांख्यिकी एवं कला (Statistics and Art)—सांख्यिकी में कला के भी लक्षण पाये जाते हैं। सांख्यिकी हमें यह बताती है कि विभिन्न समस्याओं के समाधान में सांख्यिकी की रीतियों का प्रयोग किस प्रकार किया जाय। उदाहरण के लिए, सांख्यिकी में केवल इसी बात का ही अध्ययन नहीं किया जाता कि समान्तर माध्य, मध्यका एवं बहुलक की गणना कैसे की जाती है बल्कि सांख्यिकी हमें यह भी बताती है कि समान्तर माध्य का प्रयोग कहाँ उत्तम है, मध्यका का प्रयोग कब उपयुक्त रहता है, बहुलक का प्रयोग किस स्थिति में उचित होगा। सांख्यिकी की विभिन्न रीतियों का उचित प्रयोग करने के लिए विशेष योग्यता, अनुभव और

आत्म संयम की आवश्यकता होती है, जो किसी विषय को कला कहने के लिए अत्यन्त आवश्यक है। अत: सांख्यिकी एक कला भी है।

निष्कर्ष—उपर्युक्त विवेचन से स्पष्ट है कि सांख्यिकी विज्ञान और कला दोनों ही है। सांख्यिकी में जहाँ एक ओर कुछ नियम एवं सिद्धान्तों का प्रतिपादन किया गया है, वहीं दूसरी ओर उनके व्यावहारिक प्रयोग की विधि भी बताई गई है।

सांख्यिकी की प्रकृति के सम्बन्ध में निष्कर्ष रूप में **टिप्पेट** (Tippete) के यह विचार महत्त्वपूर्ण हैं, ''सांख्यिकी विज्ञान और कला दोनों है। यह विज्ञान है, क्योंकि इसकी रीतियाँ मौलिक रूप से व्यवस्थित हैं तथा उनका सर्वत्र प्रयोग होता है। यह एक कला है, क्योंकि इसकी रीतियों का सफल प्रयोग पर्याप्त सीमा तक सांख्यिक की योग्यता, अनुभव तथा क्षेत्र विशेष के ज्ञान पर निर्भर करता है।''

सांख्यिकी का क्षेत्र (Scope of Statistics)

वर्तमान समय में सांख्यिकी का क्षेत्र अत्यन्त विस्तृत है। उन सभी विज्ञानों में जहाँ समंक उपलब्ध हो सकते हैं, सांख्यिकी का सफलतापूर्वक उपयोग किया जा सकता है। संक्षेप में, सांख्यिकी के क्षेत्र तथा विभागों अथवा विषय-सामग्री को अध्ययन की सुविधा की दृष्टि से दो भागों में बाँटा जा सकता है—(I) सांख्यिकीय रीतियाँ तथा (II) व्यावहारिक सांख्यिकी।

I. सांख्यिकीय विधियाँ या सांख्यिकीय रीतियाँ (Statistical Methods)

सांख्यिकीय रीतियाँ वे प्रक्रियाएँ हैं जो समंकों के संग्रहण, संक्षिप्तीकरण, विश्लेषण, निर्वचन एवं प्रस्तुतीकरण में प्रयोग की जाती हैं।

यूल तथा कैण्डाल ने लिखा है, ''सांख्यिकीय रीतियों से हमारा अभिप्राय उन रीतियों से है, जिनका प्रयोग अनेक कारणों से प्रभावित समंकों की व्याख्या करने के लिए किया जाता है।''

सांख्यिकी विज्ञान की अनेक रीतियाँ हैं जिनके द्वारा किसी भी अनुसंधान क्षेत्र में समंकों को एकत्रित करके उनका विश्लेषण किया जाता है तथा उनसे उचित परिणाम निकाले जाते हैं। महत्त्वपूर्ण सांख्यिकीय रीतियाँ निम्नलिखित हैं—

1. **आँकड़ों का संग्रहण**—प्रत्येक सांख्यिकी अनुसन्धान के लिए यह सबसे पहला एवं आवश्यक कार्य है। समस्या के अनुसार ही यह निश्चित किया जाता है कि कब, कहाँ से, किस ढंग से और कितने आँकड़े एकत्र किये जाएँ जो समस्या पर समुचित प्रकाश डाल सकें। संकलित समंकों के सम्पादन का कार्य भी इसमें सम्मिलित होता है।
2. **वर्गीकरण**—एकत्र किये हुए आँकड़ों को अधिक सरल व तुलना योग्य बनाने के लिए किसी गुण-विशेष के आधार पर विभिन्न वर्गों में बाँटते हैं। वर्गीकरण विशेषत: वजन, रंग, स्थान आदि किसी भी गुण के आधार पर हो सकता है।
3. **सारणीयन**—वर्गीकृत आंकड़ों को और अधिक सरल, स्पष्ट व तुलना योग्य बनाने के लिए उन्हें सारणी बनाकर प्रदर्शित किया जाता है, जिसमें शीर्षक लिखकर विभिन्न खानों में संख्याओं को लिखा जाता है। इसे सारणीयन कहते हैं।
4. **प्रस्तुतीकरण**—इस रीति के द्वारा एकत्रित समंकों को बिन्दु-रेखाओं या रेखाचित्रों के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है ताकि वे अपनी अमिट छाप मस्तिष्क पर छोड़ सकें।
5. **विश्लेषण**—विभिन्न विधियों के द्वारा आँकड़ों का विश्लेषण किया जाता है और उनकी विशेषतायें ज्ञात की जाती हैं। विधियाँ हैं—माध्य या औसत, अपकिरण, विषमता तथा सहसम्बन्ध का मापन। इन विधियों के द्वारा आँकड़ों की परस्पर तुलना भी की जाती है।
6. **निर्वचन**—विश्लेषणात्मक अध्ययन के पश्चात् निर्वचन की विधि के द्वारा प्राप्त परिणामों से निष्कर्ष निकाले जाते हैं।

II. व्यावहारिक सांख्यिकी (Applied Statistics)

व्यावहारिक सांख्यिकी में सांख्यिकी रीतियों का विशेष समस्याओं के अध्ययन में प्रयोग किया जाता है। वस्तुत: व्यावहारिक सांख्यिकी के द्वारा यह पता चलता है कि विभिन्न सांख्यिकीय रीतियों का व्यावहारिक क्षेत्र में किस प्रकार प्रयोग किया जाता है।

व्यावहारिक सांख्यिकी के अन्तर्गत जनसंख्या, कृषि, राष्ट्रीय आय, कीमत, उद्योग, व्यापार आदि से सम्बन्धित समंक आते हैं। इसी प्रकार गुण नियन्त्रण, रेखीय कार्यक्रमण (Linear Programming), क्रियात्मक शोध (Operational Research) आदि भी व्यावहारिक सांख्यिकी के अन्तर्गत आते हैं।

व्यावहारिक सांख्यिकी को पुन: दो भागों में विभाजित किया जा सकता है—

1. **वर्णनात्मक व्यावहारिक सांख्यिकी**—वर्णनात्मक व्यावहारिक सांख्यिकी का उद्देश्य किसी भी विषय के सम्बन्ध में संख्यात्मक विवरण देना होता है। इसमें भूतकाल तथा वर्तमान काल में एकत्र किये गये ऐसे समंकों का अध्ययन किया

जाता है जो ऐतिहासिक महत्त्व रखते हैं; जैसे—जनसंख्या समंक, आयात-निर्यात समंक, राष्ट्रीय आय सम्बन्धी समंक आदि।

2. **वैज्ञानिक व्यावहारिक सांख्यिकी**—इसमें समंकों को किसी वैज्ञानिक उद्‌देश्य से एकत्रित किया जाता है ताकि उनके आधार पर कुछ विशेष सिद्धान्तों का प्रतिपादन किया जा सके। अर्थशास्त्र के अनेक नियमों; जैसे—माँग का नियम, मुद्रा परिमाण सिद्धान्त, क्रयशक्ति समता सिद्धान्त आदि का प्रतिपादन वैज्ञानिक व्यावहारिक सांख्यिकी के प्रयोग द्वारा ही हुआ है।

प्र.2. सांख्यिकी के महत्त्व का वर्णन करते हुए इसकी सीमाओं की व्याख्या कीजिए।

उत्तर

सांख्यिकी का महत्त्व
(Importance of Statistics)

प्राचीनकाल में शासन को सुगमतापूर्वक चलाने के लिए राज्य द्वारा जनसंख्या भूमि, लगान, रसद आदि से सम्बन्धित आँकड़े एकत्र किये जाते थे; उस समय सांख्यिकी की उपयोगिता राज्य तक ही सीमित थी। परन्तु वर्तमान समय में सामाजिक, आर्थिक व राजनैतिक सभी क्षेत्रों के साथ-साथ ज्ञान-विज्ञान की प्रत्येक शाखा में सांख्यिकी का प्रयोग होता है। इसलिए **सेक्राइस्ट** ने ठीक ही कहा है—"व्यापार, सामाजिक नीति तथा राज्य से सम्बन्धित शायद ही कोई ऐसी समस्या हो जिसको समझने के लिए समंकों की आवश्यकता न पड़ती हो।"

वस्तुत: वर्तमान परिवेश में सांख्यिकी का महत्त्व इतना अधिक बढ़ गया है कि सांख्यिकीय ज्ञान के अभाव में समाजशास्त्र, अर्थशास्त्र, मनोविज्ञान, भौतिक विज्ञान आदि विषयों के प्रारम्भिक सिद्धान्तों को भी नहीं समझा जा सकता। अर्थशास्त्री, वैज्ञानिक, व्यापारी, कृषक, डॉक्टर, वकील, राजनैतिक और सामाजिक कार्यकर्त्ता आदि सभी अपने तथ्यों की पुष्टि के लिये सांख्यिकीय विज्ञान की सहायता प्राप्त करते हैं। **एम० एम० ब्लेयर** का कहना है कि "हम सांख्यिकी के मध्य रहते हैं। मूल्यों से लेकर मौसम के विवरणों तक हमारा जीवन सांख्यिकी द्वारा संचालित होता है। मामूली दैनिक क्रियाओं से लेकर राष्ट्रीय कानूनों के निर्माण तक सभी मानवीय क्रियायें सांख्यिकी पर आधारित रहती हैं।"

संक्षेप में विभिन्न क्षेत्रों में सांख्यिकी के महत्त्व को निम्न प्रकार समझाया जा सकता है—

1. **सरकार के लिए महत्त्व या शासन प्रबन्ध में महत्त्व**—सांख्यिकी का प्रारम्भ ही राज्य विज्ञान के रूप में हुआ था। आज विश्व में जबकि शासन की समस्याएँ अधिक जटिल हो गई हैं, इसे और भी महत्त्वपूर्ण स्थान प्राप्त हो गया है। आज हम यह कहते हैं कि समंक सरकारी प्रशासन के नेत्र हैं (Statistics are the eyes of government administration)। राज्य को ठीक तरह से चलाने के लिए सरकार को अनेक प्रकार की सूचनाओं की आवश्यकता पड़ती है। सरकार को यह जानकारी रखना आवश्यक है कि व्यापार की दशा क्या है? औद्योगिक उत्पादन बढ़ रहा है या घट रहा है? आयात व निर्यात की क्या स्थिति है? कर नीति कैसी है तथा उसका देश की आर्थिक व्यवस्था पर क्या प्रभाव पड़ रहा है? इन सब सूचनाओं के आधार पर ही सरकार अपनी विभिन्न नीतियाँ निश्चित करती है और शासन व्यवस्था ठीक रखती है। समंकों के आधार पर ही सरकार आगामी वर्ष के लिए बजट तैयार करती है। कल्याणकारी राज्य के विचार ने तो सरकार के कर्त्तव्यों एवं उत्तरदायित्वों को काफी विस्तृत कर दिया है। देश की आर्थिक एवं सामाजिक स्थिति में सुधार करने के लिए स्वास्थ्य, शिक्षा, कृषि, उद्योग, विद्युत आदि की अच्छी व्यवस्था करनी पड़ती है और ये सभी कार्य समुचित आँकड़ों के आधार पर ही किये जा सकते हैं। स्पष्ट है कि सरकारी नीतियों के बनाने, नीतियों के प्रभाव जानने, बजट निर्माण एवं शासन प्रबन्ध को व्यवस्थित एवं सुचारु रूप में चलाने के लिए सरकार को समंकों की पर्याप्त आवश्यकता पड़ती है।

2. **आर्थिक नियोजन के लिए अनिवार्य**—आधुनिक युग आर्थिक नियोजन का युग है। संसार का प्राय: प्रत्येक राष्ट्र योजनाबद्ध विकास में लगा हुआ है। समुचित आँकड़ों के अभाव में कोई भी सुव्यवस्थित योजना बनाना असम्भव है। आर्थिक नियोजन के लिए योजना निर्माताओं को देश के सम्पूर्ण आर्थिक, प्राकृतिक, मानवीय एवं भौतिक साधनों का पूर्ण ज्ञान होना अत्यन्त आवश्यक है। देश के उपलब्ध साधनों की पूर्ण जानकारी सांख्यिकी द्वारा ही समंकों के रूप में प्राप्त की जाती है। अत: समंक किसी भी योजना निर्माण की आधारशिला होते हैं। समंकों का महत्त्व योजना के निर्माण में ही नहीं होता वरन योजना की प्रगति के मूल्यांकन में भी होता है। आर्थिक नियोजन में सांख्यिकी के महत्त्व को अग्र प्रकार स्पष्ट किया जा सकता है—

(i) **साधनों का अनुमान**—योजना निर्माण हेतु देश के समूचे साधनों की पूर्ण जानकारी नितान्त आवश्यक है जिसका ज्ञान सांख्यिकी द्वारा ही सम्भव होता है।

(ii) **प्राथमिकता तय करना**—विभिन्न समस्याओं की सांख्यिकीय सूचनाओं के आधार पर ही समस्याओं की गम्भीरता और गहनता का विश्लेषण करते हुए आर्थिक नियोजन के लक्ष्यों की प्राथमिकता का क्रम तय किया जाता है। इस प्रकार लक्ष्यों की प्राथमिकता तय करने में सांख्यिकी महत्त्वपूर्ण भूमिका का निर्वाह करती है।

(iii) **लक्ष्य निर्धारित करना**—संख्यात्मक तथ्यों के आधार पर ही अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के लक्ष्य (targets) निर्धारित किये जाते हैं।

(iv) **योजना की प्रगति का मूल्यांकन**—योजना के निर्धारित लक्ष्यों की वास्तविक परिणामों से तुलना करके यह देखना कि योजना कहाँ तक सफल रही है, योजना की सफलता का मूल्यांकन कहलाता है। यह कार्य भी आँकड़ों के माध्यम से ही किया जा सकता है। उक्त विवेचन से आर्थिक नियोजन में सांख्यिकी का महत्त्व स्पष्ट हो जाता है। वास्तव में "समंकों के बिना आर्थिक नियोजन पतवार और दिशासूचक यन्त्ररहित जहाज की भाँति है।" जिस प्रकार दिशासूचक यन्त्र के अभाव में जहाज के भटक जाने की सम्भावना रहती है उसी प्रकार पर्याप्त एवं शुद्ध समंकों के बिना योजना के लक्ष्यों की प्राप्ति तो दूर, उनका निर्धारण ही कठिन है। अत: यह कहना गलत न होगा कि समंकों के अभाव में नियोजन का कार्य अंधेरे में चलने के समान है। भारतीय योजना आयोग ने आर्थिक नियोजन के क्षेत्र में समंकों के महत्त्व को स्वीकार करते हुए लिखा है—"विश्वसनीय, पर्याप्त तथा अद्यतन, सांख्यिकीय आँकड़ों की समय पर उपलब्धि विकास योजनाओं के लिए बहुत महत्त्वपूर्ण है।"

3. **अर्थशास्त्र में सांख्यिकी का महत्त्व**—अर्थशास्त्र के क्षेत्र में किसी भी ऐसी समस्या की कल्पना करना लगभग असम्भव है, जिसमें समंकों का विस्तृत प्रयोग न किया जाता हो। सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग अर्थशास्त्री उसी भाँति करता है जिस प्रकार एक डॉक्टर स्टेथोस्कोप (Stethoscope) का प्रयोग बीमारी जानने के लिए करता है। अर्थशास्त्र की सभी शाखाओं से सम्बन्धित विभिन्न नियमों व सिद्धान्तों का समंकों की सहायता से ही विश्लेषण व पुष्टिकरण किया जा सकता है। अर्थशास्त्र की विभिन्न शाखाओं में सांख्यिकी के महत्त्व को निम्न प्रकार स्पष्ट किया जा सकता है—

(i) **उपभोग के क्षेत्र में**—उपभोग के अन्तर्गत व्यक्तियों के जीवन-स्तर, विभिन्न मदों पर उनके व्यय, माँग के नियम तथा माँग की लोच आदि की जानकारी समंकों के द्वारा ही सम्भव हो पाती है।

(ii) **उत्पादन के क्षेत्र में**—उत्पादन के समंकों से राष्ट्रीय आय, राष्ट्रीय उत्पत्ति, राष्ट्र की सम्पत्ति एवं उनमें होने वाले परिवर्तनों की जानकारी हो जाती है।

(iii) **विनिमय के क्षेत्र में**—विनिमय समंकों के द्वारा देश की वाणिज्य एवं व्यापार सम्बन्धी सूचनायें प्राप्त हो जाती हैं। देश के आयात-निर्यात व्यापार भुगतान सन्तुलन आदि बातों का ज्ञान इन समंकों द्वारा ही होता है।

(iv) **वितरण के क्षेत्र में**—वितरण सम्बन्धी समंक देश की राष्ट्रीय आय तथा समाज के विभिन्न वर्गों की आर्थिक स्थिति का ज्ञान प्राप्त करने में सहयोग प्रदान करते हैं।

(v) **राजस्व के क्षेत्र में**—आय और व्यय सम्बन्धी सांख्यिकीय सूचनाओं के आधार पर ही बजट तैयार किया जाता है। सरकार की राजकोषीय नीति, करारोपण नीति, कर देय क्षमता आदि का निर्धारण भी समंकों के आधार पर ही हो पाता है।

4. **व्यवसाय एवं वाणिज्य में सांख्यिकी का महत्त्व**—जिस प्रकार शासन-प्रबन्ध को सुचारु रूप से चलाने के लिए सांख्यिकी परम आवश्यक है, उसी प्रकार व्यवसाय तथा वाणिज्य को सफलतापूर्वक चलाने के लिए भी सांख्यिकी नितान्त आवश्यक है। अच्छे व्यापारियों के लिए यह जान लेना आवश्यक है कि जिन वस्तुओं का वे व्यापार करते हैं उनकी माँग कहाँ और कैसी है? भविष्य में मूल्य बढ़ने की आशा है या घटने की? पूर्ति की क्या दशा है? उस वस्तु के बारे में सरकार की नीति कैसी है? ये सभी बातें बहुत कुछ सांख्यिकीय समंकों के आधार पर ही जानी जा सकती हैं। वास्तव में व्यापार की सफलता पर्याप्त समंकों पर ही निर्भर करती है। समंकों के द्वारा ही व्यापारी माँग का पूर्वानुमान लगाता है, विज्ञापन व क्रय-विक्रय की नीतियों को निर्धारित करता है। माँग के पूर्वानुमान में उसे मुद्रा की मात्रा व उसकी क्रय-शक्ति, उपभोक्ताओं की रुचि एवं रीति-रिवाज, जीवन-स्तर, व्यापार-चक्र एवं मौसमी परिवर्तनों से सम्बन्धित समंकों का सहारा लेना पड़ता है। व्यापार की तरह उद्योग में भी सांख्यिकी का विशेष महत्त्व है। नवीन उद्योगों के प्रवर्तन की प्रारम्भिक

अवस्था से लेकर अन्तिम क्रिया तक पग-पग पर समंकों का सहारा लेना पड़ता है। वर्तमान एवं भावी माँग का अनुमान लगाना, कच्चे माल का क्रय, उत्पादन लागत, वित्त-व्यवस्था, श्रम, निर्मित माल की बिक्री, आयात, विज्ञापन, मूल्य निर्धारण आदि के सम्बन्ध में नीतियों का निर्धारण उपयुक्त समंकों के विश्लेषण के आधार पर ही करना होता है। सांख्यिकीय रीतियाँ वस्तु की किस्म नियन्त्रण में भी सहायक होती हैं।

5. **विशिष्ट व्यवसायों में सांख्यिकी का महत्त्व**—निम्नलिखित क्षेत्रों में सांख्यिकी का महत्त्व निम्नलिखित हैं—
   (i) **बैंक के लिए महत्त्व**—बैंक के प्रबन्धक वित्तीय समंकों के आधार पर ही यह निश्चित करते हैं कि व्यवसायी वर्ष के किस भाग में अधिक धन की माँग करते हैं और किस अवधि में कम। इस प्रकार समंकों के आधार पर बैंक अपने नकद कोषों तथा पूँजी विनियोग से सम्बन्धित निर्णय ले पाते हैं।
   (ii) **बीमा कम्पनियों के लिए महत्त्व**—बीमा कम्पनियों का तो समस्त कार्य ही समंकों पर आधारित है। बीमा प्रीमियमों की दर का निर्धारण जीवन प्रत्याशा (Expectation of life) के आधार पर किया जाता है। जीवन प्रत्याशा का अनुमान जनसंख्या सम्बन्धी आँकड़ों जीवन-सारणियों (Life-Tables) तथा प्रायिकता सिद्धान्त (Theory of Probability) के आधार पर किया जाता है।
   (iii) **रेलवे के लिए महत्त्व**—रेलवे द्वारा भी समंकों का पर्याप्त मात्रा में प्रयोग किया जाता है। समंकों के आधार पर ही रेलवे, किराये-भाड़े की दर निश्चित करती है एवं रेलवे बजट का निर्माण हो पाता है और इस बात का निर्धारण करती है कि किन-किन मार्गों पर कितनी रेलगाड़ियाँ चलायी जायें एवं किन अवसरों पर विशेष रेलगाड़ियों की व्यवस्था करनी चाहिए।

   उपरोक्त विवेचन से स्पष्ट हो जाता है कि व्यापार एवं वाणिज्य में सांख्यिकी की सेवायें अत्यन्त महत्त्वपूर्ण हैं।
6. **जन-साधारण के लिए महत्त्व**—सामान्य मनुष्य के दैनिक जीवन में भी सांख्यिकी का महत्त्वपूर्ण स्थान है। किस वस्तु के मूल्य में कितनी कमी हुई या कितनी वृद्धि हुई, सबसे अधिक शिक्षित लोग किस प्रान्त में हैं, खाद्य उत्पादन की क्या स्थिति है आदि सभी बातों का ज्ञान समंकों के आधार पर ही प्राप्त होता है।

निष्कर्ष—उपरोक्त अध्ययन से स्पष्ट है कि आधुनिक युग में सांख्यिकी का सर्वत्र प्रयोग होता है। सांख्यिकी की इसी सार्वभौमिक उपयोगिता के कारण या **लुन-चाऊ** (Ya-Lun-Chou) ने कहा है—"वास्तव में हमारा युग सांख्यिकी का युग है।" यदि हम ध्यान से सोचें तो हम जन्म से मृत्यु तक सांख्यिकीय आँकड़ों से घिरे रहते हैं। जब कोई बच्चा जन्म लेता है तो उसकी जन्म सूचना नगरपालिका में देनी होती है एवं मृत्यु की दशा में मृत्यु सूचना देकर आनी पड़ती है। इसी तथ्य को स्पष्ट करते हुए टिप्पेट (Tippett) ने अपनी पुस्तक 'सांख्यिकी' के प्रारम्भ में लिखा है—

"इस संसार में हमारा प्रवेश और निर्गम दोनों सांख्यिकी रूप में रिकार्ड किये जाते हैं।"

वर्तमान समय में आर्थिक, सामाजिक, राजनैतिक, व्यावसायिक तथा वाणिज्य सभी क्षेत्रों के साथ-साथ ज्ञान-विज्ञान की कोई भी शाखा ऐसी नहीं है जहाँ सांख्यिकी की आवश्यकता न पड़ती हो। वर्तमान समय में सांख्यिकीय विधियों का ज्ञान उतना ही आवश्यक हो गया है जितना कि सामान्य व्यक्ति के लिए लिखना पढ़ना।

एच०जी० वेल्स (H.G. Wells) ने ठीक ही कहा है—"सांख्यिकीय विचार दक्ष नागरिकता के लिए उतना ही आवश्यक है जितनी कि पढ़ने और लिखने की योग्यता।"

सांख्यिकी की सीमाएँ
(Limitations of Statistics)

एक महत्त्वपूर्ण उपयोगी विज्ञान होते हुए भी सांख्यिकी की कुछ सीमाएँ हैं जिन्हें ध्यान में रखकर ही इस विज्ञान का प्रयोग किया जाना चाहिए। यदि इसकी सीमाओं को ध्यान में नहीं रखा जायेगा तो समंकों के निर्वचन से प्राप्त होने वाले परिणाम भ्रमात्मक हो सकते हैं। अत: सांख्यिकी के उचित प्रयोग हेतु इसकी सीमाओं का ज्ञान अनिवार्य है।

सांख्यिकी की मुख्य सीमाएँ निम्नलिखित हैं—

1. **सांख्यिकी केवल संख्यात्मक तथ्यों का ही अध्ययन करती है, गुणात्मक तथ्यों का नहीं**—सांख्यिकी केवल ऐसे तथ्यों का अध्ययन करती है जिन्हें प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप से संख्या में व्यक्त किया जा सकता है; जैसे—आय, प्राप्तांक, आयु, उत्पादन आदि, किन्तु ऐसे तथ्य जो संख्या में प्रकट नहीं किये जा सकते; जैसे—ईमानदारी, सभ्यता, चरित्र, सुन्दरता आदि का सांख्यिकी में अध्ययन नहीं किया जाता।

2. **सांख्यिकी समूहों का अध्ययन करती है, व्यक्तिगत इकाइयों का नहीं**—सांख्यिकी में समूह का अध्ययन किया जाता है, व्यक्तिगत इकाइयों का नहीं, चाहे वे कितनी ही महत्त्वपूर्ण क्यों न हों अर्थात् सांख्यिकीय निष्कर्ष व्यक्तिगत इकाइयों पर लागू न होकर इकाइयों के समूह पर लागू होते हैं। उदाहरण के लिए, यदि किसी स्थान पर पाँच व्यक्ति—'क', 'ख', 'ग', 'घ' और 'ङ' रहते हैं और इनकी मासिक आय क्रमश: ₹ 2,000, ₹ 3,000, ₹ 5,000, ₹ 6000 और ₹ 200 है तो इन पाँच व्यक्तियों की औसत मासिक आय ₹ 3,240 हुई जिससे यह निष्कर्ष निकलता है कि उस स्थान के मनुष्य सुखी व सम्पन्न हैं, परन्तु वहाँ 'ङ' ऐसा व्यक्ति है जिसकी दशा आर्थिक दृष्टि से बहुत खराब है। परन्तु सांख्यिकीय निष्कर्ष निकालते समय इस बात को ध्यान में नहीं रखा जायेगा और यही निष्कर्ष निकलेगा कि वहाँ के लोग बहुत सुखी हैं।
3. **बिना सन्दर्भ के अध्ययन करने पर सांख्यिकीय परिणाम भ्रमात्मक हो सकते हैं**—सांख्यिकी के परिणाम को ठीक प्रकार से समझने के लिये सम्बन्धित परिस्थितियों को अच्छी तरह से जानना आवश्यक है। यदि परिस्थितियों को ठीक तरह से स्पष्ट न किया जाय या सन्दर्भ न दिया जाय तो निष्कर्ष अशुद्ध हो सकते हैं। उदाहरणार्थ, यदि 'अ' व्यवसाय में तीन वर्षों का लाभ क्रमश: ₹ 2,000, ₹ 3,000 व ₹ 4,000 है और 'ब' व्यवसाय में उन्हीं वर्षों का लाभ ₹ 4,000, ₹ 3,000 व ₹ 2,000 है तो दोनों दशाओं में औसत लाभ ₹ 3,000 है और इससे निष्कर्ष यह निकलेगा कि दोनों व्यवसायों की दशा एक जैसी है परन्तु सन्दर्भ को देखने से पता चलता है कि बात ऐसी नहीं है। वास्तव में 'अ' व्यवसाय वर्ष-प्रतिवर्ष उन्नति कर रहा है और 'ब' व्यवसाय वर्ष-प्रतिवर्ष अवनति कर रहा है।
4. **सांख्यिकीय समंकों में एकरूपता और सजातीयता होना आवश्यक है**—आपस में तुलना के लिए यह आवश्यक है कि जो आँकड़े एकत्र किये गये हों वे एक ही गुण को प्रकट करते हों। भिन्न-भिन्न वर्गों या समूहों से सम्बन्धित आँकड़ों की तुलना नहीं की जा सकती है। उदाहरण के लिए, यदि किसी समय विशेष में गेहूँ का औसत मूल्य ज्ञात करना हो तो ठीक परिणाम प्राप्त करने के लिए आवश्यक है कि समस्त स्थानों पर उसी प्रकार के गेहूँ के मूल्यों को एकत्र किया जाय। यदि ऐसा न किया गया तो परिणाम अशुद्ध होगा।
5. **सांख्यिकी के नियम दीर्घकाल में तथा औसत रूप में सत्य होते हैं**—भौतिक विज्ञान व अंकगणित के नियमों की तरह सांख्यिकी के नियम पूर्ण रूप से सत्य नहीं होते हैं। वे केवल सन्निकट प्रवृत्तियों (approximate tendencies) को प्रकट करते हैं। उदाहरण के लिए रसायन विज्ञान में यह नियम है कि सोडियम के टुकड़े को पानी में डालने से आग लग जाती है। यह सोडियम के प्रत्येक टुकड़े पर लागू होता है। इसी प्रकार भौतिकी में गुरुत्वाकर्षण का नियम है कि प्रत्येक वस्तु जो ऊपर से गिरायी जाती है सदैव पृथ्वी की ओर ही आती है। ये नियम सदा के लिए प्रत्येक सम्बन्धित परिस्थिति में ठीक होते हैं, परन्तु सांख्यिकी के नियम जैसे प्रायिकता सिद्धान्त (Theory of Probability) इतना दृढ़, पूर्ण और सत्य नहीं है। सिक्के का बराबर संख्या में चित्त और पट्ट गिरना तभी सम्भव है जबकि उसे अधिक बार उछाला जाय। यदि यह कहा जाये कि भारतीय व्यक्ति की औसत आयु 55 वर्ष है, तो इसका अर्थ यह नहीं है कि प्रत्येक व्यक्ति 55 वर्ष तक जीवित रहेगा। हाँ एक बडे समग्र में व्यक्तियों की औसत आयु ज्ञात की जाये तो लगभग 55 वर्ष होगी।
   इसी प्रकार यदि यह कहा जाय कि भारतीय व्यक्ति काले होते हैं तो यह कथन औसत रूप से ही सत्य है सामान्य रूप से नहीं। सांख्यिकी के नियम अन्य शुद्ध विज्ञानों के नियमों की भाँति अल्पकाल में सत्य नहीं होते वह केवल दीर्घकाल में ही सत्य होते हैं।
6. **सांख्यिकी किसी समस्या के अध्ययन करने की केवल एक रीति है**—किसी भी समस्या के अध्ययन करने की अनेक रीतियाँ हो सकती हैं। सांख्यिकी भी उनमें से एक है। अत: किसी समस्या का समाधान करने के लिए सांख्यिकी केवल एक साधन है, समस्या का समाधान नहीं। इसलिए इसके द्वारा प्राप्त निष्कर्षों की अन्य रीतियों द्वारा भी पुष्टि कर लेनी चाहिए।
7. **सांख्यिकी का प्रयोग केवल विशेषज्ञ ही कर सकते हैं**—सांख्यिकी एक वैज्ञानिक विधि है, अत: सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग उन्हीं व्यक्तियों के द्वारा किया जाना चाहिए जो इसका विशेष ज्ञान रखते हैं। अयोग्य एवं अनभिज्ञ व्यक्ति प्राप्त समंकों से या तो कोई निष्कर्ष नहीं निकाल पायेंगे या उससे गलत और भ्रमपूर्ण परिणाम निकालेंगे। ''नीम हकीम खतरे जान'' की तरह अयोग्य व्यक्ति के हाथ में यह एक खतरनाक हथियार होगा।

उपर्युक्त विवेचन से यह स्पष्ट है कि सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग करते समय इसकी सीमाओं को ध्यान में रखना आवश्यक है अन्यथा समंकों से भ्रमपूर्ण निष्कर्ष निकल सकते हैं।

प्र.3. 'सांख्यिकीय अनुसन्धान' से आप क्या समझते हैं? एक सांख्यिकीय अनुसन्धान का आयोजन करते समय आप जिन प्रारम्भिक बातों पर विचार करेंगे उनका वर्णन कीजिए।

उत्तर

सांख्यिकीय अनुसन्धान का अर्थ
(Meaning of Statistical Investigation or Enquiry)

'अनुसंधान' का अर्थ 'ज्ञान की खोज' से होता है। इस प्रकार सांख्यिकीय अनुसन्धान से अभिप्राय संख्यात्मक तथ्यों के आधार पर सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग करके ज्ञान की खोज करना है। उदाहरण के लिए, यदि हम शिक्षित वर्ग की बेरोजगारी के बारे में ज्ञान प्राप्त करना चाहते हैं तो हमारे अनुसन्धान (Investigation) का विषय शिक्षित बेरोजगार होंगे एवं इस सम्बन्ध में तर्कपूर्ण निष्कर्ष निकालने के लिए अपनायी जाने वाली सम्पूर्ण प्रक्रिया को सांख्यिकीय अनुसन्धान माना जायेगा। वस्तुत: सांख्यिकीय अनुसन्धान एक व्यापक क्रिया है जिसके अन्तर्गत किसी समस्या से सम्बन्धित समंकों के संकलन से लेकर उनके निर्वचन एवं प्रतिवेदन तैयार करने तक की सभी क्रियाएँ सम्मिलित होती हैं। अत: किसी समस्या का अध्ययन करने हेतु सम्बन्धित समंकों को एकत्रित करने का आयोजन, उनका संग्रहण, सम्पादन, विश्लेषण, निर्वचन और उनके आधार पर प्रतिवेदन तैयार करने की प्रक्रियाएँ जब एक क्रम में होकर पूर्ण होती हैं तो यह सांख्यिकीय अनुसन्धान कहलाता है। जो व्यक्ति इस कार्य को करता है उसे अनुसन्धानकर्त्ता (Investigator) कहते हैं। तथ्यों को प्राप्त करने में अनुसन्धानकर्त्ता की सहायता करने वाला व्यक्ति प्रगणक (Enumerator) कहलाता है जबकि सम्बन्धित सूचना देने वाले व्यक्तियों को सूचक (Respondent) कहते हैं।
सांख्यिकीय अनुसन्धान एक तकनीकी कार्य है जिसके लिए विशिष्ट ज्ञान एवं कौशल की आवश्यकता होती है।

सांख्यिकीय अनुसन्धान के प्रमुख चरण
(Main Stages of Statistical Investigation)

सांख्यिकीय अनुसन्धान के अर्थ से स्पष्ट है कि सांख्यिकीय अनुसन्धान एक व्यापक क्रिया है जिसे समस्या से सम्बन्धित समंकों के संकलन से लेकर उनके निर्वचन एवं अन्तिम प्रतिवेदन तैयार करने तक अनेक क्रिया-स्तरों से गुजरना होता है। सांख्यिकीय अनुसन्धान को मुख्यत: निम्नलिखित चरणों या अवस्थाओं में बाँटा जा सकता है—

1. **सांख्यिकीय अनुसन्धान का आयोजन**—किसी भी कार्य को करने से पूर्व उसकी विस्तृत रूपरेखा या कार्यक्रम तैयार करना आवश्यक है। अत: सांख्यिकीय अनुसन्धान का भी पूर्व आयोजन कर लिया जाना चाहिए ताकि समय, धन एवं शक्ति का अनावश्यक अपव्यय न हो और उद्देश्यों में सफलता मिल सके। इस प्रकार सांख्यिकीय अनुसन्धान का सर्वप्रथम चरण, सांख्यिकीय अनुसन्धान का आयोजन है। अनुसन्धान के इस चरण के अन्तर्गत अनुसन्धान के उद्देश्य, क्षेत्र, प्रकृति, सूचना के स्रोत आदि बातों पर विचार करते हुए अनुसन्धान की एक निश्चित योजना तैयार की जाती है। सांख्यिकीय अनुसन्धान आयोजन की विस्तृत विवेचना अलग से इसी अध्याय में आगे की गयी है।
2. **समंकों का संकलन**—सांख्यिकीय अनुसन्धान के आयोजन के पश्चात् महत्त्वपूर्ण समस्या समंकों के संग्रहण (संकलन) की आती है। संगृहीत समंकों पर ही समंकों के विश्लेषण एवं निर्वचन की क्रिया निर्भर करती है। यदि संगृहीत समंक अशुद्ध एवं अपर्याप्त होंगे तो उनके आधार पर निकाले गये निष्कर्ष भी भ्रमात्मक एवं अशुद्ध होंगे। अत: समंकों का संग्रहण अत्यन्त सावधानीपूर्वक किया जाना चाहिए। समंकों के संग्रहण (संकलन) की निम्नलिखित दो विधियाँ हैं—
   (i) प्राथमिक समंक (Primary Data); (ii) द्वितीयक समंक (Secondary Data)।
   जब हम योजना बनाकर शुरू से ही आंकड़ों को एकत्रित करते हैं तो इस प्रकार की प्राप्त सामग्री प्राथमिक अथवा मौलिक सामग्री कहलाती है; जैसे—जनगणना समंक। किन्तु यदि कहीं पर पहले से ही आँकड़े उपलब्ध हैं अथवा ये समंक पहले से ही अन्य संस्थाओं या व्यक्तियों के द्वारा संगृहीत एवं प्रकाशित किये जा चुके हैं और अनुसन्धानकर्त्ता उन्हीं समंकों का प्रयोग अपने अनुसन्धान में करता है तो वे समंक द्वितीयक समंक कहलायेंगे।
   प्राथमिक समंक अधिक शुद्ध एवं विश्वसनीय होते हैं; क्योंकि हम उनके लिए निश्चित उद्देश्य सामने रखकर सामग्री एकत्रित करते हैं। प्राथमिक समंक संग्रहण द्वितीयक समंक संग्रहण की अपेक्षा अधिक खर्चीला होता है।
3. **संगृहीत समंकों का सम्पादन**—समंकों का संग्रहण करने के पश्चात् संकलित समंकों को अशुद्धियों एवं अनियमितताओं को दूर करके उनमें संगतता (Consistency), एकरूपता (Uniformity), पूर्णता (Completeness) एवं शुद्धता (Accuracy) लायी जाती है ताकि प्राप्त निष्कर्षों में कोई अशुद्धि न रहे। इस कार्य को ही संगृहीत समंकों का सम्पादन कहते हैं।

4. **समंकों का वर्गीकरण व सारणीयन**—समंकों के सम्पादन के बाद उन्हें व्यवस्थित ढंग से रखा जाता है। समंकों को व्यवस्थित रूप देने के लिए एकत्रित आँकड़ों को विभिन्न वर्गों व श्रेणियों में विभाजित किया जाता है और सारणियाँ बनायी जाती हैं। इस कार्य को ही समंकों का व्यवस्थितीकरण या वर्गीकरण एवं सारणीयन कहते हैं।
5. **समंकों का विश्लेषण**—समंकों के सम्पादन, वर्गीकरण व सारणीयन के पश्चात् गणितीय मापों की सहायता से समंकों का विश्लेषण किया जाता है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप, अपकिरण एवं विषमता, सहसम्बन्ध आदि सांख्यिकीय मापों को समंकों के विश्लेषण हेतु प्रयोग किया जाता है।
6. **निर्वचन एवं प्रतिवेदन**—यह सांख्यिकीय अनुसन्धान का अन्तिम चरण है। अनुसन्धान के इस चरण के समंकों के विश्लेषण के पश्चात् उनसे उचित एवं निष्पक्ष निष्कर्ष निकाले जाते हैं एवं निकाले गये निष्कर्षों के आधार पर प्रतिवेदन (Report) तैयार की जाती है। रिपोर्ट यथासम्भव संक्षिप्त होनी चाहिए और सम्पूर्ण विवरण से युक्त होनी चाहिए।

सांख्यिकीय अनुसन्धान का आयोजन
(Planning of a Statistical Investigation)

यह बात सर्वविदित है कि किसी भी कार्य को प्रारम्भ करने से पूर्व उसकी योजना बना लेने से कार्य को पूरा करने में काफी सुविधा और स्पष्टता आ जाती है। अत: सांख्यिकीय अनुसन्धान को प्रारम्भ करने से पूर्व एक निश्चित योजना बना लेना सदैव हितकर होता है। अत: यह आवश्यक हो जाता है कि अनुसन्धानकर्त्ता अनुसन्धान प्रारम्भ करने से पहले एक योजना बना ले तथा उसी योजना के अनुसार अनुसन्धान सम्बन्धी सभी क्रियाओं को सम्पन्न करें। इस प्रकार अनुसन्धान की पूर्व योजना बना लेने को ही सांख्यिकीय अनुसन्धान का आयोजन कहते हैं।

सांख्यिकीय अनुसन्धान की सफलता काफी सीमा तक सांख्यिकीय अनुसन्धान के आयोजन पर ही निर्भर करती है। **सिम्पसन व काफ्का** के अनुसार, "सांख्यिकीय अनुसन्धान की शुद्धता एवं सफलता उसके सर्वोपयुक्त ढंग से किये गये आयोजन पर ही निर्भर करती है।" अत: सांख्यिकीय अनुसन्धान की रूप-रेखा काफी सोच-समझकर तय करनी चाहिए। सफल सांख्यिकीय अनुसन्धान आयोजन के लिए निम्नलिखित बातों का ध्यान रखना आवश्यक है—

1. **समस्या की परिभाषा**—जिस समस्या के सम्बन्ध में अनुसन्धान करना है उसकी स्पष्ट परिभाषा पहले ही निश्चित कर लेनी चाहिए अन्यथा अनुसन्धान की योजना निरर्थक रहेगी और अनुसन्धान कार्य में अनेक कठिनाइयाँ उपस्थित होंगी। यह भी हो सकता है कि एकत्र किये हुए समंक व्यर्थ हो जायें जिससे केवल समय, श्रम एवं धन की बर्बादी ही होगी। अत: सफल आयोजन हेतु समस्या को सुनिश्चित शब्दों में परिभाषित कर लेना आवश्यक है। उदाहरण के लिए यदि किसी औद्योगिक इकाई के श्रमिकों की मजदूरी के सम्बन्ध में अनुसन्धान करना है तो यह पहले ही निश्चित कर लेना चाहिए कि उनकी नकद मजदूरी से सम्बन्धित समंक एकत्र करने हैं या वास्तविक मजदूरी से सम्बन्धित यदि हम बेरोजगारी की समस्या का विश्लेषण करना चाहते हैं तो बेरोजगारी की परिभाषा को स्पष्ट करना होगा।
2. **अनुसन्धान का उद्देश्य**—जिस समस्या का अनुसन्धान करना है उसकी परिभाषा निश्चित करने के उपरान्त यह भी सोच लेना आवश्यक है कि अनुसन्धान का उद्देश्य क्या है? यदि अनुसन्धान का लक्ष्य निश्चित कर लिया जाता है तो आगे चलकर समंकों के वर्गीकरण सारणीयन, विश्लेषण अथवा निर्वचन में कठिनाई नहीं उठानी पड़ेगी।
3. **अनुसन्धान का क्षेत्र**—अनुसन्धान का उद्देश्य निश्चित करने के बाद यह देखना भी आवश्यक है कि अनुसन्धान का क्षेत्र क्या है? क्षेत्र से तात्पर्य केवल भौगोलिक या राजनैतिक क्षेत्र से नहीं है, आर्थिक क्षेत्र या अन्य दृष्टिकोणों से भी समस्या को सीमाओं में परिबद्ध करना इसमें निहित है। उदाहरण के लिए यदि हम रोजगार उपलब्ध कराने में जवाहर रोजगार योजना का अध्ययन करना चाहते हैं तो हमें यह निश्चित करना होगा कि हमारे अध्ययन का क्षेत्र ग्राम, जिला, राज्य या पूरा देश होगा।
4. **अनुसन्धान का समय**—अनुसन्धान के समय से अभिप्राय उस अवधि से है जिसके अन्तर्गत अनुसन्धान कार्य को समाप्त करना है। इस सम्बन्ध में यह ध्यान रखें कि समय जितना भी कम रखा जायेगा उतना ही उचित रहेगा; क्योंकि समय अधिक रखने पर समंकों की प्रकृति में परिवर्तन होने की आशंका बनी रहती है। परन्तु समय इतना कम भी नहीं होना चाहिए कि संकलन कार्य को शीघ्रता व लापरवाही से सम्पन्न करना पड़े। अनुसन्धान के समय के सम्बन्ध में एक बात और आवश्यक है कि समय अनुसन्धान के दृष्टिकोण से उपयुक्त भी हो। उदाहरणार्थ, यदि किसी विशेष क्षेत्र के किसानों की आर्थिक स्थिति के सम्बन्ध में अनुसन्धान करना हो तो यह अनुसन्धान उस समय नहीं करना चाहिए जब उनकी फसलें

कट चुकी हों और वे बाजार में बिक रही हों; क्योंकि ऐसे समय में किसानों की आर्थिक स्थिति अपेक्षाकृत अधिक अच्छी हो जाती है। संक्षेप में, (अ) समय निश्चित होना चाहिए, (ब) जहाँ तक सम्भव हो, समय कम होना चाहिए, (स) समय उपयुक्त होना चाहिए।

5. **अनुसन्धान की प्रकृति**—अनुसन्धानकर्त्ता को अनुसन्धान आयोजन तय करते समय अनुसन्धान की प्रकृति पर भी भली भाँति विचार कर लेना चाहिए। सांख्यिकीय अनुसन्धान अपनी प्रकृति के अनुसार कई प्रकार के हो सकते हैं परन्तु प्रत्येक अनुसन्धान प्रत्येक परिस्थिति में उपयुक्त नहीं होता। इसलिए अनुसन्धान के प्रकार का निर्धारण कर लेना अत्यन्त आवश्यक होता है। अनुसन्धान मुख्यत: निम्नलिखित प्रकार का हो सकता है—

(अ) संगणना या निदर्शन अनुसन्धान,
(ब) गोपनीय एवं अगोपनीय अनुसन्धान,
(स) प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष अनुसन्धान,
(द) मौलिक एवं पुनरावर्तक अनुसन्धान,
(य) नियमित एवं अनियमित अनुसन्धान।

6. **सांख्यिकीय इकाई का निर्धारण**—सांख्यिकीय अनुसन्धान आयोजन तय करते समय यह भी आवश्यक है कि जिस इकाई में समंकों का संकलन किया जाये उसे पहले ही स्पष्ट रूप से निश्चित कर लिया जाये। इकाई की अस्पष्टता के कारण सारा अनुसन्धान कार्य विफल हो सकता है। वस्तुत: सांख्यिकीय इकाई ही वह आधार प्रस्तुत करती है जिसके अनुसार अनुसन्धानकर्त्ता अपने अनुसन्धान से सम्बन्धित सूचनाओं एवं तथ्यों को एकत्रित करता है।

सांख्यिकीय इकाई को परिभाषित करते हुए **डी०एन० एल्हांस** ने लिखा है—"सांख्यिकीय इकाई एक गुण या गुणों का समूह है जिसे परम्परागत रूप से चुना जाता है ताकि उनको रखने वाले व्यक्ति या वस्तुएँ सांख्यिकीय अनुसन्धान के लिए गिनी जा सकें या नापी जा सकें।"

निष्कर्ष—सांख्यिकीय इकाई वह माप है जिसके आधार पर आँकड़े एकत्र किये जाते हैं तथा उसी आधार पर उनका विश्लेषण एवं निर्वचन होता है।

प्र.4. अनुसन्धान की विधियों को परिभाषित कीजिए तथा नमूने की व्याख्या कीजिए।

उत्तर

अनुसन्धान की विधियाँ
(Methods of Investigation)

किसी विशिष्ट क्षेत्र या क्षेत्र से किए गए आँकड़ों के संग्रह के आधार पर, सांख्यिकीय अनुसन्धान प्रक्रिया की जाती है। अनुसन्धान के अन्तर्गत या तो समस्त या कुछ इकाइयों का अवलोकन करके, आँकड़ों को एकत्रित किया जाता है। जब सभी इकाइयों का अवलोकन करके आँकड़ों को एकत्रित किया जाता है, तो इसे 'जनगणना अनुसन्धान' कहा जाता है। हालाँकि, यदि इकाइयों का एक अंश देखा जाता है तो आँकड़े एकत्रित करने की विधि को 'नमूना अनुसन्धान' के रूप में जाना जाता है।

I. जनगणना विधि (Census Method)

यदि किसी व्यक्ति या विश्व की प्रत्येक व्यक्ति या वस्तु के सम्बन्ध में विस्तृत सूचना एकत्रित की जाती है तो उसे पूर्णगणना या 'जनगणना विधि' कहा जाता है। पूर्ण परिगणना/जनगणना विधि कहलाती है।

उदाहरण के लिए—जनसंख्या की जनगणना के दौरान (जोकि भारत में प्रत्येक दस वर्ष में की जाती है), भारत में निवास कर रहे प्रत्येक व्यक्ति के बारे में सूचना एकत्र की जाती है। यह विधि पूरी सजगता तथा सटीकता के साथ जनसंख्या के प्रत्येक व्यक्ति तथा इकाई के बारे में सम्पूर्ण सूचनाएँ प्रदान करती है।

जनगणना सर्वेक्षण विधि के लाभ (Advantages of Census Survey Method)

जनगणना सर्वेक्षण विधि के लाभ निम्नलिखित हैं—

1. **उच्च स्तर की शुद्धता**—इस पद्धति में आँकड़ों के संग्रहण के लिए कोई भी तत्त्व नहीं छूटता है। अत: पूर्ण सटीकता प्राप्त की जाती है; क्योंकि सभी सदस्य पूछताछ में शामिल होते हैं।
2. **विभ्रमहीन न्यादर्श**—इस विधि में किसी भी प्रकार की न्यादर्श विभ्रम नहीं होती है; क्योंकि प्रत्येक प्रकार की इकाई का अध्ययन इस प्रणाली में शामिल किया जाता है।

3. **कम जनसंख्या**—इस स्थिति में जब समग्र का आकार छोटा होता है तो इस न्यादर्श पद्धति की तुलना में जनगणना विधि अत्यन्त उपयुक्त तकनीक होती है।

जनगणना सर्वेक्षण विधि की हानियाँ (Disadvantages of Census Survey Method)

जनगणना सर्वेक्षण विधि की हानियाँ निम्नलिखित हैं—

1. **अधिक संगठनात्मक कौशल**—इस तकनीक में संगठनात्मक कठिनाइयों का सामना करना पड़ता है; क्योंकि शोधकर्त्ताओं की एक बड़ी टीम की आवश्यकता होती है, जिसमें कौशल, इच्छा और क्षमता के विभिन्न मानक होते हैं।
2. **मँहगी**—जिन संगठनों की अधिकृत पूँजी कम है वह संगठन इस विधि का उपयोग नहीं कर सकते हैं; क्योंकि इस विधि में अत्यधिक धन, समय तथा मानवीय ऊर्जा की आवश्यकता होती है। सामान्यत: सरकार सर्वेक्षण की जन गणना पद्धति का अनुसरण करती है।
3. **कोई तत्काल परिणाम नहीं**—जब किसी समस्या के परिणाम की तत्काल आवश्यकता हो तो इस तकनीक का उपयोग नहीं किया जा सकता है।
4. **विनाशकारी जनसंख्या**—यदि जनसंख्या अस्थिर है तो इस तकनीक का प्रयोग नहीं किया जा सकता है।

II. निदर्शन विधि (Sampling Method)

इस पद्धति का प्रयोग उपभोक्ता के साक्षात्कार के लिए नमूना लेने के लिए किया जाता है। यह न्यादर्श यादृच्छिक तथा स्तरीकृत किसी भी रूप में हो सकता है। इस पद्धति में सफलता उचित न्यादर्श बनाने पर निर्भर करती है तथा इसमें उपभोक्ताओं का सहयोग आवश्यक होता है। इस विधि द्वारा समय की बचत होती है। इसके साथ धन की खपत कम होती है। यह ध्यान रखने योग्य है कि यदि समग्र छोटा है तो अनुसन्धान के लिए न्यादर्श सर्वेक्षण की आवश्यकता नहीं होती है।

अच्छे नमूने या न्यादर्श की गुणवत्ता (Quality of a Good Sample)

1. **सत्य प्रतिनिधित्व**—जनसंख्या का सही प्रतिनिधि एवं इसके गुणों के मेल को अच्छा प्रारूप कहा जाता है जहाँ कुछ गुणों का समुच्चय जनसंख्या है एवं सम्पूर्ण न्यायदर्श का उपकुल है।
2. **पक्षपात से मुक्त**—एक अच्छा प्रारूप पूर्वाग्रहों, पूर्वधारणाओं एवं कल्पनाओं को अनुमति नहीं देता है जो इसकी पसंद को प्रभावित करता है अर्थात् यह निष्पक्ष होता है।
3. **सटीक**—एक प्रारूप को अच्छा कहा जाता है जब यह सटीक अनुमान देता है एवं विभ्रमयों से मुक्त होता है।
4. **व्यापक**—एक प्रारूप जो जनसंख्या का वास्तविक प्रतिनिधित्व करता है, वह प्रकृति में व्यापक होता है जिसे जाँच के द्वारा नियंत्रित किया जाता है। एक न्यायदर्श की विशेषता व्यापक होती है लेकिन यह जन संख्या का बेहतर प्रतिनिधि नहीं होता है।
5. **दृष्टिकोण**—अच्छे न्यायदर्श के विषय में आसानी से सुलभ होती है जहाँ अनुसंधान के उपकरण आसानी से संचालित होते हैं एवं आँकड़ों का आसान संग्रहण सम्भव है।
6. **बेहतर आकार**—अच्छे निदर्शन आकार ऐसा होता है कि जो यह सटीक परिणाम देता है एवं सम्भाव्यता के कारण विभ्रम का अनुमान लगाया जा सकता है।
7. **संभव**—एक अच्छा निदर्शन अनुसंधान कार्य को और अधिक संभव बनाता है।
8. **लक्ष्य अभिविन्यास**—शोधकर्त्ता द्वारा चुना गया कोई भी प्रारूप अनुसंधान के उद्देश्यों को पूरा करने में सक्षम होना चाहिए। निदर्शन उचित संख्या में होनी चाहिए। यह पर्यावरण के योग्य होनी चाहिए जिसके अन्तर्गत अनुसंधान आयोजित किया जा रहा है। यदि सर्वेक्षण डिजाइन की आवश्यकता के अनुसार न्यायदर्श में परिवर्तित कर दिया जाता है तो यह बेहतर परिणाम या नतीजा प्राप्त होता है।
9. **सैद्धान्तिक**—सैद्धान्तिक का अर्थ है कि अनुसंधान का संचालन करते समय निदर्शन चयन की अवधारणाओं का ठीक से प्रयोग करना चाहिए। शोधकर्त्ताओं को यह ध्यान रखना चाहिए कि निर्देश देने से पहले पर्याप्त अच्छी सावधानी बरती गई हैं। पर्यवेक्षक को जो निर्देश दिए गए हैं, वे सभी शब्दों में स्पष्ट, पूर्ण एवं सही होने चाहिए ताकि उनकी ओर से विभ्रमयों एवं पूर्वाग्रहों से बचा जा सके। न्यायदर्श को न्यायदर्श के आधार पर चुनाव करना चाहिए। न्यायदर्श इकाइयाँ प्रतिनिधि होनी चाहिए न्यायदर्श प्रकृति में व्यावहारिक होना चाहिए।

10. **मितव्ययी**—यह संदर्भित होना चाहिए कि अनुसंधान में अधिक लागत समय नहीं लगाना चाहिए। किसी भी शोध का यह उद्देश्य होना चाहिए कि न्यूनतम प्रयास समय धन एवं संसाधनों के साथ शोध को पूरा करना है। शोधकर्त्ता प्रत्येक प्रतिवादी के लिए प्रति इकाई लागत की गणना करता है। शोधकर्त्ता को उस प्रारूप का चयन करना चाहिए जो प्रति उतरोत्तर लागत एवं अधिकतम सटीकता प्रदान करे।

निदर्शन विधि के लाभ (Advantages of Sampling Method)

निदर्शन विधि के लाभ निम्नलिखित हैं—

1. **समय क्षमता तथा धन की बचत**—न्यायदर्श में सम्बन्धित विषय की संख्या कम होती है जिससे उनकी गणना, सारणीयन, विश्लेषण तथा व्याख्या करने में कम समय लगता है। इससे शोधकर्त्ता के समय, धन, श्रम आदि की बचत होती है।
2. **अधिक प्रभावी**—जनसंख्या की तुलना में न्यादर्श का आकार छोटा होता है। इससे आँकड़ें तथा सूचना एकत्रित करना सरल होता है। न्यायदर्श का आकार छोटा होने के कारण अन्वेषक प्रभावी ढंग से कार्य करता है।
3. **तीव्र तथा कम खर्चीली**—न्यादर्श का आकार में छोटे होने के कारण आँकड़ों का संग्रहण, सारणीयन, प्रस्तुति तथा विश्लेषण और व्याख्या करने में कम समय लगता है। इस पूरी प्रक्रिया में नाममात्र का व्यय लगता है।
4. **अधिक सटीक**—निदर्शन में कम त्रुटियाँ होती हैं; क्योंकि अल्प आँकड़े संग्रह, सारणीकरण, प्रस्तुति विश्लेषण एवं व्याख्या में शामिल होती हैं जिससे अधिक सटीकता प्राप्त होती है।
5. **अधिक व्यापक सूचना प्रदान करता है**—अध्ययन की सम्पूर्ण जाँच छोटे निदर्शन के परिणाम स्वरूप होता है जो अधिक सम्पूर्ण सूचना प्रदान करता है जिससे जनसंख्या के सभी सदस्यों को निदर्शन में शामिल होने का अवसर प्राप्त होता है।

निदर्शन विधि की हानियाँ (Disadvantages of Sampling Method)

निदर्शन विधि की हानियाँ निम्नलिखित हैं—

1. **पक्षपाती चयन**—शोधकर्ताओं द्वारा न्यादर्श में प्रवादी प्रत्यार्थी का चयन पक्षपाती हो सकता है। शोधकर्त्ता के शोध को इसमें शामिल किया गया है।
2. **चयन में कठिनाई**—वास्तव में प्रतिनिधि न्यादर्श का चयन करना अत्यन्त कठिन है; क्योंकि घटकों का वृहत आकार एक अच्छे न्यादर्श के चयन में बाधा उत्पन्न करती है।
3. **विशेष ज्ञान की आवश्यकता**—निदर्शन विधियों का प्रयोग करने के लिए इस विषय की अधिक सूचना की आवश्यकता होती है। यदि विषय का विशेष ज्ञान नहीं प्राप्त है तो अन्वेषक द्वारा भ्रामक परिणाम प्राप्त हो सकते हैं।
4. **सहयोग की समस्या**—बिखरे हुए निदर्शन विषय के कारण शोधकर्त्ता के साथ असहयोगात्मक हैं।
5. **न्यूनतम सटीकता**—जब उच्च स्तर की सटीकता की आशा की जाती है तो न्यादर्श प्रणाली अनुपयुक्त होती है।
6. **सीमित प्रकृति**—छोटे या भिन्न विस्तृत स्थानों के कारण एक प्रतिनिधि नमूना प्राप्त करना असंभव है जहाँ जनगणना अध्ययन सबसे अच्छा सम्भव विकल्प है।

प्र.5. निदर्शन/नमूना की विधियों का वर्णन करते हुए इन विधियों के गुण तथा दोषों को भी समझाइए।

उत्तर

निदर्शन की विधियाँ
(Method of Sampling)

इस प्रकार न्यायदर्श डिजाइन मूल रूप से दो प्रकार के होते हैं जैसे कि–सम्भावना नमूनाकरण एवं गैर सम्भाव्यता निदर्शन इन्हें नीचे दिए गए आँकड़े में दर्शाया गया है—

I. प्रायिकता नमूना विधि (Probability Sampling Method)

इस विधि में समग्र की सभी इकाइयों को न्यादर्श का चयन समझ–बूझकर एवं अपनी इच्छानुसार करने का अवसर दिया जाता है। इसी को 'यादृच्छिक निदर्शन' या 'प्रायिकता निदर्शन' कहते हैं। आकस्मिक रूप तथा सम्भावना के आधार पर न्यादर्श के चयन से

प्राप्त होने वाले परिणाम प्रायिकता के सन्दर्भ में आश्वासन की भाँति हैं। इस प्रकार उद्देश्य के अनुसार जान-बूझकर न्यादर्श को छाँटा जाता है। जिससे प्राप्त परिणाम पूरे समग्र को प्रदर्शित कर सके। विभिन्न सम्भाव्यता निदर्शन की विधियाँ इस प्रकार है—

1. **सरल यादृच्छिक निदर्शन**—यह निदर्शन की सबसे प्रसिद्ध तथा सरल विधि है। जहाँ जनसंख्या की प्रत्येक इकाई के न्यादर्श में शामिल होने की सम्भावना होती है। **उदाहरण के लिए**—जनसंख्या का आकार 'N' है तथा n इकाई यादृच्छिक रूप से न्यादर्श के लिए चयनित की जाती है। जिसमें $^{N}C_{n}$ न्यादर्श के समान रूप से चयनित होने की सम्भावना प्रकट होती है। सरल यादृच्छिक निदर्शन के अनुसार जनसंख्या के प्रत्येक तत्त्व को निदर्शन में शामिल करने का एक समान अवसर एवं विकल्प एक दूसरे से स्वतंत्र है। प्रत्येक सम्भावित न्यायदर्श संयोजन को चुने जाने की समान सम्भावना है।

   सरल यादृच्छिक निदर्शन की विधियाँ—सरल यादृच्छिक निदर्शन की कुछ सामान्य विधियाँ निम्नवत् हैं—

   (i) **लॉटरी विधि**—इस विधि में निम्नलिखित चरण शामिल होते हैं—

   (a) माना N जनसंख्या का आकार है जिसमें न्यायदर्श n चुना जाता है।

   (b) इन्हें एक बैग, कटोरे या कुछ अन्य कंटेनर में एनगद सावधानी से मिश्रण किया जाता है, तत्पश्चात् या तो प्रतिस्थापन द्वारा या बिना प्रतिस्थापन के यादृच्छिक रूप से चुना जाता है।

   (c) चरण c में तैयार की गई वस्तुओं पर संख्याओं को वहन करने वाली जनसंख्या में इकाइयों की संख्या वांछित यादृच्छिक नमूने का गठन करती है।

   (d) इस पद्धति का प्रयोग सरल एवं आसान है परन्तु जैसे-जैसे जनसंख्या का आकार अनंत तक बढ़ता जाता है यह विधि अक्षम्य है।

   (ii) **यादृच्छिक संख्याओं का प्रयोग करके**—यादृच्छिक संख्या तालिका जो एक न्यायदर्श का चयन करने में सहायता करती है। यह कुछ विशेषज्ञों द्वारा निर्मित की गई है। सभी विद्यमान तालिकाओं में सबसे लोकप्रिय टिपेट के सारणी अधिक लोकप्रिय एवं उपयोग में हैं। दी गई जनसंख्या में से इन नंबरों के माध्यम से नमूनों का यादृच्छिक चयन किया जाता है। यह तालिका 0 से 9 तक होती है, जिसमें तालिका की किसी भी स्थिति में प्रदर्शित होने का एक समान अवसर प्रदान करती है। यादृच्छिक संख्याओं का वास्तविक उपयोग अधिक जनसंख्या के लिए होता है, जहाँ यादृच्छिक संख्या तालिका में कई कॉलम एवं पक्तियाँ होती हैं जिनमें से किसी एक को यादृच्छिक रूप से चुना जाता है तथा पुनः न्यायदर्श को वांछित आकार के क्रम-से-क्रम रूप में चुना जाता है। बिना किसी पूर्वाग्रह के यह यादृच्छिक संख्याओं का एक प्रारूप प्रदान करता है।

2. **व्यवस्थित निदर्शन**—समग्र से यादृच्छिक रूप में एक इकाई के चयन के पश्चात् अन्य इकाइयों को निश्चित अन्तराल पर व्यवस्थित रूप से चुना जाता है। यह विधि तब लागू होती है जब जनसंख्या का आकार सीमित होता है। किसी भी प्रणाली के आधार पर समग्र की इकाइयों को व्यवस्थित किया जाता है। इस विधि में समग्र को वर्णानुक्रम, संख्यात्मक, भौगोलिक व्यवस्था के आधार पर व्यवस्थित किया जाता है।

3. **स्तरीकृत यादृच्छिक निदर्शन**—स्तरीकृत यादृच्छिक निदर्शन में न्यादर्श समग्र के कई सजातीय स्तरों/भागों से चयनित किए जाते हैं जो कि एक सम्पूर्ण बहुजातीय समग्र के रूप में चयनित किए जाते हैं। निदर्शन करने की प्रक्रिया निम्नलिखित हैं—

   (i) न्यादर्श रूप में चुने गए समग्र को समूह के रूप में विभाजित (स्तरीकृत) किया जाता है जो समूह समग्र की सभी इकाइयों को परस्पर अनन्य है तथा सम्पूर्ण मंदो को शामिल करता है।

   (ii) एक साधारण यादृच्छिक न्यादर्श प्रत्येक समूह से स्वतंत्र रूप में चुना जाता है।

   सरल यादृच्छिक निदर्शन से, स्तरीकृत यादृच्छिक निदर्शन की प्रक्रिया में अन्तर होता है। सरल यादृच्छिक निदर्शन में निदर्शन वस्तुओं को सम्पूर्ण जगत/प्रत्येक स्थान से यादृच्छिक चुना जाता है, जबकि स्तरीकृत निदर्शन में, निदर्शन के डिजाइन को प्रत्येक तह/स्तर से अलग यादृच्छिक निदर्शन का चयन होता है। समता के मध्य निदर्शन का वितरण सरल यादृच्छिक निदर्शन में संयोग पर आधारित है।

   औपचारिक रूप से, जनसंख्या को गैर-अतिव्यापी समूहों में विभाजित किया जाता है (अर्थात्, स्तर/परतें)

$$N_1, N_2, \ldots\ldots, N_i$$

   इस प्रकार,
$$N_1 + N_2 + \ldots\ldots + N_i = N$$

   उस दशा में प्रत्येक तह/स्तर में यादृच्छिक निदर्शन का चयन $f = \dfrac{n}{N}$ जहाँ f निदर्शन भिन्न है।

4. **समूह निदर्शन**—इस विधि के अनुसार, पहले समग्र को विभिन्न समूहों में उप-विभाजित कर दिया जाता है। सरल यादृच्छिक निदर्शन की भाँति सभी इकाइयों के न्यादर्श को समूह के अनुरूप चयनित किया जाता है। **उदाहरण के लिए**—यदि मुम्बई शहर में एक सर्वेक्षण करना है तो शहर को 40 समूह में विभाजित किया जा सकता है। इसके बाद 40 समूह में से 5 समूह का यादृच्छिक रूप से चयन किया जाता है। इन 5 समूह में रह रहे व्यक्तियों से किसी विशेष मुद्दे पर अपनी राय देने के लिए एक साक्षात्कार किया जाता है। चुने गए समूह का आकार छोटा होना चाहिए अर्थात् न्यादर्श इकाई के बराबर या उससे अधिक इकाइयाँ प्रत्येक समूह में होनीं चाहिए।
5. **बहुस्तरीय निदर्शन/बहुचरणीय प्रतिचयन**—समूह निदर्शन का संशोधन बहुस्तरीय निदर्शन कहलाता है। समूह में चयनित सभी इकाइयों द्वारा न्यादर्श का चयन किया जाता है लेकिन बहुस्तरीय निदर्शन में इकाइयों का चयन दो तीन तथा चार स्तरों में किया जाता है। सर्वप्रथम समग्र की प्रथम स्तरीय न्यादर्श इकाई में विभाजित किया जाता है। फिर दूसरे चरण में इकाइयों को उपविभाजित किया जाता है। इसमें एक और न्यादर्श को चुना जाता है। इसी प्रकार तीसरे तथा चौथे चरण में इकाइयों को उपविभाजित किया जाता है। **उदाहरण के लिए**—एक शहरी सर्वेक्षण में यदि शहर की जनसंख्या ज्ञात करनी है तो सर्वप्रथम उस शहर को कुछ कस्बों में विभाजित कर दिया जाएगा। फिर क्षेत्रों को इस प्रकार विभाजित किया जाता है जिसमें एक प्रकार के व्यक्ति एक ही क्षेत्र में रहते हैं। इसके बाद प्रत्येक कस्बों के घरों को उपन्यादर्श के रूप में चयनित किया जाएगा।
6. **क्षेत्र निदर्शन/प्रतिचयन**—क्षेत्र निदर्शन बहुस्तरीय निदर्शन का एक रूप है जिसमें समग्र का विभाजन सूचियों या रजिस्टरों की अपेक्षा मानचित्रों का प्रयोग भौगोलिक आधार पर किया जाता है। यह सामान्यत: उन देशों द्वारा उपयोग किया जाता है जहाँ व्यवस्थित (सूची) निदर्शन संरचना का निर्माण नहीं हुआ है। समूह निदर्शन 'क्षेत्र निदर्शन' का अन्य नाम है। जैसे—जनसंख्या सूची/भौगोलिक आधार में समूह प्रतिचयन का प्रयोग क्षेत्र निदर्शन ही कहलाता है। इसमें मानचित्र की सहायता से सर्वेक्षण किए जाने वाले क्षेत्रों को उप क्षेत्रों में विभाजित किया जाता है। समूह प्रतिचयन की सकारात्मक तथा नकारात्मक विशेषताएँ क्षेत्र निदर्शन में लागू होती हैं।

प्रायिकता निदर्शन विधि के गुण (Merits of Probability Sampling Method)

इसके गुण निम्न प्रकार हैं—

1. **निष्पक्ष अनुमान**—वह नमूना विधि जो मूल रूप से निष्पक्ष रूप से निष्पक्ष अनुमान प्रदान करती है, इसको महत्त्वपूर्ण सटीकता वाले यादृच्छिक नमूना कहा जाता है। यदि अन्वेषक द्वारा निष्पक्षता के इस स्तर की आवश्यकता होती है तो कुछ वैकल्पिक संभावना नमूनाकरण महत्त्वपूर्ण होता है।
2. **स्पष्टता**—जनसंख्या में प्रत्येक वस्तु को चयनित एवं विश्लेषण किए जाने की समान प्रायिकता होती है।
3. **आसान**—निदर्शन की इस विधि द्वारा आसान आँकड़े विश्लेषण और विभ्रम गणना की अनुमति है।

प्रायिकता निदर्शन विधि विधि के दोष (Demerits of Prabability Sampling Method)

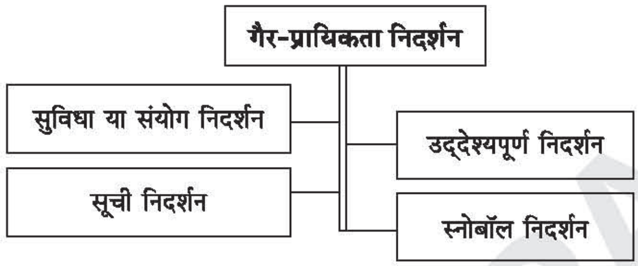
इसके दोष निम्न प्रकार हैं—

1. **कम कुशल**—इस विधि की तुलना में अन्य निदर्शन विधि अधिक सांख्यिकीय रूप से कुशल होती हैं।
2. **अतिरिक्त ज्ञान का गैर प्रयोग**—जनसंख्या को कैसे व्यवस्थित किया जाना है इस सम्बन्ध में किसी अतिरिक्त ज्ञान का उपयोग नहीं किया जाता है।
3. **उच्च स्तरीय कौशल**—संभावना निदर्शन का उपयोग करने के लिए कौशल एवं अनुभव की एक उच्च स्तर की आवश्यकता होती है।
4. **अधिक समय की आवश्यकता**—योजना एवं संभावना के निष्पादन के लिए अधिक समय की आवश्यकता होती है।
5. **उच्च लागत**—गैर संभाव्यता निदर्शन की तुलना में संभावना निदर्शन में उच्च लागत शामिल होती है।

II. गैर-प्रायिकता निदर्शन विधि (Non-probability Sampling Method)

गैर-प्रायिकता निदर्शन उस प्रकार की निदर्शन प्रक्रिया है जिसमें सम्भावना का अनुमान लगाने के लिए कोई आधार नहीं होता है। जनसंख्या में प्रत्येक मद को न्यायदर्श में शामिल किया गया है या नहीं। इस प्रणाली में चयन करने वाले 'न्यादर्श की इकाइयों' का चयन शोधकर्त्ता अपनी विवेक के अनुसार करता है। गैर-प्रायिकता नमूने के विभिन्न नाम है जैसे कि विचारपूर्वक नमूनाकरण,

उद्देश्यपूर्ण नमूनाकरण, निर्णय सम्बंधी निदर्शन इस प्रकार के नमूने में शोधकर्त्ता जानबूझकर निदर्शन के लिए मद का चयन करता है तथा मद के सम्बन्ध में शोधकर्त्ता की प्राथमिकता को अधिक महत्त्व प्रदान किया जाता है। दूसरे शब्दों में जाँच के आयोजक के गैर-संभाव्यता नमूने के अन्तर्गत जानबूझकर विशिष्ट इकाइयों का चयन करता है ताकि इस आधार पर एक नमूना का गठन किया जा सके कि उसके द्वारा चुना गया छोटा-सा भाग विश्व के आँकड़ों से बाहर है। विभिन्न गैर संभाव्यता निदर्शन डिजाइन इस प्रकार है—



1. **सुविधा या संयोग निदर्शन**—सुविधा तथा अनुमानित आधार पर शोधकर्त्ता के द्वारा न्यादर्श इकाई का चयन, सुविधा निदर्शन कहलाता है। जिस न्यादर्श का चयन गलती तथा संयोगवश होता है उसे संयोग निदर्शन कहते हैं। जिन नमूनों को गलती से चुना जाता है, उन्हें आकस्मिक नमूने के रूप में जाना जाता है। चयन प्रक्रियाकरण के परिणामस्वरूप (इकाइयों को उनके वास्तविक स्थान से चुना जाता है। इसे 'गली के आदमी का निदर्शन' कहा जाता है। उनकी पहुँच के कारण नमूने इकाइयों का चयन किया जाता है। उदाहरण के लिए—आसपास की उपयुक्त दुकानों में नए उत्पाद को जोड़कर, उत्पाद की क्षमता का परीक्षण किया जाता है। यह उत्पाद के क्रय एवं विक्रय के विवरण को देखकर पूरा किया जाता है।
2. **उद्देश्यपूर्ण नमूनाकरण**—एक गैर-सम्भाव्यता निदर्शन जो कुछ मानदण्डों का पालन करता है। उसे उद्देश्यपूर्ण निदर्शन कहा जाता है। उद्देश्यपूर्ण निदर्शन मूल रूप से निम्नलिखित दो प्रकार के होते हैं—
   (i) **न्यादर्श निदर्शन**—वह अध्ययन जो जनसंख्या के मापदंडों पर आधारित होता है, जहाँ इकाइयों को एक शोधकर्त्ता या उसके निर्णय पर किसी अन्य विशेषज्ञ द्वारा चुना जाता है, तो इसे निर्णय निदर्शन कहा जाता है। निदर्शन की यह तकनीक उस स्थिति में उपयुक्त होती है, जहाँ जनसंख्या के अध्ययन को ज्ञात करना कठिन होता है या ऐसे सदस्य है जो ज्ञान या रुचि के संदर्भ में साक्षात्कार के लिए दूसरों की तुलना में बेहतर है।
   (ii) **उद्धरण नमूनाकरण**—उद्धरण नमूनाकरण सबसे अधिक प्रयोग की जाने वाली गैर-संभाव्यता नमूना डिजाइन है जो उपभोक्ता सर्वेक्षण में सबसे अधिक उपयोग किया जाता है। स्तरीकरण के सिद्धांत का प्रयोग इस निदर्शन विधि द्वारा भी किया जाता है। स्तरीकृत यादृच्छिक नमूनाकरण में शोधकर्त्ता स्तर के निर्माण से प्रारम्भ होता है। उपभोक्ता सर्वेक्षणों में स्तरीकरण के सामान्य आधार जनसांख्यिकीय; जैसे—आयु, लिंग, आय आदि हैं। मिश्रण स्तरीकरण का सामान्य तौर पर प्रयोग किया जाता है। **उदाहरण के लिए**—लिंग वार, आयु समूह आदि।
3. **सूची निदर्शन**—इस विधि में प्रतिभागियों के एक समूह को यादृच्छिक निदर्शन विधि द्वारा चयन किया जाता है तथा वह समूह बार-बार उसी सूचना के लिए निश्चित समयावधि में उस प्रक्रिया को दोहराता है। यह न्यादर्श वहाँ अर्द्धस्थायी होता है जहाँ सदस्यों को पुनरावृत्ति अध्ययन के लिए बार-बार शामिल किया जाता है। इस निदर्शन में नमूनों को चुनने तथा संपर्क करने की सुविधा है जो मेल द्वारा भी उच्च प्रतिक्रिया दर प्राप्त करने में उपयुक्त होता है।
4. **स्नोबॉल निदर्शन**—जब वांछित निदर्शन की विशेषताएँ सीमित होती हैं तो विशेष गैर-प्रायिकता विधि लागू/अनुप्रयोग की जाती है। इस विधि में उत्तरदाताओं का पता लगाना कठिन होता है; क्योंकि यह बहुत महँगा है। प्रारम्भिक विषयों के सन्दर्भ के आधार पर स्नोबॉल का निदर्शन अतिरिक्त विषयों को उत्पन्न करता है। हालाँकि यह तकनीक पक्षपाती तथा आबादी से एक अच्छे रेखीय सम्बन्ध का प्रदर्शन करने में असमर्थ होता है किन्तु नाटकीय रूप से यह खोज लागत को कम करती है।

गैर-प्रायिकता निदर्शन विधि के गुण
(Merits of Non-probability Sampling Method)

इसके गुण निम्न प्रकार हैं—

1. **मितव्ययी**—इससे भौगोलिक एकाग्रता प्राप्त की जा सकती है जिससे लागत न्यूनतम हो जाती है।
2. **त्वरित**—यह विधि कुछ परिस्थितियों में उपयोगी एवं त्वरित होती है।
3. **विशिष्ट स्थिति प्रकार**—यह कुछ विशेष स्थितियों जैसे कि अवैध ड्रग उपयोगकर्त्ताओं के लिए एकमात्र तकनीक हो सकती है।
4. **जनसंख्या के विशिष्ट सदस्य**—सहायक यदि शोधकर्त्ता को वास्तव में किसी जनसंख्या के विशिष्ट पूरी सदस्यों में दिलचस्पी होती है न कि पूरी जनसंख्या में।
5. **प्रारम्भिक अध्ययन**—एक प्रारम्भिक अध्ययन के तरह एक खोज पूर्ण शोध के रूप में कार्य करता है, यह निर्धारित करता है कि कोई समस्या विद्यमान है या नहीं।

गैर-प्रायिकता निदर्शन विधि के दोष
(Demerits of Non-probability Sampling Method)

इसके दोष निम्न प्रकार हैं—

1. **विवरण की आवश्यकता**—विश्व की प्रारम्भिक सूचना की आवश्यकता होती है।
2. **त्रुटियाँ**—निदर्शन चयन में त्रुटियाँ आसानी से हो जाती हैं।
3. **व्यक्तिपरक प्रकृति**—गैर संभाव्यता निदर्शन की विषयवस्तु पूरी जनसंख्या के लिए अंतर्क्रिया करने से रोकती है।
4. **चयन पूर्वाग्रह**—चयन पूर्वाग्रह के कारण वैधता एवं विश्वसनीयता संदिग्ध होती है।
5. **विश्वसनीयता**—परिणामी अनुमानों की विश्वसनीयता का मूल्यांकन नहीं किया जा सकता है जिसके परिणाम स्वरूप उपयोगकर्त्ता को यह ज्ञात नहीं होता है कि सर्वेक्षण खोजने की किसी भी व्याख्या में कितना विश्वास रखा जा सकता है।

प्र.6. प्राथमिक समंकों से क्या अभिप्राय है? उनके संकलन की विभिन्न विधियों का संक्षेप में वर्णन कीजिए। क्या सभी परिस्थितियों में कोई एक रीति सर्वोत्तम कही जा सकती है?

उत्तर

प्राथमिक समंक
(Primary Data)

प्राथमिक समंक उन्हें कहते हैं जिन्हें अनुसन्धानकर्त्ता स्वयं या प्रगणकों द्वारा अनुसन्धान के लिए पहली बार आरम्भ से अन्त तक नये सिरे से एकत्रित करता है। प्रथम बार संकलित होने के कारण ही इन्हें प्राथमिक समंक कहा जाता है। इस प्रकार के समंक अपने मौलिक रूप में होते हैं; क्योंकि ये समंक किसी पत्र-पत्रिका या पुस्तक में प्रकाशित नहीं होते हैं। जैसे यदि हम किसी कारखाने में कार्यरत मजदूरों के जीवन-स्तर का अध्ययन करने हेतु प्रत्येक मजदूर से सम्पर्क स्थापित करके उनकी आय एवं व्यय के आँकड़े प्राप्त करते हैं तो ये आँकड़े हमारे लिए प्राथमिक समंक कहलायेंगे।

प्राथमिक समंकों को एकत्र करने की रीतियाँ
(Methods of Collecting Primary Data)

प्राथमिक समंकों को एकत्र करने की निम्नलिखित प्रमुख रीतियाँ हैं—

1. प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान (Direct Personal Investigation)

इस पद्धति में अनुसन्धानकर्त्ता सूचना देने वालों से प्रत्यक्ष रूप से सम्बन्ध स्थापित करके समंक एकत्र करता है। इसमें अनुसन्धानकर्त्ता स्वयं उन व्यक्तियों के सम्पर्क में आता है जिनके विषय में आँकड़े एकत्र करना चाहता है। यदि अनुसन्धानकर्त्ता व्यवहारकुशल, धैर्यवान व मेहनती है तो इस पद्धति द्वारा संकलित आँकड़े बहुत विश्वसनीय होते हैं।

उपयुक्तता—इस पद्धति का प्रयोग निम्नलिखित दशाओं में उपयुक्त रहता है—(1) जहाँ समंकों की शुद्धता पर अधिक जोर देना हो। (2) अनुसन्धान का क्षेत्र सीमित हो या स्थानीय प्रकृति का हो। (3) जहाँ अनुसन्धान के विषय की जटिलता के कारण यह आवश्यक समझा जाता हो कि अनुसन्धानकर्त्ता स्वयं उपस्थित रहे। (4) जहाँ आँकड़ों को गुप्त रखना हो। (5) जहाँ आँकड़ों की मौलिकता पर जोर देना हो।

2. अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान (Indirect Oral Investigation)

अनुसन्धान का क्षेत्र विस्तृत होने पर अनुसन्धानकर्त्ता के लिए यह सम्भव नहीं हो पाता कि यह प्रत्यक्ष रूप से अनुसन्धान के क्षेत्र की सभी इकाइयों से प्रत्यक्ष सम्पर्क स्थापित कर समंक एकत्रित कर सके। ऐसी दशा में वह किसी ऐसे व्यक्ति से सूचनाएँ प्राप्त करता है जिसे उस विषय की जानकारी है। इस पद्धति में अनुसन्धानकर्त्ता अप्रत्यक्ष एवं मौखिक रूप से सम्बन्धित व्यक्तियों के बारे में अन्य जानकार व्यक्तियों से जिन्हें साक्षी कहते हैं, सूचना प्राप्त करता है। उदाहरणार्थ, कक्षा के विद्यार्थियों के बारे में कोई सूचना कक्षा के मानीटर या कक्षा अध्यापक से प्राप्त करना या श्रमिकों के बारे में कोई सूचना श्रम निरीक्षक या किसी अन्य सम्बन्धित अधिकारी से लेना।

उपयुक्तता—इस पद्धति का प्रयोग तभी किया जाना चाहिए जब—(i) अनुसन्धान का क्षेत्र अधिक व्यापक हो। (ii) सम्बन्धित व्यक्ति अज्ञानता के कारण सूचना देने में असमर्थ हो। (iii) सम्बन्धित व्यक्ति सूचना देने में रुचि न ले रहे हों। (iv) सूचना प्रदान करने वाले व्यक्तियों से प्रत्यक्ष रूप से सम्पर्क स्थापित करना सम्भव न हो। (v) सूचना प्रदान करने वाले व्यक्तियों से पक्षपातपूर्ण व्यवहार करने की आशा हो। (vi) विशेषज्ञों की राय आवश्यक हो।

3. स्थानीय स्रोतों या संवाददाताओं द्वारा सूचना प्राप्ति (Information through Local Sources or Correspondents)

इस पद्धति के अन्तर्गत अनुसन्धानकर्त्ता स्वयं आँकड़ों को एकत्र नहीं करता वरन् स्थानीय व्यक्तियों को आवश्यक सूचनाएँ एकत्र करने के लिए नियुक्त कर दिया जाता है। वे आवश्यक सूचनाएँ समय-समय पर भेजते रहते हैं ताकि अनुसन्धानकर्त्ता को समंक उपलब्ध हो सके। आवश्यक सूचनाएँ एकत्र करने के लिए नियुक्त व्यक्तियों को ही संवाददाता कहते हैं। समाचार-पत्रों व पत्रिकाओं तथा बाजार भावों के सम्बन्ध में सूचना प्राप्त करने हेतु इसी पद्धति को अपनाया जाता है।

उपयुक्तता—इस पद्धति का प्रयोग निम्न दशाओं में अधिक उपयुक्त होता है—(i) जब नियमित रूप से समय-समय पर सूचनाएँ प्राप्त करना आवश्यक होता है; जैसे—समाचार पत्र, पत्रिकाओं से सम्बन्धित संस्थान, (ii) जहाँ उच्च स्तर की शुद्धता की आवश्यकता न हो।

4. अनुसूची अथवा प्रश्नावली द्वारा सूचनाएँ प्राप्त करना (Informations through Schedules or Questionnaires)

इस पद्धति के अन्तर्गत अनुसन्धानकर्त्ता जाँच से सम्बन्धित प्रश्नों की एक तालिका तैयार करता है और सम्बन्धित व्यक्तियों से उन प्रश्नों के उत्तर प्राप्त करके समंकों का संकलन कर लिया जाता है। अनुसन्धान से सम्बन्धित प्रश्नों की अनुसूची को ही प्रश्नावली (Questionnaires) कहते हैं।

प्रश्नावली विधि द्वारा समंक प्राप्त करने के निम्नलिखित दो रूप हो सकते हैं—

(i) सूचना देने वालों से प्रश्नावली भरवाकर सूचना प्राप्ति—इस पद्धति में समंकों का संकलन करने के लिए तैयार की गई प्रश्नावली को सूचना देने वाले व्यक्तियों से भरवाकर आवश्यक सूचनाएँ प्राप्त की जाती हैं। इन प्रश्नावलियों को भरवाने के लिए प्रश्नावली की एक-एक प्रति सम्बन्धित व्यक्तियों (सूचना देने वाले व्यक्तियों) के पास डाक द्वारा भेज दी जाती है। साथ में एक पत्र भी भेजा जाता है जिसमें उनसे प्रश्नावली को भरकर एक निश्चित समय तक वापस कर अनुसन्धान कार्य में सहयोग देने की प्रार्थना की जाती है। सूचना प्रदान करने वाले व्यक्तियों को इस बात का भी आश्वासन दिया जाता है कि उनके द्वारा प्रदत्त सूचनाएँ गुप्त रखी जायेंगी।

उपयुक्तता—इस पद्धति का प्रयोग तभी उपयुक्त रहता है जब अनुसन्धान का क्षेत्र बहुत विस्तृत हो तथा सूचना देने वाले व्यक्ति शिक्षित हों, क्योंकि यदि सूचक पढ़े-लिखे नहीं होंगे तो प्रश्नों का उत्तर नहीं भेज सकेंगे।

भारतवर्ष में उद्योगों के वार्षिक सर्वेक्षण के लिए यही पद्धति अपनायी जाती है। बहुत-सी बड़ी-बड़ी कम्पनियाँ अपनी वस्तुओं के सम्बन्ध में उपभोक्ताओं की राय की जानकारी प्राप्त करने के लिए इसी प्रणाली का प्रयोग करती हैं।

(ii) प्रगणकों द्वारा प्रश्नावली भरवाकर सूचना प्राप्ति—सूचना देने वालों से प्रश्नावली भरवाकर सूचना प्राप्ति में मुख्य दोष यह है कि अधिकतर सूचक (informants) प्रश्नावली को भरकर ही नहीं भेजते हैं और थोड़े बहुत जो भरकर भी भेजते है उनमें काफी अशुद्धियाँ एवं अपूर्णता होती हैं। इस कमी को दूर करने के लिए ही इस पद्धति का प्रयोग करते हैं।

इस पद्धति में प्रश्नावली को डाक द्वारा सूचकों के पास नहीं भेजा जाता है वरन् अलग-अलग क्षेत्रों के लिए प्रगणकों (Enumerators) की नियुक्ति करके प्रश्नावली भरने का कार्य उन्हें सौंप दिया जाता है। प्रगणक अपने क्षेत्र में जाकर सूचना देने वालों से सम्पर्क स्थापित करते हैं और सूचकों को विश्वास में लेकर उनसे आवश्यक प्रश्नों के उत्तर पूछ-पूछ कर स्वयं प्रश्नावली को भरते हैं। कार्य आरम्भ करने से पूर्व प्रगणकों को इस कार्य का प्रशिक्षण दिया जाता है।
इस प्रणाली का प्रयोग अधिकांशत: शासकीय अनुसन्धानों के लिए किया जाता है। हमारे देश में जनसंख्या सम्बन्धी आँकड़ों को इसी पद्धति द्वारा एकत्रित किया जाता है।

प्राथमिक समंक संकलन की उपयुक्त पद्धति का चयन
(Selection of Appropriate Method to Collect Primary Data)

प्राथमिक समंक एकत्र करने की उपर्युक्त वर्णित पद्धतियों में से किसी एक रीति को सर्वश्रेष्ठ नहीं कहा जा सकता। प्रत्येक रीति के अपने-अपने गुण दोष हैं। कहीं पर कोई पद्धति उपयुक्त रहती है तो कहीं पर कोई, फिर भी उपयुक्त पद्धति का चुनाव करते समय निम्नलिखित बिन्दुओं पर विचार करना लाभप्रद सिद्ध होता है—

1. अनुसन्धान की प्रकृति,
2. अनुसन्धान का उद्देश्य एवं क्षेत्र,
3. वांछनीय शुद्धता की मात्रा,
4. उपलब्ध समय एवं
5. आर्थिक साधन।

यद्यपि समंक संकलन की उपयुक्त प्रणाली का चुनाव उपरोक्त बातों को ध्यान में रखकर किया जाना चाहिए, परन्तु समंक संग्रहण की सफलता बहुत कुछ अनुसन्धानकर्त्ता की योग्यता एवं अनुभव पर भी निर्भर करती है।

प्र.7. द्वितीयक समंकों को परिभाषित कीजिए और इनके संकलन के विभिन्न स्रोतों का वर्णन कीजिए। द्वितीयक समंकों का प्रयोग करते समय रखी जाने वाली सावधानियाँ बताइए।

उत्तर

द्वितीयक समंक
(Secondary Data)

जब कोई अनुसन्धानकर्त्ता ऐसे समंकों का उपयोग करता है जो पहले से ही अन्य व्यक्तियों या संस्थाओं द्वारा एकत्र व प्रकाशित किये जा चुके हों तो उन्हें द्वितीयक समंक कहते हैं। इस प्रकार के आँकड़े किसी भी पत्र-पत्रिका, सरकारी एवं गैर-सरकारी प्रकाशनों आदि से लिये जा सकते हैं। उदाहरणार्थ, यदि कोई अनुसन्धानकर्त्ता सरकार द्वारा प्रकाशित कृषि समंकों का प्रयोग अपने अनुसन्धान कार्य में करता है तो सम्बन्धित समंक उसके लिए द्वितीयक समंक कहलायेंगे।
ब्लेयर (Blair) के अनुसार, "द्वितीयक समंक वे हैं जो पहले से अस्तित्त्व में हैं और जो वर्तमान प्रश्नों के उत्तर में नहीं बल्कि किसी दूसरे उद्देश्य के लिए एकत्र किये गये हैं।"

द्वितीयक समंकों का संकलन
(Collection of Secondary Data)

जब अनुसन्धानकर्त्ता, किसी व्यक्ति अथवा संस्था द्वारा किसी निश्चित उद्देश्य की पूर्ति के लिए पहले से ही संकलित समंकों का अपने अनुसन्धान के लिए प्रयोग करता है तो उन्हें द्वितीयक समंक कहते हैं। इस प्रकार के समंकों के प्रयोग से न केवल खर्च ही कम होता है वरन् अनुसन्धान कार्य सरल भी हो जाता है। द्वितीयक समंकों के संकलन की रीतियों से अभिप्राय उन स्रोतों से है जहाँ से द्वितीयक समंक प्राप्त किये जा सकते हैं।
द्वितीयक समंकों के प्रमुख स्रोत—द्वितीयक समंकों को प्राप्त करने के स्रोतों को दो भागों में बाँटा जा सकता है—

I. प्रकाशित स्रोत (Published Sources)

विभिन्न सरकारी, गैर सरकारी तथा अनेक अनुसन्धान संस्थाएँ महत्त्वपूर्ण समंक एकत्र करके उन्हें समय-समय पर प्रकाशित करती रहती हैं। अनुसन्धानकर्त्ता सम्बन्धित प्रकाशन से आवश्यक समंकों का संकलन कर सकता है। प्रकाशित समंकों के अग्र प्रमुख स्रोत हैं—

1. **अन्तर्राष्ट्रीय प्रकाशन**—अन्तर्राष्ट्रीय सांख्यिकीय आँकड़ों की आवश्यकता होने पर विभिन्न अन्तर्राष्ट्रीय संस्थाओं के प्रकाशनों का प्रयोग किया जा सकता है; जैसे—संयुक्त राष्ट्र संघ (U.N.O.), अन्तर्राष्ट्रीय श्रम संगठन (I.L.O.), विश्व बैंक (World Bank), आदि संस्थाओं द्वारा प्रकाशित वार्षिक रिपोर्ट आदि।
2. **सरकारी प्रकाशन**—प्राय: प्रत्येक देश की केन्द्रीय तथा राज्य सरकार विभिन्न विषयों से सम्बन्धित समंक एकत्रित करती है तथा उनका प्रकाशन करवाती है। भारत में लगभग सभी मन्त्रालयों द्वारा अनेक प्रकार की सूचनाएँ व आँकड़े प्रकाशित कराये जाते हैं जो अनुसन्धान कार्य व सामान्य ज्ञान के लिए अत्यन्त उपयोगी होते हैं। भारत में प्रमुख सरकारी प्रकाशन इस प्रकार हैं—Statistical Abstract of India (Annual), Reserve Bank of India Bulletin, Indian Trade Journal, Annual Survey of Industries, Agriculture Statistics of India.
3. **अर्द्ध-सरकारी संस्थाओं के प्रकाशन**—नगरपालिकाओं, नगर-निगम, जिला बोर्डों, आदि अर्द्ध-सरकारी संस्थाओं द्वारा प्रकाशित किये गये समंक अर्द्ध-सरकारी प्रकाशन कहलाते हैं। इन समंकों का सम्बन्ध मुख्यत: जन्म-मरण, स्वास्थ्य व शिक्षा आदि से होता है।
4. **आयोग व समितियों की रिपोर्ट**—प्राय: सरकार द्वारा विभिन्न समस्याओं की जाँच के लिए समितियों तथा आयोगों का गठन किया जाता रहता है। ये आयोग या समितियाँ सम्बन्धित आँकड़े संकलित करके अपनी रिपोर्ट सरकार के समक्ष प्रस्तुत करती है; जैसे—वित्त आयोग की रिपोर्ट, एकाधिकार आयोग की रिपोर्ट। सरकार इन रिपोर्टों का जनता के हितार्थ प्रकाशन कर देती है। इन प्रकाशित प्रतिवेदनों (Reports) से महत्त्वपूर्ण सांख्यिकीय सामग्री प्राप्त की जा सकती है।
5. **पत्र-पत्रिकाओं के प्रकाशन**—बहुत-सी पत्र तथा पत्रिकाएँ अनेक प्रकार के आँकड़े एकत्र करके प्रकाशित करती हैं। जैसे, Economic Times तथा Financial Express ऐसे दैनिक समाचार पत्र हैं जिनमें आर्थिक एवं व्यावसायिक समंक प्रकाशित होते हैं। इसी प्रकार Commerce, Capital, Economic and Political Weekly, Eastern Economist, आदि ऐसी पत्रिकाएँ हैं जो अर्थशास्त्र वाणिज्य एवं व्यापार के क्षेत्र में समंकों का संकलन कर प्रकाशित करती हैं।
6. **अनुसन्धान संस्थाओं के प्रकाशन**—कुछ संस्थाएँ ऐसी होती हैं जो विभिन्न विषयों पर आँकड़े एकत्र करके अनुसन्धान कार्य करती रहती हैं तथा उन्हें प्रकाशित भी करती हैं जिससे प्रत्येक व्यक्ति को उनके निष्कर्षों की जानकारी हो सके। National Council of Applied Economic Research (N.C.A.E.R.), Indian Statistical Institute, Foundation of Scientific and Economic Research आदि शोध संस्थान समय-समय पर शोध-पत्रों का प्रकाशन करती रहती हैं।
7. **व्यापारिक संस्थाओं एवं परिषदों के प्रकाशन**—सामान्यतया बड़ी-बड़ी व्यापारिक संस्थाएँ एवं परिषदें; जैसे—भारतीय वाणिज्य एवं उद्योग संघ (F.I.C.C.I.) हिन्दुस्तान लीवर लिमिटेड, जूट मिल्स एसोशियेशन, आदि संस्थाएँ व्यापार एवं वाणिज्य से सम्बन्धित अनेक प्रकार के समंक एकत्र करके प्रकाशित करवाती हैं।
8. **व्यक्तिगत अनुसन्धानकर्त्ताओं के प्रकाशन**—अनेक व्यक्ति विभिन्न विषयों पर व्यक्तिगत शोधकार्य सम्पन्न करते हैं और उनका प्रकाशन भी करवा देते हैं। ऐसे प्रकाशनों को ही व्यक्तिगत अनुसन्धानकर्त्ताओं के प्रकाशन कहते हैं।

स्पष्ट है कि अनुसन्धानकर्त्ता अपने प्रयोग के लिए उपर्युक्त वर्णित किसी भी प्रकाशन से समंक संकलन कर सकता है।

II. अप्रकाशित स्रोत (Unpublished Sources)

जो समंक किसी व्यक्ति या संस्था द्वारा एकत्रित किये जा चुके हैं लेकिन किसी भी कारण से उनका प्रकाशन नहीं हुआ है तो उन्हें अप्रकाशित समंक कहते हैं। ऐसे समंकों का संकलन एवं प्रयोग सम्बन्धित व्यक्तियों या संस्थाओं की अनुमति के उपरान्त ही किया जा सकता है।

द्वितीयक समंकों का प्रयोग करने से पहले ध्यान रखने योग्य बातें
(Precautions before using data from a secondary source)

यह तो स्पष्ट ही है कि द्वितीयक समंकों को एकत्रित करने में कोई विशेष समस्या नहीं होती; क्योंकि द्वितीयक समंक पहले से ही संकलित होते हैं। परन्तु द्वितीयक समंकों को प्रयोग में लेने से पूर्व उनकी भली-भाँति जाँच कर लेना आवश्यक है; क्योंकि उन्हें किसी अन्य व्यक्ति या संस्था द्वारा अपने उद्देश्य की पूर्ति हेतु एकत्रित किया गया था। यह हो सकता है कि वे समंक अब किये

जाने वाले अनुसन्धान के लिए उपयुक्त न हों। अत: यह आवश्यक है कि द्वितीयक समंकों का प्रयोग करते समय उनकी आलोचनात्मक जाँच कर ली जाये और यह ज्ञात कर लिया जाये कि क्या वे समंक विश्वसनीय हैं, उद्देश्य के अनुकूल और पर्याप्त हैं । यदि विश्वसनीय हैं,उद्देश्य के अनुकूल एवं पर्याप्त हैं तभी उनका प्रयोग करना चाहिए। समंकों की विश्वसनीयता, अनुकूलता व पर्याप्तता के विषय में जानकारी प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित बातों का ध्यान रखना आवश्यक है—

1. **पिछले संकलनकर्त्ता की योग्यता**—पिछले अनुसन्धानकर्त्ता की योग्यता, कार्यक्षमता व ईमानदारी पर विचार कर लेना चाहिए, क्योंकि उसके पक्षपात के कारण संकलित समंक अशुद्ध हो सकते हैं।
2. **पिछले अनुसन्धान का उद्देश्य**—यह भी देखना चाहिए कि पिछले अनुसन्धान का उद्देश्य एवं क्षेत्र क्या था? पिछले एवं वर्तमान अनुसन्धान के उद्देश्य एवं क्षेत्र में समानता होने पर ही द्वितीयक समंकों के प्रयोग का निर्णय लेना चाहिए।
3. **संकलन का समय तथा परिस्थितियाँ**—यह भी देख लेना उचित होता है कि पिछले संकलनकर्त्ता ने समंकों का संकलन किस समय तथा किन परिस्थितियों में किया था। यदि वर्तमान परिस्थितियाँ उस समय की परिस्थितियों से भिन्न हैं तो उन आँकड़ों का प्रयोग नहीं किया जा सकता।
4. **शुद्धता का स्तर**—द्वितीयक समंकों को प्रयोग में लेने से पूर्व यह जान लेना भी आवश्यक है कि पहली जाँच में शुद्धता का स्तर क्या था? यदि शुद्धता का स्तर ऊँचा रहा हो तो आप उन समंकों पर विश्वास कर सकते हैं अन्यथा नहीं।
5. **सांख्यिकीय इकाई की परिभाषा**—इस बात की भी जाँच की जानी चाहिए कि पिछले अनुसन्धान की इकाई का अर्थ, परिणाम एवं समरूपता वर्तमान समस्या के अनुकूल है या नहीं। यदि दोनों अनुसन्धानों में सांख्यिकीय इकाई का एक ही अर्थ है तो द्वितीयक समंकों का प्रयोग उपयुक्त रहेगा। उदाहरण के लिए, 1980 में शिक्षित व्यक्तियों की संख्या जानने के लिए किये गये सर्वेक्षण में 'शिक्षित व्यक्ति' का अर्थ कम-से-कम एक भाषा पढ़ सकने वाले व्यक्ति से था, परन्तु 1990 में किये जाने वाले सर्वेक्षण में शिक्षित व्यक्ति का अर्थ कम-से-कम एक भाषा पढ़ तथा लिख सकने वाले व्यक्ति से है। स्पष्ट है कि दोनों सर्वेक्षणों में सांख्यिकीय इकाई का अर्थ अलग-अलग है जिस कारण पिछले समंकों का प्रयोग उपयुक्त नहीं होगा।
6. **संकलन विधि**—द्वितीयक समंकों को प्रयोग करने से पूर्व इस बात की भी सन्तुष्टि कर लेनी चाहिए कि पिछले संकलनकर्त्ता द्वारा समंकों का संकलन करने के लिए अपनायी गयी पद्धति भी उपयुक्त है या नहीं। प्रतिदर्श (Sample) विधि द्वारा संकलन की दशा में यह भी देख लेना चाहिए कि प्रतिदर्शों का आकार एवं प्रतिदर्शों की संख्या भी उचित थी या नहीं।
7. **तुलनात्मक अध्ययन**—यह जान लेना भी आवश्यक है कि क्या एक ही विषय पर कई स्रोतों से समंक उपलब्ध हैं? यदि ऐसा है तो विभिन्न स्रोतों से उपलब्ध समंकों की तुलना करके उनकी विश्वसनीयता का पता लगा लेना चाहिए एवं उसी स्रोत के समंकों का प्रयोग करना चाहिए जो सबसे अधिक विश्वसनीय हो।

उपर्युक्त बातों के आधार पर द्वितीयक समंकों की जाँच करने पर यदि वे विश्वसनीय, पर्याप्त एवं उपयुक्त प्रतीत हों तभी उनका प्रयोग वर्तमान अनुसन्धान के लिए करना चाहिए अन्यथा नहीं।

प्र.8. समंकों के सम्पादन को समझाते हुए परिशुद्धता, उपसादन एवं विभ्रम का वर्णन कीजिए।

उत्तर

समंकों का सम्पादन
(Editing of Data)

अर्थ—एकत्रित समंकों को प्रयोग में लाने से पूर्व उनमें काट-छाँट, जाँच तथा संशोधन का कार्य करना ही समंकों का सम्पादन कहलाता है। समंकों का संकलन करते समय एक ओर बहुत-सी अनावश्यक सूचनाएँ व समंक एकत्रित हो जाते हैं तो दूसरी ओर कुछ सूचनाएँ व समंक अपर्याप्त अथवा अधूरे रह जाते हैं एवं इसके साथ-साथ संकलित समंकों में त्रुटि रह जाना भी स्वाभाविक है। अत: अनावश्यक समंकों की छँटनी करना, अपर्याप्त अथवा अधूरी सूचनाओं का पुन: संकलन करना तथा समंकों की शुद्धता की जाँच करना ही समंकों का सम्पादन कहलाता है। संक्षेप में, संकलित समंकों में अशुद्धियों एवं विभ्रमों की गहन जाँच करके उनमें आवश्यक संशोधन करने की प्रक्रिया को ही समंकों का सम्पादन कहते हैं।

समंकों का सम्पादन कोई सरल कार्य नहीं है। इसके लिए सम्बन्धित व्यक्ति में उच्च स्तर की योग्यता, लगन व पैनी दृष्टि का होना आवश्यक है।

समंक संकलन का स्रोत प्राथमिक हो या द्वितीयक, समंक संपादन के निम्नलिखित तीन विशिष्ट पहलू हैं जिनकी विस्तृत विवेचना परमावश्यक है—

1. परिशुद्धता की मात्रा (Degree of Accuracy)

परिशुद्धता का अर्थ यह होता है कि किसी वस्तु या घटना को ठीक उसी प्रकार प्रकट किया जाये जैसी वह है या सुनी या देखी गयी है। परन्तु सांख्यिकी में परिशुद्धता प्राप्त करना असम्भव है; क्योंकि अनुसन्धानकर्त्ता की लापरवाही, पक्षपात, सांख्यिकीय मापदण्डों की अपूर्णता आदि ऐसे कारण हैं जिनकी वजह से सांख्यिकी में पूर्ण शुद्धता बनाये रखना एक अत्यन्त कठिन कार्य है। वास्तव में सांख्यिकी में केवल यथोचित या सापेक्ष शुद्धता (Reasonable or Relative Accuracy) की ही अपेक्षा की जाती है। अतएव यह आवश्यक है कि समंकों का सम्पादन करने से पूर्व शुद्धता का स्तर निश्चित कर लिया जाये। शुद्धता का स्तर अनुसन्धान की प्रकृति, उद्देश्य, समंकों के संकलन की रीति आदि बातों को ध्यान में रखते हुए ही तय किया जाना चाहिए। कुछ ऐसी समस्याएँ होती हैं जहाँ उच्च स्तर की शुद्धता आवश्यक होती है जबकि कहीं पर सामान्य शुद्धता से ही काम चलाया जा सकता है। उदाहरण के लिए, राज्य या देश की जनसंख्या सम्बन्धी आँकड़े एकत्र करने में 50 या 100 व्यक्तियों की घट-बढ़ कोई विशेष महत्त्व नहीं रखती परन्तु यदि एक गाँव के मनुष्यों की जनगणना की जाये तो उसमें 50 या 100 व्यक्तियों की घट-बढ़ हमारे परिणाम को अशुद्ध कर देगी। स्वर्ण (Gold) का वजन करते समय मिलीग्राम तक तौला जाता है जबकि कोयला तोलने में 50 या 100 ग्राम भी महत्त्वपूर्ण नहीं होता। अत: सांख्यिकीय अनुसन्धानों में शुद्धता का स्तर अनुसन्धान की प्रकृति एवं उद्देश्य पर निर्भर करता है।

संक्षेप में, यह कहा जा सकता है कि यद्यपि सांख्यिकी में पूर्ण तथा गणितीय शुद्धता अनिवार्य नहीं है परन्तु इसका अर्थ यह भी नहीं है कि सांख्यिकी को उतनी शुद्धता की उपेक्षा कर देनी चाहिए जितनी न्यायोचित ढंग से प्राप्त की जा सकती है। अत: सम्पादक का यह कर्त्तव्य होता है कि वह अनुसन्धान की प्रकृति एवं उद्देश्य को ध्यान में रखते हुए समंकों की शुद्धता की जाँच करे और यदि समंक अशुद्ध हैं तो उनकी शुद्धता की व्यवस्था करे।

2. उपसादन या सन्निकटीकरण (Approximation)

बड़ी-बड़ी संख्याएँ प्राय: भ्रमात्मक एवं जटिल होती हैं। उन्हें समझना तथा स्मरण रखना लगभग असम्भव सा होता है। अत: उन्हें सरल और बोधगम्य बनाने के उद्देश्य से निकटतम पूर्णांक संख्या के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। यही क्रिया उपसादन कहलाती है।

उपसादन में बड़ी-बड़ी जटिल संख्याओं को किसी स्थानीय मान के आधार पर निकटवर्ती पूर्णांक संख्याएँ बनाकर उन्हें संक्षिप्त तथा सरल बनाया जाता है जिससे परिणाम में कोई विशेष अन्तर न पड़े और स्थिति को समझने में अधिक सरलता हो जाये। उदाहरण के लिए, यदि यह कहा जाये कि 2001 की भारत की जनसंख्या 1,02,70,15,247 थी तो इस संख्या को याद रखना कठिन है। परन्तु यदि यह कहा जाये कि जनसंख्या 1.027 अरब है तो उसे याद रखना अपेक्षाकृत आसान होगा। उपसादन के सम्बन्ध में निम्नलिखित तथ्य महत्त्वपूर्ण हैं—

1. जब कभी किसी संख्या में उपसादन करना हो तो पहले इकाई का सन्निकटीकरण करना चाहिए, फिर दहाई का, फिर सैकड़े का और इसी क्रम में आगे बढ़ना चाहिए।
2. यदि संख्या दशमलव की है तो पहले अन्तिम भाग का सन्निकटीकरण करना चाहिए और फिर धीरे-धीरे उसी क्रम से इस दिशा में बढ़ना चाहिए।

अत: सम्पादक का यह कर्त्तव्य है कि अनुसन्धान की प्रकृति एवं उद्देश्य को ध्यान में रखते हुए एकत्रित समंकों को उपयोग में लाने से पूर्व उनका उपसादन भी कर ले।

3. सांख्यिकीय विभ्रम (Statistical Error)

सांख्यिकीय अनुसन्धान में समंकों का सम्पादन करते समय सांख्यिकीय विभ्रम की जाँच, उसके अध्ययन तथा सुधार का महत्त्वपूर्ण स्थान है। सांख्यिकी में विभ्रम (Error) शब्द से अभिप्राय 'अशुद्धि' या त्रुटि से नहीं है। असावधानी, अज्ञानता व जान-बूझकर करने वाली गलती को 'अशुद्धि' या त्रुटि कहते हैं जबकि विभम्र उन कमियों को कहते हैं जो पूर्ण सावधानियाँ रखने के बावजूद भी हो जाती हैं।

सांख्यिकीय अर्थ में, वास्तविक मूल्यों व संकलित मूल्यों के अन्तर को सांख्यिकीय विभम्र कहते हैं जबकि अशुद्धि से आशय गणितीय गणना में गलती या समंकों के संकलन, विश्लेषण या निर्वचन के लिए, गलत रीतियों के प्रयोग से है।

विभ्रम की परिभाषाएँ (Definitions of Error)

1. **बाडिंगटन** के अनुसार, "वास्तविक संख्या तथा अनुमान लगायी संख्या का अन्तर विभ्रम है।"
2. **कॉनर** के अनुसार, "सांख्यिकीय अर्थ में विभ्रम, अनुमानित मूल्य और वास्तविक अथवा आदर्श मूल्य, जिसका शुद्धता से निर्धारण करना असम्भव हो, का अन्तर मात्र है।"

एक उदाहरण द्वारा दोनों के अन्तर को आसानी से स्पष्ट किया जा सकता है—

यदि एक गाँव में 500 लोग रहते हैं और हम गणना के उपरान्त 480 लोग बताएँ तो यह अशुद्धि होगी। परन्तु यदि किसी आधार पर उस गाँव में 490 व्यक्तियों के रहने का अनुमान लगाया जाये तो यहाँ पर 500 और 400 का अन्तर 10 व्यक्ति ही सांख्यिकीय विभ्रम कहलायेगा। स्पष्ट है कि आँकड़ों के वास्तविक मूल्यों और अनुमानित मूल्यों के अन्तर को सांख्यिकीय विभ्रम कहते हैं।

प्र.9. अभिनत और अनभिनत विभ्रम में भेद बताइए। इन विभ्रमों को निरपेक्ष और सापेक्ष दोनों प्रकार से मापन करने की विधियों का वर्णन कीजिए।

उत्तर

अभिनत तथा अनभिनत विभ्रम में अन्तर
(Differences between Biased and Unbiased Errors)

क्र० सं०	अन्तर का आधार	अभिनत विभ्रम	अनभिनत विभ्रम
1.	**उत्पत्ति**	अभिनत विभ्रम प्रगणकों अथवा सूचकों के पक्षपात, दोषपूर्ण प्रतिदर्श इकाई अथवा निर्वचन के कारण उत्पन्न होते हैं।	अनभिनत विभ्रम स्वाभाविक रूप से अथवा लापरवाही के कारण होते हैं।
2.	**विभ्रम की दिशा**	अभिनत विभ्रम एक ही दिशा में होते हैं।	अनभिनत विभ्रम दोनों दिशा में होते हैं।
3.	**परिणाम**	परिणामों पर बहुत अधिक प्रभाव पड़ता है।	परिणामों पर इकाइयों की संख्या अधिक होने पर कोई सार्थक प्रभाव नहीं पड़ता।
4.	**प्रकृति**	अभिनत विभ्रम संचयी होते हैं। अनुसन्धान का क्षेत्र व्यापक होने पर त्रुटि की मात्रा भी उतनी ही अधिक होती है।	अनभिनत विभ्रम पूरक या समकारी होते हैं क्योंकि धनात्मक एवं ऋणात्मक त्रुटियाँ एक-दूसरे को समाप्त कर देती हैं।
5.	**रोकथाम**	अभिनत विभ्रम को दूर करने के लिए इसके कारण की खोज करनी होगी। कारण का पता चल जाने पर इसको दूर करने के उपाय करने चाहिए।	अनभिनत विभ्रम से बचने का एकमात्र उपाय न्यादर्श के आकार में वृद्धि करना है।

सांख्यिकीय विभ्रमों का मापन
(Measurement of Statistical Errors)

सांख्यिकीय विभ्रमों की माप दो प्रकार से की जा सकती है—

1. निरपेक्ष विभ्रम (Absolute Error)

निरपेक्ष विभ्रम वास्तविक मूल्य व अनुमानित मूल्य का अन्तर होता है। यह धनात्मक या ऋणात्मक दोनों प्रकार का हो सकता है। उदाहरणार्थ, यदि किसी व्यक्ति की वास्तविक मासिक आय ₹1,550 और अनुमानित ₹1,525 है तो निरपेक्ष विभ्रम (Absolute Error) ₹1,550 – ₹1,525 = ₹25 हुआ।

निरपेक्ष विभ्रम = वास्तविक मूल्य – अनुमानित मूल्य

सूत्र के रूप में हम इस प्रकार प्रकट करेंगे—

$$A.E. = a - e$$

जहाँ, A.E. = निरपेक्ष विभ्रम,

a = वास्तविक मूल्य

तथा e = अनुमानित मूल्य को प्रदर्शित करता है।

2. सापेक्ष विभ्रम (Relative Error)

तुलना करने की दृष्टि से सापेक्ष विभ्रम की गणना की जाती है। निरपेक्ष विभ्रम का अनुमानित मूल्य से जो सम्बन्ध होता है, उसे ही सापेक्ष विभ्रम कहते हैं। यह सम्बन्ध अनुपात में भी ज्ञात किया जा सकता है और प्रतिशत में भी।

$$\text{अनुपात के रूप में सापेक्ष विभ्रम} = \frac{\text{निरपेक्ष विभ्रम}}{\text{अनुमानित मूल्य}}$$

$$R.E. = \frac{a-e}{e} \quad \text{या} \quad \frac{A.E.}{e}$$

$$\text{प्रतिशत विभ्रम (Percentage Error)} \quad \text{या P.E.} = \frac{a-e}{e} \times 100$$

धनात्मक तथा ऋणात्मक विभ्रम—विभ्रम धनात्मक अथवा ऋणात्मक दोनों हो सकते हैं। जब वास्तविक मूल्य अनुमानित मूल्य से अधिक होता है तो विभम्र धनात्मक माना जाता है। इसके विपरीत वास्तविक मूल्य के अनुमानित मूल्य से कम होने पर विभ्रम ऋणात्मक होता है।

सांख्यिकीय विभ्रमों का अनुमान (Estimation of Statistical Errors)

कभी-कभी सांख्यिकीय अनुसन्धानों में समंकों के वास्तविक मूल्य ज्ञात नहीं होते। ऐसी दशा में विभ्रमों को मापना असम्भव होता है और उनका केवल अनुमान ही लगाया जा सकता है। विभ्रमों का अनुमान करने के लिए प्रयोग की जाने वाली मुख्य रीतियाँ निम्नलिखित हैं—

1. बॉडिंगटन की रीति—यदि विभ्रम, अभिनत (Biased) प्रकृति का हो तो निरपेक्ष माप का अनुमान करने के लिये औसत निरपेक्ष विभ्रम में इकाइयों की संख्या से गुणा कर देते हैं और सापेक्ष माप का अनुमान करने के लिये इस गुणा में कुल अनुमानित मूल्य से भाग देते हैं।

सूत्र—

$$\text{कुल निरपेक्ष विभ्रम} = \text{औसत निरपेक्ष विभ्रम} \times \text{इकाइयों की संख्या}$$

$$\text{Total Absolute Error} = \text{Average A.E.} \times n$$

$$\text{कुल सापेक्ष विभ्रम} = \frac{\text{औसत निरपेक्ष विभ्रम} \times \text{इकाइयों की संख्या}}{\text{कुल अनुमानित मूल्य}}$$

$$\text{Total Relative Error} = \frac{\text{Average A.E.} \times n}{e}$$

यदि विभ्रम अनभिनत (Unbiased) प्रकृति का हो तो निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग करते हैं—

$$\text{कुल निरपेक्ष विभ्रम} = \text{औसत निरपेक्ष विभ्रम} \times \text{इकाइयों की संख्या का वर्गमूल}$$

$$\text{Total Absolute Error} = \text{Average A.E.} \times \sqrt{n}$$

$$\text{कुल सापेक्ष विभ्रम} = \frac{\text{औसत निरपेक्ष विभ्रम} \times \text{इकाइयों की संख्या का वर्गमूल}}{\text{कुल अनुमानित मूल्य}}$$

$$\text{Total Relative Error} = \frac{\text{Average A.E.} \times \sqrt{n}}{e}$$

2. बाउले की रीति—अभिनत विभ्रम की दशा में निरपेक्ष माप का अनुमान करने के लिए बाउले ने निम्नलिखित सूत्र का प्रतिपादन किया है—

$$\text{कुल निरपेक्ष विभ्रम} = \frac{2}{3} \times \frac{\text{औसत निरपेक्ष विभ्रम}}{\text{इकाइयों की संख्या का वर्गमूल}}$$

$$\text{Total Absolute Error} = \frac{2}{3} \times \frac{\text{Average A.E.}}{\sqrt{n}}$$

कुल सापेक्ष विभ्रम का अनुमान करने के लिए कुल निरपेक्ष विभ्रम में अनुमानित मूल्य का भाग करते हैं।

प्र.10. वर्गीकरण से क्या तात्पर्य है? इसके उद्देश्य और विभिन्न प्रकारों को परिभाषित कीजिए।

उत्तर

वर्गीकरण का अर्थ तथा परिभाषाएँ
(Meaning and Definitions of Classification)

आर०एल० कॉनर के अनुसार, ''वर्गीकरण आँकड़ों को (या तो वास्तव में या काल्पनिक रूप से) समानता तथा सादृश्यता के आधार पर वर्गों या विभागों में क्रमानुसार रखने की क्रिया है और यह व्यक्तिगत पदों की विभिन्नता के बीच उनके गुणों की एकता को व्यक्त करता है।''

सेक्रिस्ट के अनुसार, ''वर्गीकरण, आँकड़ों की उनकी सामान्य विशेषता के आधार पर आँकड़ों तथा समूह को क्रम में व्यवस्थित करने या सम्बन्धित भागों को पृथक करने की प्रक्रिया है।''

स्टॉक्टन तथा क्लॉर्क के अनुसार, ''आँकड़ों के मध्य समानता के आधार पर वृहत संख्याओं में व्यक्तिगत तथ्यों का अवलोकन करने की प्रक्रिया वर्गीकरण कहलाती है।''

वर्गीकरण के उद्देश्य
(Objectives of Classification)

वर्गीकरण का उद्देश्य निम्नलिखित है—

1. **आँकड़ों को सरल तथा संक्षिप्त बनाने के लिए**—जटिल तथा वृहत आँकड़ों को वर्गीकरण में परिवर्तित करके सरल तथा संक्षिप्त बनाना मुख्य उद्देश्य है। वर्गीकरण के पश्चात् आँकड़ों को समझने में सरलता होती है। उदाहरण के लिए—100 छात्रों की एक कक्षा पर विचार करने पर छात्रों का अंक देखने के लिए निम्नलिखित प्रकार से उपयोग कर सकते हैं।

प्राप्तांक (100 में से)	छात्रों की संख्या
10-30	5
30-50	30
50-70	45
70-90	20
कुल	**100**

2. **तुलना को आसान बनाता है**—उन आँकड़ों की तुलना करना जटिल होता है, जोकि अखंडित एवं अव्यवस्थित होते हैं। लेकिन वर्गीकरण इसे सम्भव बनाता है। उदाहरण के लिए—निम्नलिखित दो वर्गों के छात्रों के वजन की तालिका दी गई है—

वजन (किग्रा में)	कक्षा I	कक्षा II
35-40	15	15
40-45	20	17
45-50	15	18
कुल	**50**	**50**

इस तालिका से दो वर्गों के छात्रों के वजन की तुलना आसानी से की जा सकती है।

3. **मूल सारणी करण प्रदर्शन**—वर्गीकरण आँकड़ों को सारणीबद्ध करने का आधार होता है। वर्गीकरण के बिना सारणीकरण नहीं किया जा सकता है।
4. **समानताओं एवं विसंगतियों से सम्बन्धित बिन्दुओं को आगे लाता है**—वर्गीकरण की सहायता से आँकड़ों की समानता एवं भिन्नता के बिंदुओ को स्पष्ट रूप से समझाया गया है। उदाहरण के लिए-जनसंख्या के निदर्शन में शिक्षित एवं अशिक्षित या नौकरी पेशा या बेरोजगार व्यक्तियों आदि की संख्या।

वर्गीकरण के प्रकार (Types of Classification)

सांख्यिकीय आँकड़ों को उनकी विशेषताओं के संबंध में वर्गीकृत किया गया है। इन्हें सामान्य तौर पर चार प्रकारों में बाँटा गया है—

1. **कालानुसार वर्गीकरण**—समय के आधार पर वर्गीकरण को कालानुसार वर्गीकरण कहा जाता है। कालानुक्रमिक वर्गीकरण में एकत्रित आँकड़ों को वर्ष, महीने, सप्ताह आदि के अनुरूप व्यक्त किया जाता है। उपलब्ध आँकड़ों को सामान्यत: समय के आरोही क्रम में व्यक्त किया जाता है। उदाहरण के लिए—1970-76 के दौरान भारत में जन्म दर का अनुमान निम्नलिखित है—

वर्ष	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976
जन्मदर	36.8	36.9	36.6	34.6	34.5	35.2	34.2

2. **भौगोलिक वर्गीकरण**—जब स्थान के आधार पर आँकड़ों के समूह को वर्गीकृत किया जाता है, तो वह भौगोलिक वर्गीकरण कहलाता है। उदाहरण के लिए—
(i) भारत के विभिन्न राज्यों में धान का उत्पादन एवं
(ii) विभिन्न देशों में गेहूँ के उत्पादन इत्यादि।
उदाहरण के लिए—नीचे दी गई तालिका में दिए गए आँकड़ों पर विचार कीजिए—

देश	अमेरिका	चीन	डेनमार्क	फ्रांस	भारत
गेहूँ की उपज (किग्रा/एकड़)	1925	893	225	439	862

3. **गुणात्मक वर्गीकरण**—इस प्रकार के वर्गीकरण में आँकड़ों को कुछ विशेषताओं या गुणवत्ता के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है। जैसे—लिंग, साक्षरता, धर्म, रोजगार आदि। इस प्रकार के गुणों को एक पैमाने के साथ नहीं मापा जा सकता है। उदाहरण के लिए, यदि जनसंख्या को एक विशेष अर्थात् लिंग के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है, तो जनसंख्या को दो वर्ग अर्थात् पुरुष वर्ग तथा महिला वर्ग में वर्गीकृत किया जा सकता है। इस वर्गीकरण को द्विभाजन वर्गीकरण भी कहते हैं। इसी प्रकार इन वर्गों को रोजगार तथा बेरोजगार के आधार पर पुन: वगीकृत कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, एक साधारण गुणात्मक वर्गीकरण निम्नलिखित प्रकार से किया जा सकता है—

जनसंख्या

पुरुष   महिला

जिस वर्गीकरण में दो या दो से अधिक विशेषताओं पर अध्ययन किया जाता है तथा कई श्रेणियाँ बनाई जाती हैं, वह विविध वर्गीकरण कहलाता है। उदाहरण के लिए—यदि हम एक ही समय पर दो विशेषताओं के आधार लिंग तथा रोजगार) पर जनसंख्या को वर्गीकृत करते हैं तब सर्वप्रथम जनसंख्या को लिंग के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है। प्रत्येक श्रेणी को आगे 'रोजगार' तथा 'बेरोजगार' की विशेषता के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है। इस प्रकार जनसंख्या चार श्रेणियों में विभक्त होगी, जोकि निम्नवत् है—

जनसंख्या

पुरुष   महिला

कार्यरत   बेरोजगार   कार्यरत   बेरोजगार

(i) कार्यरत पुरुष (ii) बेरोजगार पुरुष (iii) कार्यरत महिला (iv) बेरोजगार महिला
इसके अलावा वैवाहिक स्थिति के आधार पर वर्गीकरण करके उपर्युक्त वर्गीकरण को आगे बढ़ाया जा सकता है। उपर्युक्त वर्गीकरण निम्नवत् चार्ट के अनुसार परिभाषित किया जा सकता है

4. **मात्रात्मक वर्गीकरण**—आकार के आधार पर वर्गीकरण को संख्यात्मक वर्गीकरण कहा जाता है। इसकी विशेषता ऊँचाई, वजन इत्यादि हैं। उदाहरण के लिए—भार के अनुसार किसी कॉलेज के छात्रों को निम्नवत् रूप से वर्गीकृत किया जा सकता है—

वजन (lbs में)	विद्यार्थियों की संख्या
90-100	50
100-110	200
110-120	260
120-130	360
130-140	90
140-150	40
कुल	**1000**

इस प्रकार के वर्गीकरण को दो तत्त्वों के आधार पर वर्गीकृत किया जा सकता है—

(i) चर, जैसे भार, तथा

(ii) आवृत्ति, जैसे प्रत्येक कक्षा के छात्रों की संख्या।

50 छात्रों का वजन 90 से 100 पाउण्ड तक है। जबकि 200 छात्रों का वजन 100 से 110 पाउण्ड के बीच है।

प्र.11. आवृत्ति वितरण क्या है? इसके विभिन्न प्रकारों की व्याख्या कीजिए।

उत्तर

आवृत्ति बंटन अथवा आवृत्ति वितरण (Frequency Distribution)

सामान्यत: समंकों का संकलन व्यक्तिगत अवलोकनों (Individual Observations) के रूप में किया है। परन्तु व्यक्तिगत अवलोकनों के रूप में संकलित समंकों को देखकर समंकों की विशेषताओं के बारे में स्पष्ट जानकारी नहीं मिल पाती। अत: व्यक्तिगत अवलोकनों के रूप में संकलित समंकों को वर्गीकृत किया जाता है, जिनमें निश्चित मूल्यों अथवा वर्गान्तरों के आधार पर आवृत्तियाँ या बारम्बारताएँ (Frequencies) प्रदर्शित की जाती है। इसी व्यवस्था को 'आवृत्ति बंटन' या 'आवृत्ति वितरण' कहा जाता है।

एक आवृत्ति बंटन विभिन्न वर्गों में आवृत्तियों को क्रमबद्ध करने की प्रक्रिया है। वस्तुत: यह एक तालिका होती है जिसमें एक ओर मापनीय चर होते हैं एवं दूसरी ओर आश्रित चर होते हैं जो मापनीय चर या स्वतन्त्र चर की आवृत्ति कहलाते हैं। **मौरिस हम्बर्ग** के अनुसार, "एक आवृत्ति वितरण या आवृत्ति तालिका,मात्र एक तालिका है जिसमें समंकों को वर्गों के रूप में समूहबद्ध किया जाता है और प्रत्येक वर्ग में आने वाली इकाइयों की संख्या को अंकित कर लिया जाता है, जो उन वर्गों की आवृत्तियाँ कहलाती हैं।"

आवृत्ति बंटन के प्रकार (Types of Frequency Distribution)

आवृत्ति बंटन प्रमुख रूप से दो प्रकार के होते हैं—

(I) एकचरीय आवृत्ति बंटन—एकचरीय आवृत्ति बंटन किसी एक चर के लिये बनाया जाता है, जैसे—विद्यार्थियों की आयु का वितरण, श्रमिकों की मजदूरी का वितरण आदि। एकचरीय आवृत्ति बंटन के आधार पर सांख्यिकीय श्रेणियाँ मुख्य रूप से निम्नलिखित दो प्रकार की होती हैं—

1. **खण्डित श्रेणी**—जब आवृत्ति बंटन असमूहीकृत (Ungrouped Frequency Distribution) बनाया जाता है।
2. **सतत् श्रेणी या अखण्डित श्रेणी**—जब आवृत्ति बंटन समूहीकृत (Grouped Frequency Distribution) बनाया जाता है। सतत् श्रेणी में वर्गान्तरानुसार वर्गीकरण किया जाता है।

(II) द्विचरीय आवृत्ति बंटन—द्विचरीय आवृत्ति बंटन में एक साथ दो चरों का अध्ययन किया जाता है। जैसे—पतियों की आयु तथा पत्नियों की आयु, विद्यार्थियों के लेखांकन में प्राप्तांक तथा सांख्यिकी में प्राप्तांक आदि।

ऐसे आँकड़ों को खण्डित अथवा अखण्डित किसी भी श्रेणी के रूप में व्यवस्थित किया जा सकता है। निम्नलिखित उदाहरणों से इस प्रकार के आवृत्ति वितरण की रचना-विधि भली-भाँति स्पष्ट हो जायेगी—

उदाहरण 1—निम्नलिखित आँकड़े नवविवाहित पति एवं पत्नियों की उम्र के सम्बन्ध में दिये गये हैं। इन्हें आवृत्ति वितरण में प्रस्तुत कीजिए।

पतियों की उम्र :	24	26	27	25	28	24	27	28	25	26
पत्नियों की उम्र:	17	18	19	17	20	18	18	19	18	19
पतियों की उम्र:	25	26	27	25	27	26	25	26	26	26
पत्नियों की उम्र:	17	18	19	19	20	19	17	20	17	18

हल—उपर्युक्त आँकड़ों में दो चर (variables) दिये गये हैं—पतियों की उम्र, (i) पत्नियों की उम्र, (ii) पतियों की उम्र, 24, 25, 26, 27, 28 वर्ष दी गयी है जबकि पत्नियों की उम्र 17, 18, 19, 20 वर्ष है। अत: दोनों की उम्र के आँकड़ों को खण्डित द्विचर आवृत्ति वितरण के रूप में निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है—

द्विचर खण्डित आवृत्ति वितरण

पतियों की उम्र	पत्नियों की उम्र				योग
	17	18	19	20	
24	| (1)	| (1)	—	—	2
25	||| (3)	| (1)	| (1)	—	5
26	| (1)	||| (3)	|| (2)	| (1)	7
27	—	| (1)	|| (2)	| (1)	4
28	—	—	| (1)	| (1)	2
योग	**5**	**6**	**6**	**3**	$N = 20$

उदाहरण 2—निम्नलिखित आँकड़े 20 व्यक्तियों के वजन तथा ऊँचाई के हैं। द्विचरीय आवृत्ति वितरण तैयार कीजिए जिसमें वजन के लिए वर्गान्तर 115 – 125 पौण्ड, 125 – 135 पौण्ड आदि तथा ऊँचाई के लिए 62 – 64 इन्च, 64 – 66 इन्च, – और इसी प्रकार हों।

क्र०सं०	वजन (पौण्ड)	ऊँचाई (इंच)	क्र० सं०	वजन (पौण्ड)	ऊँचाई (इंच)
1	170	70	11	163	70
2	135	65	12	139	67
3	136	65	13	122	63
4	137	64	14	134	68
5	148	69	15	140	67
6	124	63	16	132	69
7	117	65	17	120	66
8	128	70	18	148	68
9	143	71	19	129	67
10	129	62	20	152	67

हल—

द्विचर अखण्डित आवृत्ति वितरण

वजन (x) (पौण्ड)	लम्बाई इंचों में (y)					योग
	62-64	64-66	66-68	68-70	70-72	(आवृत्ति) fx
115-125	|| (2)	| (1)	| (1)	—	—	4
125-135	| (1)	—	| (1)	|| (2)	| (1)	5
135-145	—	||| (3)	|| (2)	—	| (1)	6
145-155	—	—	| (1)	|| (2)	—	3
155-165	—	—	—	—	| (1)	1
165-175	—	—	—	—	| (1)	1
योग (Total) आवृत्ति (fy)	3	4	5	4	4	$N = 20$

प्र.12. 'सांख्यिकीय श्रेणी' को परिभाषित करते हुए, इसके विभाजन को समझाइए।

उत्तर

सांख्यिकीय श्रेणियाँ
(Statistical Series))

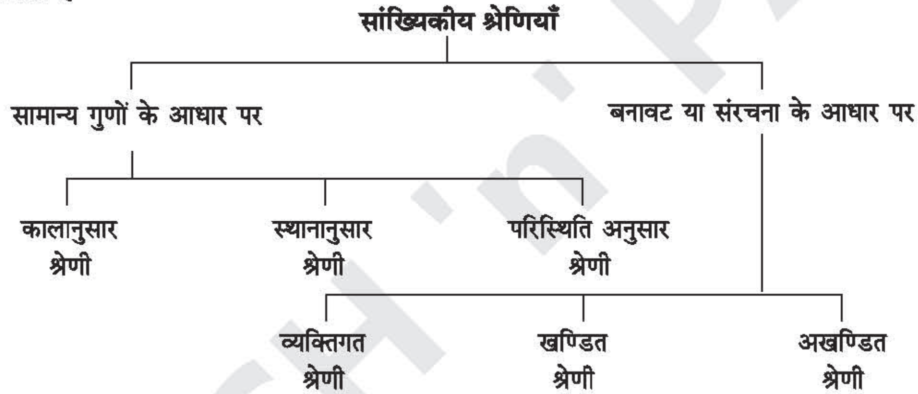
सांख्यिकीय श्रेणियाँ समंकों के वर्गीकरण से प्रत्यक्ष रूप से सम्बन्धित हैं। सांख्यिकीय तथ्यों को एक निश्चित आधार पर अनुविन्यसित करने से जो व्यवस्थित क्रम बनता है उसे ही 'सांख्यिकीय श्रेणी' या 'समंकमाला' कहते हैं।

कॉनर के अनुसार, "यदि दो चर मात्राओं को साथ-साथ इस प्रकार व्यवस्थित किया जाये कि एक का मापनीय अन्तर दूसरे के मापनीय अन्तर के अनुरूप हो, तो ऐसे परिणाम को सांख्यिकीय श्रेणी कहेंगे।"

सैक्राइस्ट के अनुसार, "सांख्यिकी में श्रेणी को उन पदों अथवा पदों के गुणों के रूप में परिभाषित किया जा सकता है, जिन्हें किसी तर्कपूर्ण क्रम में व्यवस्थित किया गया है।"

सांख्यिकी श्रेणियों के प्रकार (Kinds of Statistical Series)

सांख्यिकीय श्रेणियों को प्रमुख रूप से दो वर्गों में विभाजित किया जा सकता है, जैसे—I. सामान्य गुणों वाली सांख्यिकीय श्रेणी, II. संरचना के आधार पर निर्मित सांख्यिकीय श्रेणी। इनकी भी अपनी उपश्रेणियाँ हैं जिनको निम्नलिखित चार्ट द्वारा स्पष्ट रूप से समझा जा सकता है—



I. सामान्य गुणों के आधार पर श्रेणियाँ (Series Based on General Qualities)

1. कालानुसार या काल-श्रेणी—काल-श्रेणी का आशय ऐसी श्रेणी से है जिसमें समंकों को समय के आधार पर व्यवस्थित किया जाता है। समय का माप वर्ष, माह, सप्ताह, दिन या घण्टे कुछ भी हो सकता है। इस श्रेणी में 'समय' स्वतन्त्र चर (Independent Variable) एवं 'समंक' आश्रित चर (Dependent Variables) होते हैं। उदाहरणार्थ—

भारत में प्रति व्यक्ति आय

(1993-94 के मूल्यों के अधार पर)

वर्ष	1993-94	1994-95	1995-96	1996-97	1997-98	1998-99
प्रति व्यक्ति आय	7,698	8,069	8,479	8,987	9,271	9,739

स्रोत—भारत 2001।

2. स्थानानुसार श्रेणी—जब समंकों को स्थानिक अथवा भौगोलिक आधार पर प्रदर्शित किया जाता है तो उसे स्थानानुसार श्रेणी कहते हैं।

उदाहरणार्थ—विभिन्न देशों की राष्ट्रीय आय या राज्यानुसार जनसंख्या का वितरण आदि।

देश	**जापान**	**अमेरिका**	**इटली**	**ब्राजील**	**चीन**	**भारत**
वर्ष 1999 में अमेरिकन डॉलर में राष्ट्रीय आय	32,230	30,600	19,710	4,420	780	450

स्रोत—विश्व बैंक, वैश्विक विकास रिपोर्ट, 1997

3. परिस्थिति अनुसार श्रेणी—जब समंक श्रेणी की रचना किसी परिस्थिति में होने वाले परिवर्तनों के आधार पर की जाती है तो उसे परिस्थिति श्रेणी कहते हैं। उदाहरण के लिये, यदि विद्यार्थियों की ऊँचाई के वर्ग बनाकर उन्हें एक श्रेणी में प्रदर्शित किया जाये या मजदूरों की आय के समकों को आय-वर्गों में श्रेणीबद्ध करके प्रस्तुत किया जाये तो ये परिस्थिति श्रेणियाँ कहलायेंगी।

II. संरचना के आधार पर सांख्यिकीय श्रेणियाँ (Statistical Series Based on Structure)

संरचना या बनावट के आधार पर सांख्यिकीय श्रेणियाँ निम्नलिखित तीन प्रकार की होती हैं—

1. व्यक्तिगत श्रेणी—इस प्रकार की समंकमाला (श्रेणी) में अनुसन्धान की प्रत्येक मद (item) या इकाई (unit) जिसका अध्ययन किया जा रहा है, के मूल्य को अलग-अलग व्यक्त किया जाता है। दूसरे शब्दों में, इस श्रेणी में प्रत्येक पद पूर्णत: स्वतन्त्र होता है अर्थात् प्रत्येक मद की अपनी अलग पहचान होती है। उदाहरण के लिये, किसी कारखाने में कार्यरत 25 श्रमिकों की साप्ताहिक मजदूरी को यदि अलग-अलग व्यक्त किया जाये तो उसे व्यक्तिगत श्रेणी कहेंगे। इस श्रेणी की मुख्य पहचान यह है कि समंकमाला में जितने मूल्य या माप (Values or Measurements) होते हैं, पदों की संख्या (Number of Items or N) उतनी ही होती है। इस श्रेणी में केवल पद-मूल्य होते हैं,उनकी आवृत्ति (Frequency) नहीं होती। उदाहरण के लिये, एक कक्षा में दस विद्यार्थी हैं जिनके प्राप्तांक को व्यक्तिगत श्रेणी के रूप में निम्नांकित प्रारूप में प्रदर्शित किया जायेगा—

अनुक्रमांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
प्राप्तांक	25	18	32	17	45	38	20	26	48	12

2. खण्डित या विच्छिन्न श्रेणी—जब संकलित समंकों में कुछ पदों की माप एकसमान हो और पदों की संख्या काफी अधिक हो तो ऐसी दशा में पदों के मूल्य को अलग-अलग व्यक्त करने के स्थान पर प्रत्येक पद की आवृत्ति (Frequency) को लिखा जा सकता है। ऐसा करने से श्रेणी भी छोटी हो जाती है और कार्य भी अपेक्षाकृत सरल हो जाता है। इसे ही खण्डित आवृत्ति वितरण कहते हैं।

खण्डित श्रेणी से हमारा अभिप्राय अनुसन्धान से प्राप्त मदों के उस रूप से है जिसमें पदों के आकार एवं उनकी आवृत्ति (बारम्बारता) को लिखा जाता है। इस श्रेणी में पदों के चल-मूल्यों (Variables) या आकार में प्राय: निश्चित अन्तर होता है तथा सभी पद ठीक-ठीक पूर्णांक में मापनीय होते हैं तथा जिनकी इकाइयाँ फिर किसी छोटे भाग में विभक्त नहीं की जा सकतीं। इस श्रेणी में पदों को बढ़ते या घटते हुए क्रम में लिखा जा सकता है।

किसी पद या इकाई की जितनी बार पुनरावृति (Repetition) होती है उसे उस पद या इकाई की आवृत्ति अथवा बारम्बारता कहते हैं।

खण्डित श्रेणी की रचना-विधि—इस रूप में समंकमाला तैयार करने की प्रक्रिया निम्न प्रकार है—

(i) सर्वप्रथम अव्यवस्थित समकों (raw data) को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित कर लिया जाता है।

(ii) चर के सभी मूल्यों को क्रमवार लिख लेते हैं जिन्हें पद-आकार या पद-मूल्य कहा जाता है।

(iii) प्रत्येक पद-मूल्य के सामने उसकी पुनरावृत्ति के बराबर टैली-चिह्न (Tally-bars) लगा लेते हैं।

(iv) प्रत्येक पद-मूल्य के टैली-चिह्नों को गिनकर आवृत्ति लिख देते हैं। खण्डित श्रेणी की रचना को निम्नलिखित उदाहरण से समझा जा सकता है—

उदाहरण—"In the beginning", said a Persian poet, "Allah took a rose, a lily, a dove, a serpent, a little honey, a dead sea apple and a handful of clay. When he looked at the amalgam—it was a woman."

उपर्युक्त गद्यांश से एक खण्डित आवृत्ति सारणी तैयार कीजिए।

हल—सर्वप्रथम प्रत्येक शब्द में पाये जाने वाले अक्षर गिनकर (जैसे—in में 2, the में 3, beginning में 9...) पदों की संख्या ज्ञात की जायेगी।

2, 3, 9, 4, 1, 7, 4, 5, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 7, 1, 6, 5,
1, 4, 3, 5, 3, 1, 7, 2, 4, 4, 2, 6, 2, 3, 7, 2, 3, 1, 5.

इसके पश्चात् इन अंकों को खण्डित-श्रेणी में इस प्रकार क्रमबद्ध किया जायेगा—

एब शब्द में अक्षरों की संख्या (X)	मिलान-रेखाएँ (Tallies)	शब्दों की संख्या (f)
1	~~||||~~ ||||	9
2	~~||||~~	5
3	~~||||~~	5
4	~~||||~~ ||||	9
5	||||	4
6	||	2
7	||||	4
8	—	0
9	|	1
		$N = 39$

3. अखण्डता अविच्छिन्न या सतत् श्रेणी (Continuous Series)—जब अनुसन्धान से प्राप्त मदों के मूल्यों में बहुत अधिक विस्तार हो तो संकलित समंको को अखण्डित श्रेणी के रूप में व्यवस्थित करना अधिक उपयुक्त होता है। इस श्रेणी में प्राप्त मदों को वर्गान्तरों (Class Intervals) के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है। इस प्रकार की समंकमाला में ऐसे वर्ग बना लिये जाते हैं जिनमें सततता (Continuity) नहीं टूटती है। जहाँ एक वर्ग समाप्त होता है वहीं से दूसरा वर्ग प्रारम्भ होता है। इस प्रकार वर्गों में निरन्तरता, सततता या अविच्छिन्नता होने के कारण ही इसे अखण्डित, अविच्छिन्न या सतत् श्रेणी कहते हैं। संक्षेप में इस प्रकार की समंकमाला में पद–मूल्यों को वर्गान्तरों में तथा प्रत्येक वर्ग की आवृत्ति को उस वर्ग के सामने दिखा दिया जाता है। उदाहरण के लिए, किसी मिल के 50 मजदूरों की मासिक मजदूरी के आँकड़ों की अखण्डित श्रेणी के रूप में निम्न प्रकार अभिव्यक्त करेंगे—

मजदूरी (रु० में)	0-400	400-800	800-1200	1200-1600	160-2000
मजदूरों की संख्या	5	7	8	16	14

प्र.13. सारणीयन क्या है? इसके उद्देश्य को समझाइए। इसके अतिरिक्त, सारणी के निर्माण के नियम लिखिए।

उत्तर

सारणी एवं सारणीयन का अर्थ एवं परिभाषा
(Meaning and Definition of Table and Tabulation)

समंकों को वर्गीकृत करने के पश्चात उन्हें सारणियों के रूप में प्रस्तुत किया जाता है। सारणीयन के द्वारा एकत्रित समंकों को सरल, संक्षिप्त तथा बोधगम्य बनाया जाता है। सारणीयन के द्वारा संकलित सांख्यिकीय समंकों को खानों या स्तम्भों (Columns) तथा पंक्तियों (Rows) में निश्चित नियमों के अनुसार प्रस्तुत किया जाता है। यहाँ पर यह उल्लेखनीय है कि सारणीयन एक प्रक्रिया है और इस प्रक्रिया के परिणामस्वरूप समंकों के प्रस्तुतीकरण का तैयार होने वाला ढाँचा सारणी कहलाता है।

ब्लेयर के अनुसार, "विस्तृत अर्थ में समंकों की कॉलमों एवं पंक्तियों के रूप में क्रमबद्ध व्यवस्था सारणीयन है।"

कॉनर के अनुसार, "सारणीयन किसी विचाराधीन समस्या को स्पष्ट रूप से रखने के उद्देश्य से किया जाने वाला सांख्यिकीय तथ्यों का क्रमबद्ध एवं व्यवस्थित प्रस्तुतीकरण है।"

निष्कर्ष—उपर्युक्त परिभाषाओं का अध्ययन करने के उपरान्त हम यह कह सकते हैं कि सारणीयन एक प्रक्रिया है जिसके द्वारा संकलित समंकों को कॉलमों एवं पंक्तियों में सरल तथा संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत किया जाता है।

सारणीयन के उद्देश्य/कार्य (Objectives/Functions of Tabulation)

1. **व्यवस्थित प्रस्तुतीकरण**—सारणीयन का प्रमुख उद्देश्य वर्गीकृत समंकों को क्रमबद्ध एवं सुव्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करना है ताकि वे सरलता से समझे जा सकें।

2. **संक्षिप्त व स्थायी रूप**—सारणियों के माध्यम से हजारों प्रश्नावलियों तथा अनुसूचियों द्वारा एकत्रित सूचनाओं को बहुत कम स्थान में प्रस्तुत किया जाता है। इस प्रकार अव्यवस्थित समंकों को सारणियों द्वारा कम से कम स्थान में संक्षिप्त व स्थायी रूप में प्रकट किया जाता है जिससे सन्दर्भ के रूप में उनका प्रयोग आसानी से किया जा सकता है।
3. **समंकों की विशेषताओं का स्पष्टीकरण**—सारणीयन के शीर्षक एवं उप-शीर्षकों से समंकों की विशेषतायें स्पष्ट हो जाती हैं, जिससे समस्याओं की विवेचना में सहायता मिलती है।
4. **तुलना कार्य सरल बनाना**—सारणीयन क्रिया तुलनात्मक अध्ययन को सम्भव बनाती है क्योंकि इसमें समान व तुलना-योग्य समंकों को परस्पर निकटवर्ती खानों या पंक्तियों में रखा जाता है।

सारणीयन का महत्त्व या लाभ (Importance or Advantages of Tabulation)

सारणीयन के बिना किसी भी समस्या का तुलनात्मक और सांख्यिकीय विवेचन सम्भव नहीं है। संक्षेप में, सांख्यिकीय तथ्यों को सारणियों में प्रस्तुत करने के निम्नलिखित लाभ हैं—

1. **सरलता**—सारणीयन के द्वारा सांख्यिकीय तथ्यों को क्रमबद्ध व व्यवस्थित रूप में इस प्रकार प्रस्तुत किया जाता है कि सम्बन्धित समंक शीघ्रतापूर्वक सरलता से समझ में आ जाते हैं।
2. **मितव्ययिता**—सारणीयन की सहायता से समय व स्थान दोनों की बचत होती है क्योंकि न्यूनतम स्थान में अधिकतम सूचनायें प्रदर्शित की जाती हैं। इसके अतिरिक्त सारणीयन करते समय अनावश्यक विवरणों और पुनरावृत्ति (Repetitions) को भी छोड़ दिया जाता है।
3. **आकर्षक प्रस्तुतीकरण**—सारणीयन द्वारा सांख्यिकीय तथ्यों को ऐसे आकर्षक रूप में प्रस्तुत किया जाता है कि वे आँखों को प्रिय लगते हैं तथा मस्तिष्क पर उनकी अमिट छाप पड़ती है जिससे कठिन समंक भी सरलता से याद हो जाते हैं।
4. **तुलनात्मक अध्ययन की सुविधा**—सारणीयन-क्रिया तुलनात्मक अध्ययन को सम्भव बनाती है क्योंकि इसमें समान व तुलना-योग्य समंकों को परस्पर निकटवर्ती खानों या पंक्तियों में प्रदर्शित किया जाता है।
5. **सांख्यिकीय विवेचन में सहायक**—समंकों का सारणीयन करने से सम्बन्धित तथ्यों का सांख्यिकीय विश्लेषण एवं निर्वचन आसानी से किया जा सकता है। सांख्यिकीय विश्लेषण की विभिन्न रीतियों जैसे माध्य, अपकिरण, विचरण एवं सह-सम्बन्ध आदि का प्रयोग तब ही हो सकता है, जबकि समंकों को उचित प्रकार सारणीयन कर लिया जाये।

सारणी तैयार करते समय ध्यान देने योग्य बातें (Points to be taken into Account while Preparing a Table)

सारणीयन के सम्बन्ध में कोई निश्चित नियम बनाना कठिन है क्योंकि यह बहुत कुछ अनुभव पर निर्भर करता है। **प्रो० बाउले** ने उचित ही कहा है कि "समंक संकलन तथा सारणीयन में सामान्य ज्ञान ही प्रमुख आवश्यकता तथा अनुभव ही प्रमुख शिक्षक है।" परन्तु फिर भी कुछ सामान्य नियम निम्नलिखित हैं—

1. सारणी का आकार कागज के अनुरूप होना चाहिये।
2. सारणी में कॉलमों एवं पंक्तियों की क्रमसंख्या दी जानी चाहिये।
3. सारणी सरल, बोधगम्य एवं पूर्ण होनी चाहिये।
4. सारणी में आवश्यकतानुसार प्रतिशतों एवं अनुमानों की गणना की जानी चाहिये।
5. तुलनात्मक समंकों को निकटवर्ती खानों में रखा जाना चाहिये।
6. सारणी में योग एवं अन्तर्योगों की व्यवस्था इस प्रकार की जानी चाहिये कि उनकी स्पष्ट जाँच की जा सके।
7. माप की इकाई को स्पष्ट रूप से प्रदर्शित किया जाना चाहिये।
8. सारणी यथा सम्भव साफ-सुथरी एवं आकर्षक होनी चाहिये।
9. अनुमानित एवं अप्राप्त समंकों के सम्बन्ध में 'नोट' (Note) या 'विशेष' देना चाहिये।
10. संख्याओं को लिखते समय उनके स्थानीय मान को ध्यान रखना चाहिये।

सारणी के उपर्युक्त प्रमुख अंग निम्नलिखित प्रारूप द्वारा स्पष्ट किये जा सकते हैं—

सारणी संख्या ....

सारणी शीर्षक (Title)

....

पंक्ति शीर्षक (Stub-box)	**स्तम्भ उपशीर्षक (Column Caption)**				**योग (Total)**
	स्तम्भ-शीर्षक	**स्तम्भ-शीर्षक**	**स्तम्भ-शीर्षक**	**स्तम्भ-शीर्षक**	
पंक्ति शीर्षक					
पंक्ति शीर्षक					
पंक्ति शीर्षक					
पंक्ति शीर्षक					
योग (Total)					

टिप्पणी (Foot-note) ....

स्रोत (Source) ....

प्र.14. सारणियों के वर्गीकरण के आधारों का विस्तृत वर्णन कीजिए।

उत्तर सारणियों का वर्गीकरण मुख्यत: निम्नलिखित तीन आधारों पर किया जा सकता है—

I. उद्‌देश्य के आधार पर सारणीयन,
II. मौलिकता के आधार पर सारणीयन तथा
III. रचना के आधार पर सारणीयन।

I. उद्‌देश्य के आधार पर सारणीयन (Tabulation on the basis of Purpose)

उद्‌देश्य के आधार पर सारणी दो प्रकार की हो सकती है—

1. **सामान्य उद्‌देश्य वाली सारणी**—इस प्रकार की सारणी का कोई विशेष उद्‌देश्य नहीं होता। इस प्रकार की सारणियाँ अधिक बड़ी होती हैं। यह प्राय: प्रकाशित प्रतिवेदनों (reports) में पीछे दी हुई रहती हैं। विभिन्न व्यक्ति इनका प्रयोग अपने ढंग से करते हैं। इन सारणियों के द्वारा किसी समस्या के सभी पहलुओं के विषय में सूचनायें प्राप्त हो जाती हैं। इन्हें सन्दर्भ सारणी (reference table) भी कहते हैं क्योंकि इस प्रकार की सारणियाँ प्राय: प्रकाशित प्रतिवेदनों के सन्दर्भ में ही दी जाती हैं। जनगणना रिपोर्ट तथा अन्य सरकारी प्रकाशनों में इस प्रकार की सारणियों का काफी प्रयोग होता है जिनसे विभिन्न व्यक्ति लाभ उठाते हैं।
2. **विशेष उद्‌देश्य वाली सारणी**—जैसा कि इसके नाम से ही स्पष्ट है कि यह सारणी किसी विशेष उद्‌देश्य की पूर्ति के लिये बनाई जाती है। इस प्रकार की सारणी सामान्य उद्‌देश्य वाली कई सारणियों से तैयार की जाती है ताकि एक निश्चित उद्‌देश्य की पूर्ति हो सके। इसे सारांश सारणी (Summary Table) भी कहते हैं। ये सारणियाँ अपेक्षाकृत छोटी होती हैं तथा किसी परिणाम को प्रभावपूर्ण ढंग से समझाने के लिये बनायी जाती हैं। इन सारणियों में अधिकतर माध्य, प्रतिशत, अनुपात, गुणांक आदि का प्रयोग किया जाता है।

II. मौलिकता के आधार पर सारणीयन (Tabulation on the basis of originality)

मौलिकता की दृष्टि से सारणियाँ दो प्रकार की हो सकती हैं—

1. **मौलिक या प्राथमिक सारणी**—जब मौलिक या प्राथमिक समंकों की सहायता से नये सिरे से सारणी बनायी जाती है तो उसे मौलिक सारणी कहते हैं। इस प्रकार की सारणी में समंक अपने मौलिक रूप में प्रस्तुत किये जाते हैं।
2. **व्युत्पन्न सारणी**—इस प्रकार की सारणी में समंकों को उनके मौलिक रूप में प्रस्तुत नहीं किया जाता है वरन् संकलित समंकों के आधार पर प्राप्त प्रतिशत, माध्य, अनुपात आदि को प्रस्तुत किया जाता है। उदाहरणार्थ—

प्रति महिला उत्पन्न होने वाले बच्चों की औसत संख्या, 2001

आयु-वर्ग (वर्षों में)	बच्चों की संख्या		योग
	ग्रामीण	नगरीय	
15-19	0.19	0.13	0.17
20-24	1.19	0.99	1.13
25-29	2.47	2.24	2.41
30-34	3.53	3.22	3.46
35-39	4.35	3.98	4.26
40-44	4.81	4.38	4.71
45-49	5.07	4.68	4.99
50 & above	4.80	4.50	4.74

III. रचना के आधार पर सारणीयन (Tabulation on the basis of construction)

रचना अथवा बनावट के आधार पर भी सारणी को दो भागों में बाँटा जा सकता है—

1. **सरल सारणी**—इस प्रकार की सारणी में समंकों की केवल एक ही विशेषता या गुण का विवेचन किया जाता है, इसलिये इसे एक गुण वाली सारणी भी कहते हैं। सरल सारणी का नमूना निम्नलिखित हैं—

भारत की जनसंख्या का धर्मानुसार वितरण, 2001

धर्म	व्यक्तियों की संख्या
बौद्ध	....
ईसाई	....
हिन्दू	....
जैन	....
मुसलमान	....
सिक्ख	....
अन्य	....
योग	....

2. **जटिल सारणी**—जब किसी सारणी में तथ्यों की दो या दो से अधिक विशेषताओं या गुणों का विवेचन होता है तो उसे जटिल सारणी कहते हैं। यदि सारणी में समंकों की दो विशेषताओं को दिखाया जाता है तो उसे द्विगुण सारणी कहते हैं। इसी प्रकार जो सारणी समंकों की तीन प्रकार की विशेषताओं को प्रकट करती है, उसे त्रिगुणी सारणी कहा जाता है, परन्तु जब आँकड़ों के तीन से भी अधिक गुणों को प्रदर्शित किया जाता है तो वह बहुगुणी सारणी कहलाती है। इस आधार पर जटिल सारणी निम्न प्रकार की हो सकती है—

(i) **द्विगुण सारणी**—ऐसी सारणी में आँकड़ों के दो गुणों को प्रकट किया जाता है। निम्नलिखित उदाहरण के आधार पर ऐसी सारणी को भली-भाँति समझा जा सकता है—

खाद्यान्नों का आयात

वर्ष	मात्रा (हजार टन)		योग (हजार टन)
	चावल	गेहूँ	
1997-1998	18	284	302
1998-1999	65	1,328	1,393
1999-2000	19	1,652	1,671
2000-2001	409	3,039	3,448
2001-2002	349	554	903

(ii) **त्रिगुणी सारणी**—इस प्रकार की सारणी में समंकों को एक साथ तीन गुणों के आधार पर प्रदर्शित किया जाता है। इसका उदाहरण नीचे दिया गया है। इसमें जनसंख्या को आयु, लिंग और निवास के आधार पर वर्गीकृत किया गया है।

सारणी संख्या ....
आयु लिंग एवं निवास के अनुसार जनसंख्या का वितरण

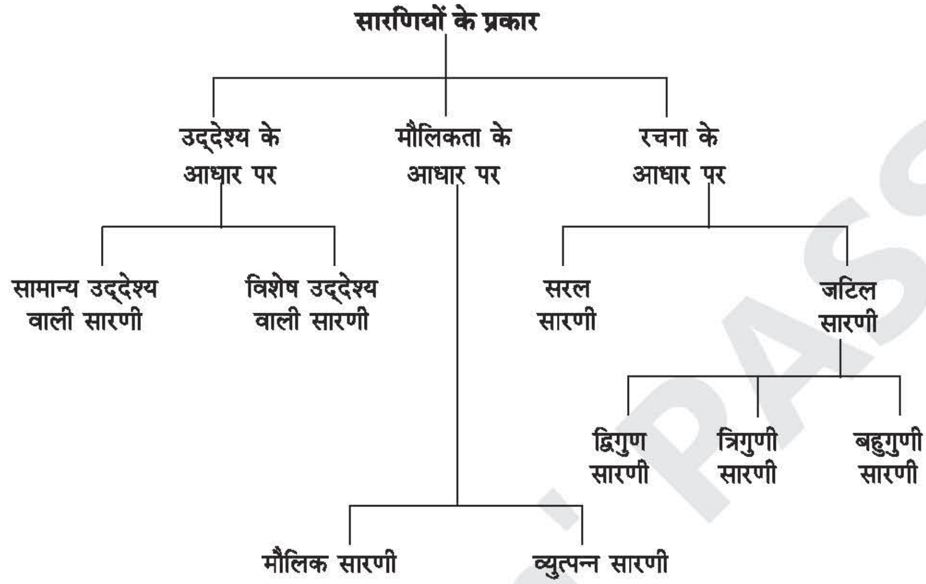
आयु वर्ग (वर्ष)	व्यक्तियों की संख्या (मिलियन में)								
	ग्रामीण			नगरीय			योग		
	पुरुष	स्त्री	योग	पुरुष	स्त्री	योग	पुरुष	स्त्री	योग
0-20									
20-40									
40-60									
60-80									
80-100									
योग									

(iii) **बहुगुणी सारणी**—इस प्रकार की सारणी में समंकों को तीन से अधिक विशेषताओं के आधार पर प्रस्तुत किया जाता है। उदाहरण के लिए, किसी कारखाने में कार्यरत कर्मचारियों को आयु, वर्ष, लिंग एवं वेतन-स्तर के आधार पर इस प्रकार दिखाया जाएगा—

आयु, वर्ष, लिंग एवं वेतन-स्तर के अनुसार कर्मचारियों का वितरण

वर्ष	आयु वर्ग (वर्ष)	वेतन-स्तर											
		₹ 500 से कम			₹ 500 – 1000			₹ 1000 से अधिक			योग		
		पुरुष	स्त्री	योग	पुरुष	स्त्री	योग	पुरुष	स्त्री	योग	पुरुष	स्त्री	योग
1991	20 वर्ष से कम												
	20-40												
	40 और अधिक												
2001	20 वर्ष से कम												
	20-40												
	40 और अधिक												
	योग												

निम्नलिखित चार्ट के माध्यम से सारणियों के प्रकार को सरलतापूर्वक याद किया जा सकता है—



प्र.15. आँकड़ों के चित्रमय एवं रेखीय प्रदर्शन का विस्तृत वर्णन कीजिए।

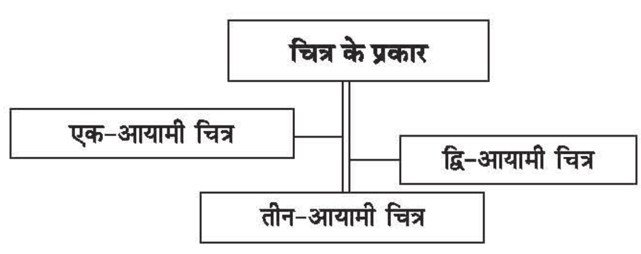
उत्तर

आँकड़ों का चित्रमय प्रदर्शन
(Diagrammatic Representation of Data)

प्रत्येक अनुसन्धान प्रक्रिया के लिए आँकड़ों का संग्रह एवं विश्लेषण महत्त्वपूर्ण है क्योंकि अनुसन्धानकर्त्ता को आँकड़ों का विश्लेषण करने तथा आँकड़ों के पारस्परिक संबद्धता की जाँच करने की आवश्यकता होती है। इसके अतिरिक्त, अनुसन्धानकर्त्ता को यह भी जाँचना होगा कि आँकड़ा परिकल्पना का समर्थन करता है या नहीं। चित्र, हिस्टोग्राम तथा चार्ट का उपयोग करके आँकड़ों का प्रदर्शन किया जा सकता है तथा ये चित्रमय प्रदर्शन आँकड़ों के सरल विश्लेषण में सहायता करते हैं। चित्र आँकड़ों का चित्रमय प्रदर्शन है जो आँकड़ों की विभिन्न संख्याओं के मध्य सम्बन्ध को दर्शाता है। चित्र की सहायता से आँकड़ों के स्थानान्तरण का कार्य सरल, व्यवस्थित तथा समझने योग्य हो सकता है। आरेख आँकड़ों के विभिन्न स्वरूप को दर्शाते हैं तथा सूचना को एक सार्थक प्रारूप में सारांशित करते हैं। एक चार्ट मात्रात्मक निर्देशांक का उपयोग करके आँकड़ों के प्रदर्शन में सहायता करता है। विभिन्न आँकड़ों की तुलना करने के लिए चार्ट का भी प्रयोग किया जाता है। चार्ट के सबसे सामान्य प्रकार पाई चार्ट, रेखा चार्ट, स्तम्भ चार्ट आदि हैं।

चित्रों के प्रकार (Kinds of Diagram)

आँकड़ों का प्रदर्शन करने के लिए विभिन्न प्रकार के चित्रों का उपयोग किया जाता है। चित्रों को निम्नलिखित प्रकार में वर्गीकृत किया जा सकता है—



1. **एक-आयामी चित्र**—यह आरेख केवल एक आयाम का प्रदर्शन करता है जैसे—केवल ऊँचाई या चौड़ाई। इन चित्रों को दण्ड या रेखा चार्ट के रूप में दर्शाया जाता है तथा इन्हें अग्रानुसार वर्गीकृत किया जा सकता है—

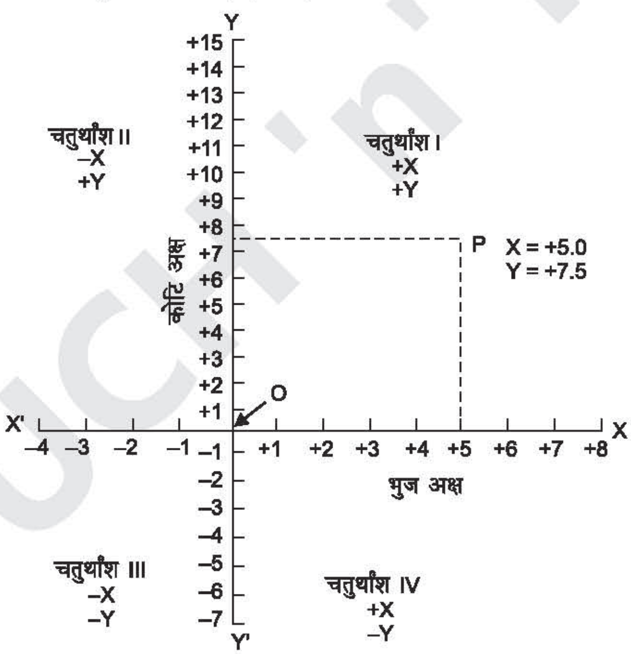
(i) रेखा चित्र (ii) सरल दण्ड चित्र (iii) बहुविकल्पी दण्ड चित्र
(iv) उप-विभाजित दण्ड चित्र (v) प्रतिशत दण्ड चित्र

2. **द्वि-आयामी चित्र**—द्वि-आयामी चित्र में, एक से अधिक आयामों को ध्यान में रखा जाता है। इस प्रकार के चित्र को क्षेत्रफल चित्र या धरातल चित्र भी कहा जाता है। क्षेत्रफल चित्र के महत्त्वपूर्ण प्रकार हैं—
(i) आयत (ii) वर्ग (iii) वृत्त चित्र

3. **तीन आयामी चित्र**—इन चित्रों में लम्बाई, चौड़ाई तथा गहराई जैसे तीन आयामों को ध्यान में रखा जाता है। इस प्रकार के चित्र घन, गोले, बेलनाकार तथा इष्टका के रूप में होते हैं।

आँकड़ों का रेखीय प्रदर्शन
(Linear Representation of Data)

एक ग्राफ सांख्यिकीय आँकड़ों की प्रस्तुति का दृश्यात्मक रूप है। आकृति की सारणी की तुलना में एक ग्राफ अधिक आकर्षक होता है। ग्राफ से आँकड़ों के संदेश को एक साधारण व्यक्ति भी समझ सकता है। ग्राफ की सहायता से दो या दो से अधिक घटनाओं के मध्य तुलना बहुत आसानी से की जा सकती है। प्रस्तुति के रेखीय प्रकार में आँकड़ों का प्रदर्शन करने के लिए विभिन्न प्रकार के बिंदुओं या रेखाओं का उपयोग किया जाता है। प्रत्येक ग्राफ पेपर में एक इंच या सेमी के प्रत्येक भाग के लिए मोटी रेखाएँ होती हैं तथा उसके छोटे भाग के लिए पतली रेखाएँ होती हैं।



एक ग्राफ चाहे वह किसी भी आकार का हो उसे चार चतुर्भुजों में विभाजित किया जाता है, परन्तु जब तक किसी भी अक्ष पर दिखाए जाने वाले ऋणात्मक आँकड़े उपलब्ध न हो, तब तक सामान्य रूप से प्रथम चतुर्थांश का उपयोग किया जाता है। क्षैतिज अक्ष को XX' अक्ष तथा ऊर्ध्वाधर अक्ष को YY' अक्ष कहा जाता है। ये एक केन्द्रीय बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं जिसे O द्वारा इंगित मूल बिन्दु कहते हैं। क्षैतिज अक्ष पर दिखाए गए किसी भी चर की ऋणात्मक राशि मूलबिन्दु के बाईं ओर होगी; ऊर्ध्वाधर अक्ष पर दिखाए गए किसी भी चर की ऋणात्मक राशि मूल बिन्दु के निचले भाग में इंगित की जाती है। चार चतुर्भुज होते हैं जो यह दिखाते हैं कि प्रत्येक चतुर्थांश में + या – चिह्नों के साथ अंकों को कैसे दर्शाया जाता है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। चतुर्थांश 1 में एक बिन्दु (5, 7.5) को प्रांकित किया गया है, 5 को क्षैतिज अक्ष पर तथा धनात्मक पक्ष पर पढ़ा गया है तथा 7.5 को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर पुन: धनात्मक पक्ष पर पढ़ा गया है।

प्र.16. आवृत्ति वितरण में उपयोग किए जाने वाले ग्राफों का वर्णन कीजिए।

उत्तर

ग्राफ के प्रकार/आवृत्ति वितरण के ग्राफ
(Types of Graph/Graphs of Frequency Distribution)

आँकड़ों के विवरण की सामान्य समझ के लिए आवृत्ति वितरण को चित्रित करने के लिए सबसे अधिक उपयोग किए जाने वाले ग्राफ इस प्रकार हैं—

I. हिस्टोग्राम (Histogram)

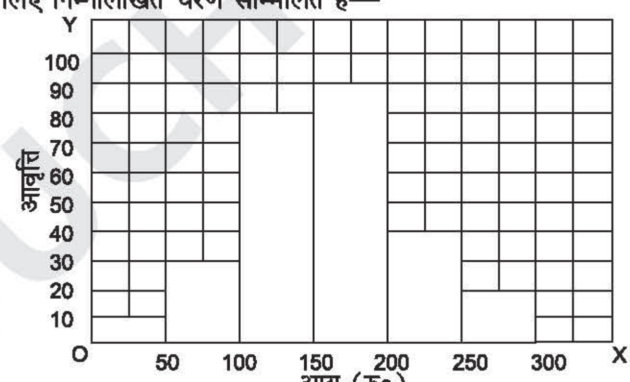
हिस्टोग्राम एक दण्ड चार्ट या ग्राफ होता है जो विश्लेषण किए जा रहे चर के प्रत्येक मान की आवृत्ति को दर्शाता है। हिस्टोग्राम में, आँकड़ों को आयतों की एक श्रेणी के रूप में प्रांकित किया जाता है। वर्गान्तर को 'X-अक्ष' तथा आवृत्ति को 'Y-अक्ष' पर दर्शाया जाता है। प्रत्येक आयत की ऊँचाई वर्गान्तर की आवृत्ति को प्रदर्शित करती है। प्रत्येक आयत का निर्माण एक-दूसरे के साथ किया जाता है ताकि एक सतत् चित्र को प्रस्तुत किया जा सके। इस प्रकार के ग्राफ को सीढ़ीनुमा या इष्टका चित्र भी कहा जाता है।

टिप्पणी—वितरण के लिए खुले-सिरे के वर्गान्तर की श्रेणी के साथ एक व्यक्ति हिस्टोग्राम नहीं बना सकता है। यदि वितरण में असमान वर्ग अन्तराल है तथा आवृत्तियों में उपयुक्त समायोजन नहीं किया गया है तो भी यह अत्यन्त भ्रामक होता है।

उदाहरण—निम्नलिखित आँकड़ों को हिस्टोग्राम द्वारा प्रदर्शित कीजिए—

आय (रुपये में)	आवृत्ति
0-50	10
50-100	30
100-150	80
150-200	90
200-250	40
250-300	20

हल—ग्राफ के निर्माण के लिए निम्नलिखित चरण सम्मिलित हैं—



(समान वर्ग अंतराल के साथ हिस्टोग्राम)

1. मान लीजिए X-अक्ष का पैमाना 1 सेमी = 50 (आय रु० में) है तथा OY-अक्ष के लिए पैमाना 1 सेमी = आवृत्ति की 10 इकाइयाँ हैं।
2. आयतों की चौड़ाई को 1 सेमी = 50 (आय रु० में) तथा सम्बन्धित आवृत्तियों (1 सेमी = 10 इकाई आवृत्तियों के पैमाने में दर्शाया जा रहा है) को ध्यान में रखते हुए रेखांकित किया गया है। इस प्रकार प्राप्त आयतों का समुच्चय हिस्टोग्राम को प्रदर्शित करता है।

II. आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon)

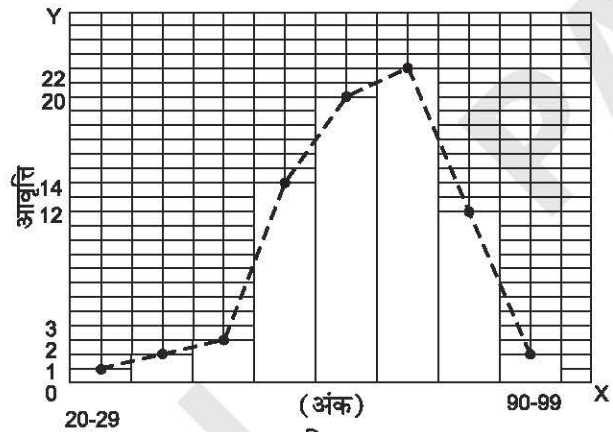
यदि हम आयतों की ऊपरी क्षैतिज भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को एक आयत चित्र में अंकित करते हैं तथा उसे एक सीधी रेखा से मिलाते हैं तो इस प्रकार से बनी आकृति को आवृत्ति बहुभुज कहते हैं। बहुभुज इस धारणा पर आधारित है कि वर्गान्तर में आवृत्ति

पूरे वर्ग में समान रूप से वितरित की जाती है। बहुभुज का क्षेत्रफल हिस्टोग्राम के क्षेत्रफल के बराबर होता है, क्योंकि बाहर का क्षेत्रफल इसमें शामिल क्षेत्रफल के बराबर होता है।

उदाहरण—एक आवृत्ति बहुभुज द्वारा निम्नलिखित की व्याख्या कीजिए—

अंक	आवृत्ति	अंक	आवृत्ति
90-99	02	50-59	14
80-89	12	40-49	3
70-79	22	30-39	2
60-69	20	20-29	1

हल—ग्राफ के निर्माण के लिए निम्नलिखित चरण सम्मिलित हैं—



आवृत्ति बहुभुज

1. सरलीकरण के उद्देश्य से तथा वस्तुओं को क्रम में रखने के लिए, अंकों तथा आवृत्तियों को सबसे पहले पुनः इस प्रकार से लिखा जाना चाहिए, जैसे कि—
2. OX तथा OY अक्ष दोनों के लिए एक उपयुक्त पैमाना समायोजित किया जाना चाहिए।

   OX-अक्ष (अंक) – 1 सेमी = 10 समूह (अंक)

   OY-अक्ष (आवृत्ति) – 1 सेमी = आवृत्ति की 2 इकाई।
3. ऊपर दिए गए पैमाने के आधार पर आयत चित्र तैयार किया जाता है।
4. आयतों की ऊपरी सतहों में मध्य-मूल्यों को प्रांकित किया जाता है तथा फिर उन्हें जोड़ दिया जाता है। यह आवृत्ति बहुभुज प्रदान करता है।

III. आवृत्ति वक्र (Frequency Curve)

यदि किसी आवृत्ति आयत चित्र के आयतों की ऊपरी सीमाओं के मध्य बिंदु को एक सरलित मुक्त हस्त वक्र द्वारा सही किया जाता है, तो ऐसे चित्र को आवृत्ति वक्र कहा जाता है। वक्र आधार रेखा पर प्रारम्भ तथा अन्त होना चाहिए।

उदाहरण—दिए गए आवृत्ति वितरण से एक आवृत्ति वक्र खींचिए—

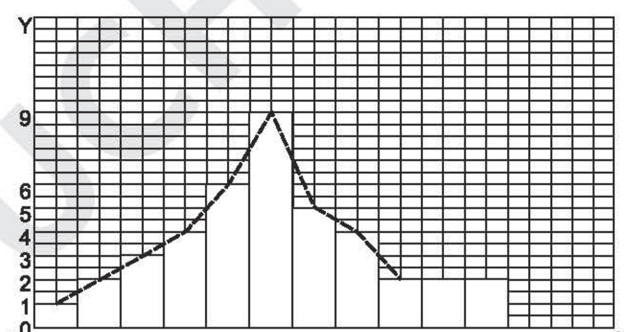
अंक	आवृत्ति
140-144	2
135-139	2
130-134	2
125-129	4
120-124	5

115-119	9
110-114	6
105-109	4
100-104	3
95-99	2
90-94	1

हल—ग्राफ के निर्माण के लिए, चरण इस प्रकार हैं—

1. वर्ग समूह अवरोही क्रम के रूप में होते हैं। इसलिए, यदि ग्राफ को 'जैसा है वैसे ही' प्रांकित किया जाता है, तो निरंतरता तथा व्यवस्था का लाभ गम्भीर रूप से प्रभावित हो सकता है। इस स्थिति में, आवृत्ति वक्र अप्रतिनिधिक होता है। इसलिए समूहों को उचित तथा व्यवस्थित रूप में निम्नानुसार पुनः लिखा जाता है—

अंक	आवृत्ति
90-94	1
95-99	2
100-104	3
105-109	4
110-114	6
115-119	9
120-124	5
125-129	4
130-134	2
135-139	2
140-144	2



आवृत्ति वक्र

2. अंकों को OX-अक्ष पर प्रदर्शित किया जाता है। इस विशिष्ट स्थिति में, पैमाने को 1 सेमी = 5 समूह (अंक) के रूप में लिया जाता है।
3. OY-अक्ष पर, आवृत्तियों को एक चर कारक के रूप में दर्शाया जाता है। पैमाने को 1 सेमी = आवृत्ति की 1 इकाई के रूप में माना जाता है।
4. आयत दिए गए मूल्य के आधार पर खींचे जाते हैं तथा उन्हें समायोजित पैमाने के रूप में लिया जाता है।
5. इसके पश्चात् ऊपरी मध्य-बिन्दुओं को प्रांकित किया जाता है।
6. अंत में, एक मुक्त-हस्त वक्र खींचा जाता है। अतः प्राप्त वक्र को आवृत्ति वक्र कहते हैं। इसका अधिकतर उपयोग विभिन्न विषयों के अध्ययन में किया जाता है।

IV. संचयी आवृत्ति वक्र या तोरण वक्र (Cumulative Frequency Curve/Ogives)

जब संचयी आवृत्ति को एक ग्राफ पर खींचा जाता है तथा फिर जो आवृत्ति वक्र प्राप्त होती है, उसे तोरण या संचयी आवृत्ति वक्र कहा जाता है। तोरण वक्र माध्यिका, चतुर्थक, शतमक आदि को नियंत्रित करता है। X–अक्ष वर्ग सीमा को प्रदर्शित करता है तथा Y–अक्ष संचयी आवृत्ति को प्रदर्शित करता है। एक तोरण खींचते समय, संचयी आवृत्ति वर्ग अन्तराल की ऊपरी सीमा पर खींची जाती है, फिर क्रमिक बिंदुओं को एक साथ जोड़कर एक तोरण वक्र प्राप्त किया जाता है। तोरण वक्र बनाने की दो विधियाँ निम्नलिखित हैं—

1. 'से कम' तोरण वक्र
2. 'से अधिक' तोरण वक्र।

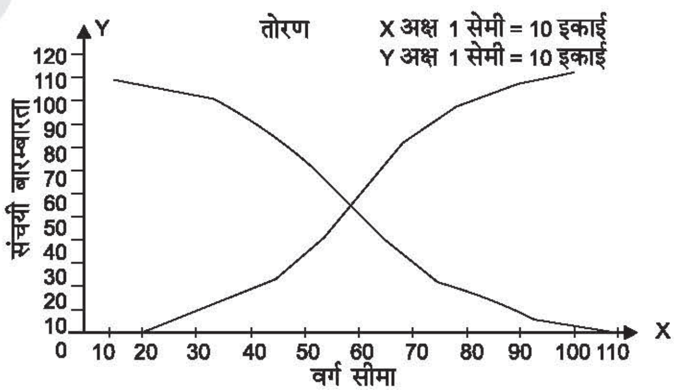
'से कम' तोरण विधि में, हम वर्गान्तर की ऊपरी सीमाओं से प्रारम्भ करते हैं तथा आवृत्ति को जोड़ते जाते हैं। ऐसी आवृत्तियों को प्रांकित करने के बाद, हमें एक बढ़ता हुआ वक्र प्राप्त होता है। 'से अधिक' तोरण विधि में, हम वर्गान्तर की निचली सीमाओं से प्रारम्भ करते हैं तथा कुल आवृत्तियों से हम प्रत्येक वर्ग की आवृत्ति को घटाते जाते हैं। जब ऐसी आवृत्तियों को प्रांकित किया जाता है तो हमें घटता हुआ वक्र प्राप्त होता है।

उदाहरण—दिए गए आँकड़ों के लिए 'से कम' तथा 'से अधिक' प्रकार का तोरण खींचिए—

वर्गान्तर	आवृत्ति
20-30	4
30-40	6
40-50	13
50-60	25
60-70	32
70-80	19
80-90	8
90-100	3

हल—

वर्ग सीमा	'से कम' तोरण	'से अधिक' तोरण
20	0	110
30	4	106
40	10	100
50	23	87
60	48	62
70	80	30
80	99	11
90	107	3
100	110	0



❑

UNIT-II

केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप

खण्ड-अ अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. एक आदर्श केन्द्रीय प्रवृत्ति के गुण लिखिए।

उत्तर एक आदर्श केन्द्रीय प्रवृत्ति के गुण निम्नलिखित हैं—

1. इसे कठोरता से परिभाषित किया जाना चाहिए।
2. इसकी परिभाषा गणितीय सूत्र के रूप में होनी चाहिए।
3. यह समझने तथा गणना करने में आसान होना चाहिए।
4. यह चरम मूल्यों से अप्रभावित होना चाहिए।
5. यह आगे बीजीय उपचार के लिए सक्षम होना चाहिए।
6. यह श्रृंखला में सभी मदों पर आधारित होना चाहिए।
7. यह आगे सांख्यिकीय संगणना या प्रसंस्करण में प्रयोग होने में सक्षम होना चाहिए।
8. यह नमूना स्थिरता के अधिकार में होना चाहिए।

प्र.2. विच्छिन्न श्रेणी में बहुलक निर्धारण के लिए निरीक्षण रीति का प्रयोग किन दशाओं में होता है?

उत्तर विच्छिन्न श्रेणी में बहुलक निर्धारण के लिए निरीक्षण रीति का प्रयोग निम्न दशाओं में ही उपयुक्त रहता है—

1. जब प्रदत्त आवृत्ति वितरण की आवृत्तियाँ नियमित हों अर्थात् प्रारम्भ में आवृत्तियाँ बढ़ती हुई हों केन्द्र में अधिकतम आवृत्ति हो और उसके बाद घटती हुई आवृत्तियाँ हों।
2. अधिकतम आवृत्ति केवल एक ही हो।

इस रीति में आवृत्ति वितरण के विभिन्न पद-मूल्यों की आवृत्तियों का निरीक्षण करते हैं एवं जिस पद-मूल्य की आवृत्ति सबसे अधिक होती है उसे ही भूयिष्ठक कहते हैं।

प्र.3. निम्नलिखित आवृत्ति वितरण में बहुलक आय ज्ञात कीजिए—

दैनिक आय (₹)	10	15	20	25	30	35	40
व्यक्तियों की संख्या	20	32	40	65	48	28	16

हल उपर्युक्त आवृत्ति वितरण को देखने से स्पष्ट है कि आवृत्तियाँ नियमित हैं एवं अधिकतम आवृत्ति केन्द्र में स्थित है, अत: बहुलक निर्धारण के लिए निरीक्षण रीति ही उपयुक्त रहेगी।

निरीक्षण द्वारा स्पष्ट है कि सबसे अधिक आवृत्ति 65 है जिसका तत्संवादी मूल्य ₹ 25 है। अत: बहुलक-दैनिक आय ₹ 25 है।

प्र.4. किस रीति का प्रयोग कब किया जाए? समझाइए।

उत्तर समान्तर माध्य ज्ञात करने की तीन रीतियाँ—प्रत्यक्ष रीति, लघु रीति एवं पद-विचलन रीति। यद्यपि तीनों रीतियों से उत्तर एक ही आता है परन्तु प्रश्न यह है कि कौन-सी रीति का प्रयोग किया जाये। इस सम्बन्ध में यह ध्यान रखें कि यदि प्रश्न में कोई स्पष्ट निर्देश है तो उसके अनुसार ही प्रश्न हल करना चाहिए अन्यथा वर्ग-विस्तार समान तथा कम अन्तर होने पर लघु रीति का प्रयोग करना चाहिए जबकि असमान वर्ग-विस्तारों की दशा में प्रत्यक्ष रीति उपयुक्त रहती है।

प्र.5. व्यक्तिगत खण्डित एवं सतत् तीनों श्रेणियों में मध्य विचलन गुणांक के लिए सूत्र लिखिए।

उत्तर व्यक्तिगत, खण्डित एवं सतत् तीनों श्रेणियों में निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

(i) **मध्यका से माध्य विचलन का गुणांक**—इसे अपकिरण का मध्यका गुणांक भी कहते हैं।

$$C \text{ of } \delta_M = \frac{\delta_M}{M}$$

(ii) **माध्य या मध्यक से माध्य विचलन गुणांक**—इसे अपकिरण का मध्यक गुणांक भी कहते हैं।

$$C \text{ of } \delta_{\overline{X}} = \frac{\delta_{\overline{X}}}{X}$$

(iii) **बहुलक से माध्य विचलन का गुणांक**—इसे अपकिरण का भूयिष्ठक गुणांक भी कहते हैं।

$$C \text{ of } \delta_Z = \frac{\delta_Z}{Z}$$

प्र.6. प्रमाप विचलन ज्ञात करने वाले चरों सूत्रों को लिखिए।

उत्तर प्रमाप विचलन ज्ञात करने वाले सूत्र निम्नलिखित हैं—

प्रथम सूत्र—$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2 x}{N} - \left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2}$

द्वितीय सूत्र—$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\Sigma d^2 x}{N}\right) - (\overline{X} - A)^2}$

तृतीय सूत्र—$\sqrt{\left(\frac{\Sigma d^2 x - N(\overline{X} - A)^2}{N}\right)}$

चतुर्थ सूत्र—$\sigma = \frac{1}{N} = \sqrt{N \cdot \Sigma d^2 x - (\Sigma dx)^2}$

प्र.7. मूल्य-वर्ण रीति को समझाइए।

उत्तर यह एक सरल रीति है। इसमें प्रमाप विचलन ज्ञात करने के लिए चार मूल्यों का सीधा प्रयोग किया जाता है और विचलन नहीं लिए जाते। परन्तु इस रीति का प्रयोग तभी करना चाहिए जब पद-मूल्य (X) काफी छोटे आकार के हों, अथवा प्रश्न को हल करने के लिए प्रश्न में इस रीति का स्पष्ट रूप से नाम दिया हुआ हो या ΣX एवं ΣX^2 के मूल्य दिए हुए हों। इस रीति द्वारा प्रमाप विचलन ज्ञात करने की गणना-क्रिया इस प्रकार है—

(i) सबसे पहले दिए हुए पद-मूल्यों (X) का योग (ΣX) ज्ञात कर लिया जाता है।

(ii) प्रत्येक पद-मूल्य का वर्ग करके उनका योग (ΣX^2) प्राप्त कर लिया जाता है।

(iii) अन्त में, निम्नलिखित सूत्रों में से किसी एक सूत्र का प्रयोग करके प्रमाप विचलन ज्ञात कर लेते हैं—

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - (\overline{X})^2} \quad \text{या} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}$$

या

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N \cdot \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

प्र.8. विचरण मापांक को समझाइए।

उत्तर विचरण मापांक—विचरण मापांक, प्रमाप विचलन का वर्ग होता है। इसका प्रयोग उच्च सांख्यिकीय अध्ययन में किया जाता है। इसे द्वितीय घात का अपकिरण (Second moment of dispersion) भी कहते हैं। सूत्र के रूप में, इसे निम्नलिखित ढंग से व्यक्त करेंगे—

$$\text{विचरण मापांक} = \sigma^2 \quad \text{या} \quad \sigma = \sqrt{\text{विचरण मापांक}}$$

प्र.9. विचरण गुणांक से आप क्या समझते हैं?

उत्तर विचरण गुणांक—यद्यपि दो या अधिक श्रेणियों में विचरण की तुलना करने के लिए प्रमाप विचलन गुणांक का प्रयोग किया जाता है। परन्तु विचलन गुणांक प्राय: दशमलव या भिन्न के रूप में आते हैं इसलिए विचलन के अन्तर का ठीक अनुमान

नहीं हो पाता। इस असुविधा से बचने के लिए ही विचरण गुणांक का सहारा लिया जाता है। विचरण गुणांक निकालने के लिए प्रमाप विचलन के गुणांक को 100 से गुणा कर देते हैं। संक्षेप में, प्रमाप विचलन गुणांक जब प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है तो उसे विचरण गुणांक कहते हैं। इसके लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\text{विचरण गुणांक} = \frac{\Sigma}{\overline{X}} \times 100$$

प्र.10. प्रमाप विचलन गुणांक क्या है?

उत्तर प्रमाप विचलन गुणांक—प्रमाप विचलन एक निरपेक्ष माप है। दो श्रेणियों की तुलना करने के लिए इसका सापेक्ष माप निकाला जाता है जिसे प्रमाप विचलन गुणांक कहते हैं। इसे ज्ञात करने के लिए प्रमाप विचलन में समान्तर माध्य का भाग दिया जाता है। संक्षेप में, इसे ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\text{प्रमाप विचलन गुणांक} = \frac{\sigma}{\overline{X}}$$

प्र.11. एक अल्प-असममित श्रेणी में माध्य-विचलन 15 है। प्रमाप विचलन तथा चतुर्थक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल प्रमाप विचलन, $\sigma = \frac{5}{4}\ \delta = \frac{5}{4} \times 15 = \frac{75}{4} = 18.75$

तथा चतुर्थक विचलन $= \frac{5}{6}\ \delta = \frac{5}{6} \times 15 = \frac{75}{6} = 12.5$

प्र.12. एक श्रेणी में प्रमाप विचलन 7.5 है। माध्य विचलन और चतुर्थक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल माध्य विचलन, $\delta = \frac{4}{5}\ \sigma = \frac{4}{5} \times 7.5 = \frac{30}{5} = 6$

तथा चतुर्थक विचलन $= \frac{2}{3}\ \sigma = \frac{2}{3} \times 7.5 = \frac{15}{3} = 5$

प्र.13. यदि $\Sigma fd^2 = 400$, $N = 10$, तो चतुर्थक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल प्रमाप विचलन, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}} = \sqrt{\frac{400}{10}} = 6.32;$

$\therefore$ चतुर्थक विचलन $= \frac{2}{3}\ \sigma = \frac{2 \times 6.32}{3} = 4.21$

प्र.14. यदि $Q_3 = 33$ तथा $Q_1 = 24$ तो प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए।

हल चतुर्थक विचलन $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{33 - 24}{2} = \frac{9}{2} = 4.5;$

$\therefore$ प्रमाप विचलन $\sigma = \frac{3}{2} \times$ चतुर्थक विचलन $= \frac{3 \times 4.5}{2} = 6.75$

प्र.15. निम्नलिखित आवृत्ति बंटन के लिए विस्तार तथा विस्तार का गुणांक ज्ञात कीजिए—

प्राप्तांक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
छात्रों की संख्या	10	12	8	16	14	10

हल इस प्रश्न में प्रथम वर्गान्तर 0-10 है जिसकी निचली सीमा 0 है और अन्तिम वर्गान्तर 50-60 है जिसकी ऊपरी सीमा 60 है।

अतः $L = 60,\ S = 0;\ \therefore\quad R = L - S = 60 - 0 = 60$

$$\text{विस्तार गुणांक} = \frac{L - S}{L + S} = \frac{60 - 0}{60 + 0} = \frac{60}{60} = +1$$

प्र.16. निम्नलिखित आवृत्ति बंटन के लिए विस्तार तथा विस्तार गुणांक ज्ञात कीजिए—

वर्ग (C.I.)	1–10	11–20	21–30	31–40	41–50
आवृत्ति (F)	5	9	18	13	6

हल पहले समावेशी श्रेणी को अपवर्जी श्रेणी में बदल लेंगे—

वर्ग (C.I.)	0.5–10.5	10.5–20.5	20.5–30.5	30.5–40.5	40.5–50.5
आवृत्ति (F)	5	9	18	13	6

$L = 50.5, \; S = 0.5$

$$\text{विस्तार} = L - S = 50.5 - 0.5 = 50$$

$$\text{विस्तार गुणांक} = \frac{L - S}{L + S} = \frac{50.5 - 0.5}{50.5 + 0.5} = \frac{50}{51} = 0.98$$

प्र.17. यदि $M = 18.8$, $Q_1 = 14.6$ तथा $Q_3 = 25.2$ तो विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल $M = 18.8, Q_1 = 14.6, Q_3 = 25.2, J_Q = ?$

$$\text{विषमता गुणांक } (J_Q) = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} = \frac{25.2 + 14.6 - 2 \times 18.8}{25.2 - 14.6}$$

$$= \frac{39.8 - 37.6}{10.6} = \frac{2.2}{10.6} = +\,0.2075$$

प्र.18. विषमता तथा अपकिरण में अन्तर बताइए।

उत्तर विषमता तथा अपकिरण में प्रमुख अन्तर निम्नलिखित हैं—

क्र० सं०	विषमता	अपकिरण
1.	विषमता भिन्नता की दिशा के सम्बन्ध में विचार प्रदान करता है।	अपकिरण भिन्नता की मात्रा के सम्बन्ध में विचार प्रदान करता है।
2.	एक निश्चित दिशा में आँकड़ा बिन्दुओं की भिन्नता की प्रवृत्ति को विषमता के प्रयोग के साथ समझा जा सकता है।	अपकिरण का प्रयोग आँकड़ा बिन्दुओं की सीमा जानने तथा माध्य से पूरा करने के लिए किया जाता है।
3.	विषमता शृंखला के आकार के सम्बन्ध में एक विचार प्रदान करता है।	अपकिरण शृंखला की संयोजन के सम्बन्ध में एक विचार प्रदान करता है।

खण्ड-ब लघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. माध्य के लाभ एवं हानियों को लिखिए।

उत्तर **माध्य का लाभ**—माध्य के लाभ निम्नलिखित हैं—

1. गणना करने तथा समझने में आसान है।
2. कुछ मान सदैव निर्धारित होते हैं अर्थात् यह कभी भी अनिश्चित नहीं होता है।
3. अन्य बीजगणितीय गणनाओं में उपयोग किया जा सकता है।
4. श्रेणीकरण या व्यवस्था (बढ़ते या घटते क्रम) की कोई आवश्यकता नहीं होती है।
5. यह स्थिर होते हैं तथा नमूने की भिन्नता से प्रभावित नहीं होती है।

माध्य की हानियाँ—माध्य की हानियाँ निम्नलिखित हैं—

1. माध्य अधिक मूल्यों से अत्यधिक प्रभावित होता है। उदाहरण के लिए—3, 7 तथा 200 का माध्य 70 है। यहाँ, इस 70 के निकट कोई मूल्य उपस्थित नहीं है, इसलिए इस औसत का कोई उपयोग नहीं है।
2. कभी-कभी माध्य भ्रमित करने वाला प्रभाव प्रदान कर सकता है। उदाहरण के लिए—एक अस्पताल में प्रतिदिन भर्ती होने वाले रोगियों की औसत संख्या 5.7 है। यहाँ दी गई सूचना उपयोगी है परन्तु वास्तविक वस्तु प्रदान नहीं करती है क्योंकि अंश या दशमलव में व्यक्त किए जाने पर कुछ मान किसी उपयोग के नहीं होते हैं।
3. केवल नमूना मद का निरीक्षण करके 'माध्य' का अनुमान नहीं लगाया जा सकता है।
4. यदि एक भी मूल्य अनुपस्थित है, तो माध्य की गणना नहीं की जा सकती है।
5. खुले-सिरे-वाले वर्ग के मामले के माध्य की गणना नहीं की जा सकती है।
6. माध्य का चित्रात्मक निरूपण सम्भव नहीं है।

प्र.2. 12 मानों का माध्य 128 है। एक मान जो कि वास्तव में 101 था किन्तु गलत ढंग से 110 पढ़ गया। मानों का वास्तविक माध्य ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $N = 12$, माध्य (गलत) $= 128$. अब 11 मानों का योग X मान लेते हैं।

तब
$$128 = \frac{X + 110}{12}$$
$$1536 = X + 110 \quad \text{या} \quad X = 1426$$

अत: वास्तविक मान का प्रयोग करते हुए वास्तविक माध्य $= \frac{1426 + 101}{12} = \frac{1527}{12} = 127.25$

प्र.3. निम्नलिखित सारणी में 350 पुरुषों की ऊँचाइयाँ दी गई हैं। समूह की ऊँचाई के माध्य की गणना कीजिए।

ऊँचाई (सेमी में)	159	161	163	165	167	169	171	173
व्यक्तियों की संख्या	1	2	9	48	131	102	40	17

हल **ऊँचाई के माध्य की गणना—**

ऊँचाई (X)	आवृत्ति व्यक्तियों की संख्या	fX
159	1	159
161	2	322
163	9	1467
165	48	7920
167	131	21877
169	102	17238
171	40	6840
173	17	2941
योग	$\Sigma f = 350$	$\Sigma fX = 58764$

$\therefore$ अंकगणितीय माध्य या माध्य ऊँचाई $= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{58764}{350} = 167.90$

प्र.4. निम्नलिखित आँकड़ों से गुणोत्तर माध्य की गणना कीजिए—

X :	125	133	141	173	182

हल

गुणोत्तर माध्य की गणना

X	log of X
125	2.09691
133	2.123852
141	2.149219
173	2.238046
182	2.260071
	$\Sigma \log X = 10.8681$

$$\text{गुणोत्तर माध्य} = \text{Antilog}\,\frac{\Sigma \log X}{N} = \text{Antilog}\,\frac{10.8681}{5} = \text{Antilog } 2.17362 = 149.15$$

प्र.5. निम्नलिखित वितरण से गुणोत्तर माध्य की गणना कीजिए–

आय (रुपयों में)	5	20	35	50	60	75	90	10	125
व्यक्तियों की संख्या	15	16	18	20	13	9	8	7	6

हल

गुणोत्तर माध्य की गणना

आय (X)	व्यक्तियों की संख्या (f)	log X	f log X
5	15	0.6989	10.4835
20	16	1.3010	20.816
35	18	1.5441	27.7938
50	20	1.6989	33.978
60	13	1.7781	23.1153
75	9	1.8751	16.8759
90	8	1.9542	15.6336
10	7	1.0000	7
125	6	2.0969	12.5814
	$\Sigma f = 112$		$\Sigma f \log X = 168.2775$

$$\text{गुणोत्तर माध्य} = \text{Antilog}\,\frac{\Sigma f \log X}{\Sigma f} = \text{Antilog}\,\frac{168.2775}{112} = \text{Antilog of } 1.5025 = ₹\, 31.8$$

प्र.6. निम्नलिखित आँकड़ों से हरात्मक माध्य की गणना कीजिए–

15, 250, 15.7, 157, 1.57, 105.7, 10.5, 1.06, 25.7, 0.257

हल

हरात्मक माध्य की गणना

(X)	व्युत्क्रम ($1/X$)
15	0.066667
250	0.004
15.7	0.063694

157	0.006369
1.57	0.636943
105.7	0.009461
10.5	0.095238
1.06	0.943396
25.7	0.038911
0.257	3.891051
	$\Sigma 1/X = 5.755729$

$$\text{हरात्मक माध्य} = \frac{N}{\left(\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_3}+\ldots+\frac{1}{X_N}\right)} = \frac{N}{\Sigma\frac{1}{X}} = \frac{10}{5.755729} = 1.737$$

प्र.7. नीचे दिए गए आँकड़ों के लिए हरात्मक माध्य की गणना कीजिए–

अंक	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
आवृत्ति	14	12	9	7	13	8	9

हल

हरात्मक माध्य की गणना

अंक	मध्यमान (m)	आवृत्ति (f)	व्युत्क्रम ($1/m$)	f × (व्युत्क्रम) [$f(1/m)$]
20-30	25	14	0.0400	0.56
30-40	35	12	0.0285	0.342
40-50	45	9	0.0222	0.1998
50-60	55	7	0.0181	0.1267
60-70	65	13	0.0153	0.1989
70-80	75	8	0.0133	0.1064
80-90	85	9	0.0117	0.1053
		$\Sigma f = 72$		**$\Sigma f\ (1/m) = 1.6391$**

$$\text{हरात्मक माध्य} = \frac{N}{\Sigma f\,\frac{1}{m}} = \frac{72}{1.6391} = 43.92$$

प्र.8. 20, 40, 80 मानों का उपयोग करते हुए सत्यापित कीजिए कि A.M. > H.M.

हल दिया है, $X_1 = 20, X_2 = 40$ तथा $X_3 = 80$

$$\text{अंकगणितीय माध्य (A.M.)} = \frac{20+40+80}{3} = 46.67$$

$$\text{हरात्मक माध्य (H.M.)} = \frac{N}{\left(\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_3}+\ldots+\frac{1}{X_N}\right)} = \frac{3}{\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{80}}$$

$$= \frac{3}{\left(\frac{4+2+1}{80}\right)} = \frac{3 \times 80}{7} = 34.3$$

अतः $\text{A.M.} > \text{H.M.}$

प्र.9. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका की गणना कीजिए–

अंक (से कम)	80	70	60	50	40	30	20	10
विद्यार्थियों की संख्या	100	90	80	60	32	20	13	5

हल सर्वप्रथम संचयी आवृत्ति को साधारण आवृत्ति में परिवर्तित करने पर,

वर्ग-अन्तराल	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्ति (c)
0-10	5	5
10-20	8	13
20-30	7	20
30-40	12	32
40-50	28	60
50-60	20	80
60-70	10	90
70-80	10	100
	$N = 100$	

माध्यिका संख्या, $m = \frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$. यह वर्ग–अन्तराल 40-50 के अन्तर्गत आती है।

माध्यिका वर्ग से पूर्व वर्ग की संचयी आवृत्ति (c) = 32

माध्यिका वर्ग की संचयी आवृत्ति = 60 तथा $f = 28$

$$M = L_1 + \frac{m-c}{f} \times (L_2 - L_1) = 40 + \frac{50-32}{28}(50-40)$$

$$= 40 + \frac{18}{28} \times 10 = 46.43$$

अतः (40-50) वर्ग अन्तराल की आवश्यक माध्यिका 46.43 होगा।

प्र.10. वर्ग 20-30 में लुप्त आवृत्ति की गणना कीजिए जब माध्यिका 28 दी गई है।

X	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
f	5	8	?	16	6

हल माना लुप्त आवृत्ति α है।

वर्ग अन्तराल (X)	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्ति (c.f.)
0-10	5	5
10-20	8	13

20-30	α	$13 + \alpha$
30-40	16	$29 + \alpha$
40-50	6	$35 + \alpha$

माध्यिका संख्या $= \frac{N}{2} = \frac{35+\alpha}{2} = \left(17.5 + \frac{\alpha}{2}\right)$ वें पद का माध्यिका वर्ग है—20-30.

$\therefore\ c = 13, f = \alpha, i = 10$

$$\text{माध्यिका} = L_1 = \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i = 20 + \frac{\frac{35+\alpha}{2} - 13}{\alpha} \times 10 = 20 + \frac{(5\alpha + 45)}{\alpha}$$

अत: $3\alpha = 45 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 15$

प्र.11. निम्न आँकड़ों से बहुलक की गणना कीजिए–

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
छात्रों की संख्या	6	8	7	12	26	20	11	10

हल यहाँ वर्गान्तराल (40-50) की अधिकतम आवृत्ति 26 है, इसलिए वर्गान्तराल (40-50) होगा। अब हम सूत्र का प्रयोग करके बहुलक की गणना कर सकते हैं—

$$\text{बहुलक} = L_1 + \frac{f_0 - f_1}{2f_0 - f_1 - f_2} \times i$$

अब पुन: $L_1 = 40, L_2 = 50, f_0 = 26, f_1 = 12, f_2 = 20$ and $i = 10$;

$$\therefore \quad \text{बहुलक} = 40 + \frac{26 - 12}{2 \times 26 - 12 - 20} \times 10 = 40 + \frac{140}{20} = 47$$

प्र.12. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए बहुलक की गणना कीजिए–

20, 15, 18, 20, 25, 15, 16, 15, 30, 12

हल

बहुलक की गणना

मद का आकार	इसके पाए जाने की संख्या
12	1
15	3
16	1
18	1
20	2
25	1
30	1
Total	**10**

चूँकि 15 पद की अधिकतम आवृत्ति 3 है, इसलिए बहुलक 15 होगा।

प्र.13. चतुर्थक विचलन को संक्षेप में समझाइए।

उत्तर

चतुर्थक विचलन
(Quartile Deviation)

चतुर्थक विचलन प्रसार मापने की एक और विधि है जो प्रसार की सीमा को मापने का समाधान करता है। एक आँकड़े समूह में यह मूल्यों के आधे भाग की प्रसार की गणना करता है। भिन्नता का यह माप चरम मूल्यों के प्रभाव को कम करता है। (इसे आउटलेट

के रूप में माना जाता है)। इस पद्धति में, अन्तर चतुर्थक विस्तार का अध्ययन आवश्यक है क्योंकि श्रेणी का बड़ा मान आवृत्ति वितरण के मध्य भाग में निहित रहता है। इस मान की गणना करने के लिए सभी आँकड़ों को चार भागों में विभाजित किया जाता है। श्रेणी के प्रत्येक भाग में कुल मान का 25% होता है। इस मान में उच्चतम मान को चतुर्थक के रूप में जाना जाता है।

← अन्तर चतुर्थक विस्तार $(Q_3 - Q_1)$ →

निम्नतम मान (S) | प्रथम चतुर्थक (Q_1) | द्वितीयक चतुर्थक (Q_2) | तृतीय चतुर्थक (Q_3) | उच्चतम चतुर्थक (L)

← प्रसार (L – S) →

तीसरे चतुर्थक तथा प्रथम चतुर्थक $(Q_3 - Q_1)$ के मध्य अन्तर का आधा भाग अर्द्ध अन्तर-चतुर्थक या चतुर्थक विचलन के रूप में जाना जाता है।

गणितीय रूप से—

$$\text{चतुर्थक विचलन (Q.D.)} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

यहाँ, $(Q_3 - Q_1)$ = अन्तर चतुर्थक विचलन

चतुर्थक विचलन गुणांक (Coefficient of Cuartile Deviation)

यदि तीसरे तथा पहले चतुर्थक के अन्तर को तीसरे तथा पहले चतुर्थक के योग से विभाजित किया जाता है, तो प्राप्त परिणाम चतुर्थक विचलन का गुणांक कहलाता है। खुले सिर वाले वर्गान्तर (जिस वर्ग में आवृत्ति वितरण की उच्च सीमा प्रकट होती है, परन्तु कोई विशिष्ट वर्गान्तर नहीं दिया होता है) में यह विधि अत्यन्त उत्तम है। गणितीय रूप से, चतुर्थक विचलन गुणांक को निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जा सकता है—

$$\text{चतुर्थक विचलन गुणांक} = (CQD) = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

यहाँ, CQD = चतुर्थक विचलन गुणांक, Q_3 = तृतीय चतुर्थक, Q_1 = प्रथम चतुर्थक।

प्र.14. विचरण को संक्षेप में समझाइए।

उत्तर

विचरण
(Variance)

पूर्ण मानदंड आसान हेरफेर के लिए अनुकूल नहीं होता है; इस कारण से गणितज्ञों ने माध्य से विचलन की शून्य-योग संपत्ति पर काबू पाने के लिए एक वैकल्पिक तंत्र विकसित किया। यह दृष्टिकोण माध्य से विचलन के वर्ग का उपयोग करता है। परिणाम विचरण, परिवर्तनशीलता का एक महत्त्वपूर्ण माप है। संख्याओं के समूह के लिए अंकगणितीय माध्य के बारे में भिन्न विचलन का औसत विचरण है। जनसंख्या का विचरण σ^2 द्वारा निरूपित किया जाता है।

नमूना विचरण (Sample Variance)

नमूना विचरण को s^2 द्वारा निरूपित किया जाता है। नमूना विचरण का मुख्य उपयोग जनसंख्या विचरण के रूप में किया जाता है। इस कारण से, नमूना विचरण की गणना जनसंख्या विचरण की गणना से थोड़ी-सी भिन्न होती है। नमूना विचरण N के बजाय हर में $N - 1$ का उपयोग करता है क्योंकि नमूना विचरण के हर में n का उपयोग करने से सांख्यिकीय परिणाम प्राप्त होता है जो जनसंख्या विचरण का अनुमान कम लगाता है। $N - 1$ का उपयोग करने से यह निष्पक्ष आकलन करता है जो कि आनुमानिक आँकड़े में एक वांछनीय गुण है।

$$\text{नमूना विचरण } s^2 = \frac{\Sigma(X - \overline{X})^2}{N - 1}$$

उदाहरण के लिए—संयुक्त राज्य अमेरिका की छह सबसे बड़ी लेखा फर्म तथा प्रत्येक फर्म से सम्बन्धित भागीदारों की संख्याओं का नमूना सार्वजनिक लेखा विवरण द्वारा रिपोर्ट दिया गया है।

फर्म	साझेदारों की संख्या
Price Waterhouse	1062
McGladrey & Pullen	381
Deloitte & Touche	1719
Andersen Worldwide	1673
Coppers & Lybrand	1277
BDO Seidman	217

नमूना विचरण एवं मानक विचलन द्वारा गणना निम्न प्रकार से की जा सकती है—

X	$(X-\overline{X})^2$
1062	51.41
381	454,046.87
1719	441,121.79
1673	382,134.15
1277	49,359.51
217	701.959.11
$X = 6329$	$\Sigma(X-\overline{X})^2 = 2{,}028{,}672.84$

$$\overline{X} = \frac{6329}{6} = 1054.83$$

$$s^2 = \frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{N-1} = \frac{2{,}028{,}672.84}{5} = 405{,}734.57$$

नमूना विचरण = 405,734.57

प्र.15. विचरण गुणांक को समझाइए।

उत्तर

विचरण गुणांक
(Coefficient of Variance)

यह अपकिरण का सापेक्ष माप है। विचरण का गुणांक उन इकाइयों के सन्दर्भ में व्यक्त किया जाता है जिनसे वास्तविक आँकड़ा एकत्र एवं वर्णित किया जाता है। व्यक्तियों के मानक विचलन की तुलना व्यक्तियों की ऊँचाइयों के मानक विचलन की तुलना व्यक्तियों की ऊँचाइयों के मानक विचलन के साथ नहीं की जा सकती है क्योंकि दोनों अलग इकाइयों में होती है अर्थात् (वजन किग्रा में दी जाती है तथा ऊँचाई मीटर में दी होती है।) तुलना के उद्देश्य के लिए, मानक विचलन निश्चित रूप से अपकिरण के सापेक्ष माप (विचरण के गुणांक के रूप में जाना जाता है।) में परिवर्तित हो जाता है। माध्य के मानक विचलन के अनुपात को 'विचरण गुणांक' कहा जाता है। माध्य तथा प्रमाप विचलन के प्रतिशत रूप में अनुपात विचरण का गुणांक कहलाता है।

गणितीय रूप से, विचरण गुणांक $= \dfrac{\sigma}{\overline{X}} \times 100$

प्र.16. एक कारखाने में 200 श्रमिकों की दैनिक औसत आय ₹ 142 है और उनका विचरण 36 है। सभी श्रमिकों की कुल आय ज्ञात कीजिए। उसकी आय का विचरण गुणांक क्या है? गणना कीजिए।

हल हम जानते हैं $\overline{X} = \dfrac{\Sigma X}{N}$

यहाँ, $\overline{X} = 142$ तथा $N = 200 \quad \Rightarrow \quad 142 = \dfrac{\Sigma X}{200}$

$\Rightarrow \Sigma X = 28{,}400$. अत: श्रमिकों की कुल आय 28,400 है।

अब, विचरण गुणांक $(CV) = \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100$ तथा विचरण $V = \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{V}$.

यहाँ विचरण $= 36 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{36} = 6.$

अत: $CV = \frac{6}{142} \times 100 = 4.225$

इस प्रकार उनके आय का विचरण गुणांक 4.225 है।

प्र.17. निम्नलिखित आँकड़ों की सहायता से विचरण गुणांक ज्ञात कीजिए–

56, 66, 61, 68, 54, 70, 55.

हल माना कल्पित माध्य $(A) = 60$ है।

विचरण गुणांक की गणना

X	$d_x = (X - A)$	(d_x^2)
56	–4	16
66	6	36
61	1	1
68	8	64
54	–6	36
70	10	100
55	–5	25
	$\Sigma d_x = 10$	$\Sigma d_x^2 = 278$

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma dx}{N} = 60 + \frac{(10)}{7} = 60 + 1.43 = 61.43$$

$$\text{मानक विचलन } (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma(dx)^2}{N} - \left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{278}{7} - \left(\frac{10}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{278}{7} - \frac{100}{49}} = \sqrt{\frac{278 \times 7 - 100}{49}}$$

$$= \sqrt{\frac{1846}{49}} = \sqrt{37.67} = 6.14$$

$\therefore$ $$\text{विचरण गुणांक} = \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100 = \frac{6.14}{61.43} \times 100$$

$$= \frac{614}{61.43} = 9.99 \approx 10$$

प्र.18. निम्नलिखित आँकड़ों की सहायता से मानक विचलन तथा गुणांक की गणना कीजिए।

साप्ताहिक किराया (₹)	400	700	800	950	1000	1200	1450
किराया भुगतान करने वालों की संख्या	11	13	34	39	18	8	2

हल

विचरण गुणांक की गणना

साप्ताहिक किराया (X)	व्यक्तियों की संख्या (f)	fX	$d_x = (X - \overline{X})$	$f(d_x)^2$
400	11	4400	– 466	2388716
700	13	9100	– 166	358228
800	34	27200	– 66	148104
950	39	37050	84	275184
1000	18	18000	134	323208
1200	8	9600	334	892448
1450	2	2900	584	682112
	$\Sigma f = 125$	$\Sigma fX = 108250$		$\Sigma fd_x^2 = 5068000$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{108250}{125} = 866$$

$$\text{मानक विचलन } (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma f(d_x)\,2}{\Sigma f}} = \sqrt{\frac{506800}{125}} = \sqrt{40544} = 201.36$$

$$\text{विचरण गुणांक} = \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100 = \frac{201.36}{866} \times 100 = 23.25$$

$\therefore$ $\quad CV = 23.25\%$

प्र.19. विषमता की जाँच तथा इसके महत्त्व को समझाइए।

उत्तर

विषमता की जाँच
(Test of Skewness)

निम्नलिखित जाँच द्वारा यह ज्ञात किया जा सकता है कि वितरण विषम है या नहीं—

1. यदि वितरण विषम है तो माध्य, माध्यिका तथा बहुलक का मान समान नहीं होगा। माध्यिका का मान सामान्यत: माध्य तथा बहुलक के मध्य होता है। माध्यम विषम वितरण में

$$\text{माध्य} - \text{बहुलक} = 3\ (\text{माध्य} - \text{माध्यिका})$$

$$\Rightarrow \quad 3\ \text{माध्यिका} = 3\ \text{माध्य} + \text{बहुलक} - \text{माध्य}$$

$$= 2\ \text{माध्य} + \text{बहुलक}$$

$$= 2\ \text{माध्य} + \text{बहुलक} + 2\ \text{बहुलक} - 2$$

$$\text{बहुलक} = 3\ \text{बहुलक} + 2\ (\text{माध्य} - \text{बहुलक})$$

$$\Rightarrow \quad \text{माध्यिका} = \text{बहुलक} + \frac{2}{3}\ (\text{माध्य} - \text{बहुलक})$$

2. यदि कोई वितरण विषम है, तो दो चतुर्थक माध्यिका से समतुल्य नहीं होंगे। दूसरे शब्दों में यह कहा जा सकता है कि $(Q_3 - M) - (M - Q_1) \neq 0$.
3. यदि कोई वितरण विषम है, तो उसका ग्राफ सममित के आकार का वक्र नहीं देगा।
4. धनात्मक विचलन का योग और ऋणात्मक विचलन का योग माध्यिका से बराबर नहीं होता है।
5. विभिन्न बिन्दुओं पर, आवृत्तियों को समान रूप से वितरित नहीं किया जाता है जो बहुलक से समतुल्य है।
   एक विषम वितरण में, $\quad$ माध्य – माध्यिका = 3 (माध्य – बहुलक)

विषमता के लाभ/महत्त्व (Importance/Advantages of Skewness)

1. यदि वितरण सामान्य है तो विषमता शून्य होगी तथा इसे सममितीय वितरण कहते हैं, परन्तु सामान्यत: बिन्दु रेखीय पूर्ण रूप से सममित नहीं होते हैं।
2. विषमता की सहायता से हम माध्य द्वारा यह ज्ञात कर सकते हैं कि विचलन धनात्मक है या ऋणात्मक।
3. डी आगस्टीनों का k^2 परीक्षण से—हम बता सकते हैं कि जो वितरण हमें प्राप्त हो रहा है वह सामान्य जनसंख्या वितरण है कि नहीं। यह परीक्षण पृथुशीर्षत्व (कुकुदता) तथा विषमता की जाँच करता है तथा दोनों के मिश्रण से k^2 प्राप्त करता है।

प्र.20. विषमता गुणांक को संक्षेप में समझाइए।

उत्तर

विषमता गुणांक
(Coefficient of Skewness)

विषमता का माप व्यक्तिपरक या सापेक्ष हो सकता है एक आवृत्ति वितरण में निरपेक्ष माप हमें विषमता की दिशा तथा सीमा के बारे में अवगत कराती है। सापेक्ष माप, जिसे सामान्यत: विषमता का गुणांक कहा जाता है, यह दो या अधिक आवृत्ति वितरण की तुलना करने की सुविधा प्रदान करता है।

विषमता को हम दो विधियों से माप सकते हैं—

1. कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक (Karl Pearson's Coefficient of Skewness)

1. माध्य तथा बहुलक के अन्तर पर आधारित माप—

$$\text{निरपेक्ष माप, विषमता} = \text{माध्य} - \text{बहुलक अथवा } (\bar{X} - Z)$$

$$\text{सापेक्ष माप–विषमता का गुणांक } (J) = \frac{\text{माध्य} - \text{बहुलक}}{\text{मानक विचलन}} \text{ अथवा } \frac{\bar{X} - Z}{\sigma}$$

जहाँ, X = समान्तर माध्य, Z = बहुलक, तथा σ = मानक विचलन।

2. यदि बहुलक निर्धारित नहीं है, तो—

$$\text{निरपेक्ष माप, विषमता } (Sk) = 3\ (\text{माध्य} - \text{माध्यिका}) \text{ अथवा } 3\,(\bar{X} - M)$$

$$\text{सापेक्ष माप विषमता का गुणांक } (J) = \frac{3\ (\text{माध्य} - \text{माध्यिका})}{\text{मानक विचलन}} \text{ अथवा } \frac{3\,(\bar{X} - M)}{\sigma}$$

जहाँ, M = माध्यिका।

नोट—गणितीय रूप से J के लिए कोई सीमा नहीं है लेकिन व्यावहारिक रूप से,

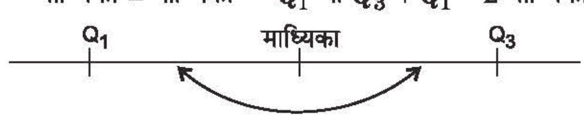
$$J = \frac{\text{माध्य} - \text{बहुलक}}{\text{मानक विचलन}} \qquad (\pm 1 \text{ के मध्य का मूल्य होता है})$$

$$J = \frac{3\ (\text{माध्य} - \text{माध्यिका})}{\text{मानक विचलन}} \qquad (\pm 3 \text{ के मध्य का मूल्य होता है})$$

2. बॉउले का विषमता गुणांक (Bowley's Coefficient of Skewness)

सममिति वितरण में प्रथम तथा तृतीय चतुर्थक माध्यिका से समान दूरी पर होते हैं। जो कि निम्नलिखित चित्र में दर्शाया गया है। **प्रो० ए०एल० बॉउले** द्वारा विषमता का एक वैकल्पिक माप प्रदान किया गया है। यह चतुर्थक पर आधारित होता है।अत: असममिति वितरण में दोनों चतुर्थक माध्यिका से समान दूरी पर नहीं होंगे। यदि वितरण सममिति होगा तब उस स्थिति में—

$$Q_3 - \text{माध्यिका} = \text{माध्यिका} - Q_1 \text{ या } Q_3 + Q_1 - 2 \text{ माध्यिका} = 0$$



चित्र

यदि दिया गया वितरण धनात्मक विषम है, तो शीर्ष 25% पद नीचे के 25% की तुलना में माध्यिका से दूर होंगे। इसका अर्थ यह है कि Q_3, Q_1, की तुलना में माध्यिका से दूर होगा तथा ऋणात्मक विषमता के लिए इसका प्रतिलोम होगा। इसलिए सम्भावित माप—

$$\text{बॉउले का विषमता गुणांक} = \frac{(Q_3 - \text{माध्यिका}) - (\text{माध्यिका} - Q_1)}{(Q_3 - \text{माध्यिका}) + (\text{माध्यिका} - Q_1)} \text{ या}$$

$$\frac{Q_3 + Q_1 - 2\text{माध्यिका}}{Q_3 - Q_1} SK_B = \text{बाउले का विषमता गुणांक}$$

प्र.21. निम्न आँकड़ों से कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए–

माप	20	21	22	23	24	25
आवृत्ति	1	3	8	11	6	1

हल माना, कल्पिक माध्य $(A) = 22$.

कार्ल पियर्सन के विषमता गुणांक की गणना

माप (X)	आवृत्ति (f)	$d_x = (X - 22)$	fd_x	d_x^2	fd_x^2
20	1	− 2	− 2	4	4
21	3	− 1	− 3	1	3
22	8	0	0	0	0
23	11	+ 1	+ 11	1	11
24	6	+ 2	+ 12	4	24
25	1	+ 3	+ 3	9	9
	$N = 30$		$\Sigma fd_x = +21$		$\Sigma f(d_x)^2 = 51$

अंकगणितीय माध्य $(\bar{X}) = A + \dfrac{\Sigma fd_x}{N} = 22 + \dfrac{21}{30} = 22.7$

बहुलक निरीक्षण द्वारा $(Z) = 23$

मानक विचलन
$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f(d_x)^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd_x}{N}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{51}{30} - \left(\frac{21}{30}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1.7 - 0.49} = \sqrt{1.21} = 1.1$$

निरक्षेप माप $\text{Sk} = \bar{X} - Z = 22.7 - 23 = -0.3$

कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक $(J) = \dfrac{\bar{X} - Z}{\sigma} = \dfrac{22.7 - 23}{1.1}$

$$= -\frac{0.3}{1.1} = -0.273$$

खण्ड-स विस्तृत उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप से आप क्या समझते हैं? इसके महत्त्व को समझाते हुए इसके प्रकारों का वर्णन कीजिए।

उत्तर

अर्थ तथा परिभाषाएँ
(Meaning and Definitions)

केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप को 'केन्द्रीय मूल्य के माप' या 'स्थान की माप' या 'प्रथम क्रम के औसत' के रूप में जाना जाता है। यह एक सांख्यिकीय माप है तथा आँकड़ों की सम्पूर्ण मात्रा की केन्द्रीय प्रवृत्ति को समझाने के लिए केन्द्रीय बिन्दु के स्थान या स्थिति की गणना करता है।

सिम्पसन एवं काफ्का के अनुसार, "केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप एक ऐसा प्रतिरूपी मूल्य है जिसकी तरफ अन्य संख्याएँ केन्द्रित होती हैं।"

आर०एफ० फिशर के अनुसार, "संख्यात्मक आँकड़ों के वृहत समूह को पूर्ण रूप से समझने के लिए मानव मस्तिष्क की अन्तर्निहित अयोग्यता, हमें ऐसे अपेक्षाकृत अल्प स्थिर माप ज्ञात करने को बाध्य करती है, जो समंकों की पूर्णरूप से व्याख्या कर सके।"

बॉउले के अनुसार, "सांख्यिकीय स्थिरांक सम्पूर्ण आँकड़ों का विवरण एक प्रयास में समझने योग्य बनाता है।"

एम० आर० स्पीगेल के अनुसार, "औसत एक मूल्य है जो विशिष्ट या आंकड़ों के एक प्रारूप का प्रतिनिधित्व करता है।"

क्लॉर्क तथा शकाडे के अनुसार, "माध्य सम्पूर्ण संख्याओं का विवरण प्रस्तुत करने के लिए एकमात्र संख्या प्राप्त करने का प्रयास है।"

केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप का महत्त्व
(Importance of Measures of Central Tendency)

1. **प्रतिनिधि मान ज्ञात करने के लिए**—केन्द्रीय प्रवृत्ति या औसत माप के द्वारा एक मान प्राप्त होता है, जो कि सम्पूर्ण वितरण में प्रतिनिधित्व करता है। इस तरह औसत आँकड़े एक समूह के आँकड़ों को एक मान में परिवर्तित करता है।
2. **संक्षेपण आँकड़ों के लिए**—एकत्रित एवं वर्गीकृत आँकड़े वृहद है। इन आँकड़ों का प्रयोग करने के लिए औसत का प्रयोग करते है। औसत आँकड़े के पूरे प्रारूप को सिर्फ एक आवृत्ति में परिवर्तित करता है। इस प्रकार संक्षेपण में सहायता करता है।
3. **तुलनात्मक अध्ययन के लिए**—दो या दो से अधिक वितरण की तुलना करने के लिए हमें इन वितरणों के प्रतिनिधि मूल्यों को ज्ञात करना होगा। ये प्रतिनिधि मूल्य केंद्रीय प्रवृत्ति के उपायों की सहायता से पाये जाते हैं।
4. **आगे के सांख्यिकीय विश्लेषण में सहायक**—सांख्यिकीय विश्लेषण की कई तकनीकें जैसे-प्रसार के माप विषमता के मापों सहसम्बन्ध के माप सूचकांक संख्या केंद्रीय प्रवृति मापों पर आधारित होती है। इसीलिए केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों को पूर्व में आदेश के मापों के रूप में भी कहा जाता है।

एक आदर्श केन्द्रीय प्रवृत्ति के गुण
(Characteristics of An Ideal Central Tendency)

1. इसे कठोरता से परिभाषित किया जाना चाहिए।
2. इसकी परिभाषा गणितिय सूत्र के रूप में होनी चाहिए।
3. यह समझने तथा गणना करने में आसान होना चाहिए।
4. यह चरम मूल्यों से अप्रभावित होना चाहिए।
5. यह आगे बीजीय उपचार के लिए सक्षम होना चाहिए।
6. यह शृंखला में सभी मदों पर आधारित होना चाहिए।
7. यह आगे सांख्यिकीय संगणना या प्रसंस्करण में प्रयोग होने में सक्षम होना चाहिए।
8. यह नमूना स्थिरता के अधिकार में होना चाहिए।

केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप के प्रकार
(Types of Measures of Central Tendency)

सांख्यिकी में केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप या सांख्यिकी माध्य औसत के विभिन्न प्रकार हैं जिनमें से दो आधार पर विवेचना की गई है जो कि निम्नलिखित हैं—

I. गणित सम्बन्धी माध्य तथा II. स्थिति सम्बन्धी माध्य।

I. गणित सम्बन्धी माध्य (Mathematical Average)

वह माध्य जिनकी गणना किसी शृंखला के सभी पदों के मूल्यों के आधार पर की जाती है, गणितीय माध्य कहलाता है। जब किसी शृंखला के सभी वस्तुओं के मूल्यों के औसत की गणना की जाती है तो इसे गणितीय औसत कहा जाता है।

1. **समान्तर माध्य या माध्यक**—माध्य को 'अंकगणितीय माध्य' के रूप में भी जाना जाता है। किसी समंक श्रेणी के समूह के पदों के मानों का योग उसके पदों की संख्या से विभक्त करना समान्तर माध्य कहलाता है। समान्तर माध्य को सामान्यत: $\overline{X}$ से निरूपित किया जाता है।

   समान्तर माध्य का सूत्र निम्न प्रकार से है—

$$\overline{X} = \frac{\text{कुल पदों (अवलोकनों) का योग}}{\text{अवलोकनों की कुल संख्या}}$$

2. **गुणोत्तर माध्य**—संख्याओं का गुणोत्तर माध्य n संख्याओं के nवाँ मूल के गुणनफल से परिभाषित किया जाता है इस प्रकार दो मूल्यों के गुणनफल का वर्गमूल तथा तीन मूल्यों के घनमूल उन मूल्यों का गुणोत्तर माध्य होता है। गुणोत्तर माध्य को 'G.M.' से निरूपित किया जाता है। गुणोत्तर माध्य का सूत्र निम्नलिखित है—

$$\text{G.M.} = \sqrt[n]{x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n}$$

3. **हरात्मक माध्य**—हरात्मक माध्य का अर्थ औसत संख्याओं का व्युत्क्रम होता है। इसे व्यक्तिगत अवलोकन के अंकगणितीय माध्य के पारस्परिक रूप में परिभाषित किया जाता है। कुछ शर्तों के अंतर्गत हरात्मक माध्य केंद्रीय प्रवृत्ति का एक बेहतर उपाय है, जैसे—औसत गति, औसत मूल्य आदि की गणना करना।

   गणितीय रूप से,

$$\text{H.M.} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots \frac{1}{x_n}}$$

   जहाँ, N = अवलोकनों की संख्या

   X_N = अवलोकनों का मूल्य

II. स्थिति सम्बन्धी माप (Positional Average)

स्थितिगत सम्बन्धी औसत, वह औसत है जोकि पदों के मानों की अपेक्षा उनकी स्थिति पर निर्भर करता है—

1. **माध्यिका**—जब N मानों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है, तो इन मानों को केन्द्रीय मूल्य को माध्यिका के रूप में जाना जाता है। इसे 'M' या Me से निरूपित किया जाता है।
2. **बहुलक**—सामान्य आवृत्ति में सबसे अधिक बार आने वाले पद को बहुलक या भूयिष्ठक कहते हैं। इसे 'Z' या Mo द्वारा निरूपित किया जाता है।
3. **चतुर्थक**—आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित समंकों के पैमानों को चार बराबर भागों में विभाजित किया जाता है। इसे चतुर्थक कहते हैं। तीन चतुर्थांशों को Q_1, Q_2, Q_3 से निरूपित किया जाता है।
4. **दशमक**—वह श्रेणी जिसमें आरोही व अवरोही क्रम में व्यवस्थित आँकड़ों को नौ बिन्दु या दस समान भागों में विभक्त किया जाता है, तो इसे दशमक कहा जाता है। इन्हें क्रमशः $D_1, D_2, \ldots, D_9$ निरूपित करते हैं।
5. **शतमक**—यदि किसी आँकड़ों के समूह में अवलोकनों के मानों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है तथा इस पैमाने पर 99 बिन्दु जो आँकडों को 100 भागों में विभक्त करता है, शतमक कहलाता है। इन्हें $P_1, P_2, \ldots, P_{99}$ से निरूपित किया जाता है।

प्र.2. व्यक्तिगत श्रेणी में सरल समान्तर माध्य की गणना की विधियों का वर्णन उदाहरण सहित कीजिए।

उत्तर

व्यक्तिगत श्रेणी में सरल समान्तर माध्य की गणना
(Calculation of Arithmetic Mean in Individual Series)

1. **प्रत्यक्ष विधि**—व्यक्तिगत शृंखला के संदर्भ में अंकगणितीय माध्य की गणना करने की प्रत्यक्ष विधि में निम्नलिखित चरण शामिल होते हैं—

   (i) चर के विभिन्न मानों को प्रकट किया जाता है। इसके साथ समस्त पद मूल्यों का योग (ΣX) ज्ञात कर लिया जाता है। इसके बाद पदों की कुल संख्या (N) ज्ञात की जाती है।

   (ii) अवलोकनों की कुल संख्या से कुल पदों के योग को विभाजित किया जाता है। सूत्र—

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{\text{समस्त पदों का योग}}{\text{समस्त पदों की संख्या}}$$

जहाँ, $\overline{X}$ = समान्तर माध्य, ΣX = समस्त पदों का योग तथा N = समस्त पदों की संख्या

उदाहरण 1. 5 श्रमिकों की साप्ताहिक मजदूरी नीचे दिया गया है—₹ 1,350, ₹ 1,400, ₹ 1,450, ₹ 1,370 तथा ₹ 1,480 है। अंकगणितीय माध्य की गणना कीजिए।

हल—

अंकगणितीय माध्य की गणना

क्रम संख्या	साप्ताहिक मजदूरी (₹ में)
1	1,350
2	1,400
3	1,450
4	1,370
5	1,480
$N = 5$	**$\Sigma X = 7{,}050$**

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{7{,}050}{5} = ₹1{,}410$$

उदाहरण 2. निम्नलिखित आँकड़ों से अंकगणितीय माध्य की गणना कीजिए—

क्रम संख्या	1	2	3	4	5
विद्यार्थियों के अंक	8	10	20	15	7

हल—

अंकगणितीय माध्य की गणना

क्रम संख्या	विद्यार्थियों के अंक
1	8
2	10
3	20
4	15
5	7
$N = 5$	**$\Sigma X = 60$**

अंकगणितीय माध्य $$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{60}{5} = 12$$

2. **लघु विधि**—लघु विधि की सहायता से भी समान्तर माध्य की गणना की जाती है। लघु विधि द्वारा अंकगणितीय माध्य की गणना में निम्नलिखित चरण शामिल होते हैं—
   (i) इस विधि में दिए गए पदों में से या अलग से एक कल्पित माध्य (A) मान लिया जाता है अर्थात् किसी एक मूल्य को अनुमानित माध्य मान लिया जाता है।
   (ii) विचलन निकालने के लिए प्रत्येक वास्तविक पद मूल्य में से कल्पित माध्य को अलग-अलग घटाया जाता है। $(d_x = X - A)$
   (iii) समस्त विचलनों के योग को (Σd_x) से निरूपित किया जाता है।
   (iv) इसके बाद निम्नांकित सूत्र से $\overline{X}$ का मान ज्ञात किया जाता है—

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma d_x}{N}$$

यहाँ, A = कल्पित माध्य तथा Σd_x = विचलनों का योग
जहाँ, $\overline{X}$ = अंकगणितीय माध्य, N = मदों की संख्या

उदाहरण 3. निम्नलिखित आँकड़ों से लघु विधि द्वारा समान्तर माध्य की गणना कीजिए—

वर्ष	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
चावल का मूल्य (₹ में)	40	50	55	80	58	60	75	35	45	52

हल—माना कल्पित माध्य $A = 50$ है।

वर्ष	**चावल का मूल्य (₹ में)**	$d = (X - 50)$
2001	40	– 10
2002	50	0
2003	55	5
2004	80	30
2005	58	8
2006	60	10
2007	75	25
2008	35	– 15
2009	45	– 5
2010	52	2
$N = 10$		$\Sigma d = 50$

$$X = A + \frac{\Sigma d}{N} = 50 + \frac{50}{10} = 50 + 5 = ₹\,55$$

प्र.3. असतत् आवृत्ति वितरण में समान्तर माध्य की गणना की विधियों का वर्णन उदाहरण सहित कीजिए।

उत्तर

असतत् आवृत्ति वितरण में समान्तर माध्य की गणना
(Calculation of Arithmetic Mean in Discrete Series)

1. **प्रत्यक्ष विधि**—असतत शृंखला में प्रत्येक मूल्य को सम्बन्धित आवृत्ति के साथ गुणा करके अंकों का योग निर्धारित किया जाता है। उसके पश्चात् कुल आवृत्तियों को निर्धारित किया जाता है। उसके पश्चात् कुल आवृत्तियों का योग किया जाता है। फिर अंकगणितीय माध्य ज्ञात करने के लिए कुल मदों की संख्या से विभाजित किया जाता है। माध्य की गणना में अग्रलिखित चरण शामिल होते हैं—

(i) चर को X तथा आवृत्ति को f से व्यक्त किया जाता है।

(ii) प्रत्येक चर को उसकी आवृत्ति से गुणा किया जाता है। इसे (fX) द्वारा निरूपित किया जाता है।

(iii) इन गुणनफलों का योग किया जाता है (Σfx)।

(iv) आवृत्तियों का योग किया जाता है, जिसे (Σf या N) से निरूपित किया जाता है।

सूत्र—
$$\overline{X} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} \quad \text{या} \quad \frac{\Sigma fx}{N}$$

यहाँ, Σfx = पद मूल्यों एवं सम्बन्धित आवृत्तियों के गुणनफल का योग

Σf = आवृत्तियों का योग

उदाहरण—10 श्रमिकों की औसत मजदूरी ज्ञात कीजिए।

दैनिक मजदूरी (₹ में)	4	6	10	11	14	कुल
कर्मचारियों की संख्या	2	1	4	2	1	**10**

हल—

दैनिक मजदूरी (X)	कर्मचारियों की संख्या (f)	fX
4	2	8
6	1	6
10	4	40
11	2	22
14	1	14
कुल	$\Sigma f = 10$	$\Sigma fX = 90$

$\therefore$ समान्तर माध्य (औसत मजदूरी) $= \dfrac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \dfrac{90}{10} =$ ₹ 9.00

2. **लघु विधि**—असतत् श्रेणी में लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य की गणना निम्न प्रक्रिया द्वारा पूरी की जाती है—

(i) किसी भी मान को कल्पित माध्य (A) के रूप में लिया जा सकता है।

(ii) कल्पित माध्य से मध्य बिन्दुओं के विचलन निकाले जाते हैं तथा उन्हें d_x से निरूपित किया जाता है।

(iii) विचलन के प्रत्येक मान $(d_x = X - A)$ को उसकी आवृत्ति से गुणा करके (fd_x) प्राप्त किया जाता है।

(iv) माध्य की गणना करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fdx}{\Sigma f} \quad \text{या} \quad A + \frac{\Sigma fd_x}{\Sigma N}$$

यहाँ, A = कल्पित माध्य, Σfd_x = विचलनों व आवृत्तियों के गुणनफल का योग

N = आवृत्तियों का योग, $\overline{X}$ = अंकगणितीय माध्य

उदाहरण—निम्नलिखित आँकड़ों से 100 व्यक्तियों की औसत भार की गणना कीजिए—

भार (किग्रा में)	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
व्यक्तियों की संख्या	15	13	18	5	20	11	7	6	3	2

हल—माना कल्पित माध्य = 68 है।

लघु विधि

भार (किग्रा में) (X)	व्यक्तियों की संख्या (f)	विचलन (d_x) = ($X - A$)	fd_x
64	15	– 4	– 60
65	13	– 3	– 39
66	18	– 2	– 36
67	5	– 1	– 5
68 (A)	20	0	0
69	11	1	11
70	7	2	14
71	6	3	18
72	3	4	12
73	2	5	10
	$\Sigma f = 100$		$\Sigma fd_x = -75$

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd_x}{\Sigma f} = 68 + \frac{(-75)}{100} = 68 - 0.75 = 67.25 \text{ kg}$$

प्र.4. सतत् श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना की विधियों का वर्णन उदाहरण सहित कीजिए।

उत्तर

सतत् श्रेणी से समान्तर माध्य की गणना
(Calculation of Arithmetic Mean by Continuous Series)

1. **प्रत्यक्ष विधि**—सतत् श्रेणी में प्रत्यक्ष विधि से माध्य की गणना करने हेतु निम्नलिखित प्रक्रिया अपनाई जाती है—
   (i) प्रत्येक वर्ग अन्तराल का मध्यमान ज्ञात करने के लिए वर्ग अन्तराल की प्रत्येक वर्ग की निचली एवं ऊपरी सीमा को जोड़कर दो से विभाजित करके ज्ञात किया जाता है। उदाहरण के लिए—0 – 10 का वर्ग अन्तराल का माध्यमान 5 है।
   (ii) प्रत्येक वर्गान्तराल के इन माध्य मूल्यों को प्रत्येक वर्ग की सम्बन्धित आवृत्ति से गुणा किया जाता है। दूसरे शब्दों में X को f से गुणा किया जाता है।
   (iii) सभी गुणनफल का ΣfX योग ज्ञात करते हैं।
   (iv) Σfx को Σf से विभाजित करके माध्य ज्ञात किया जाता है।
   माध्य की गणना निम्न सूत्र के अनुसार की जाती है।

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} \text{ अथवा } \frac{\Sigma fm}{\Sigma f / N}\left(\frac{0+10}{2} = \frac{10}{2} = 5\right)$$

(इसे X द्वारा निरूपित किया जाता है)।

उदाहरण—निम्नलिखित आँकड़ों से माध्य लाभ की गणना कीजिए—

लाभ प्रतिशत (₹ में)	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
अंशों की संख्या	12	20	18	30	32	26	22

हल—

माध्य लाभ की गणना

लाभ	मध्य-बिन्दु (X)	अंशों की संख्या (f)	fX
100-200	150	12	1800
200-300	250	20	5000
300-400	350	18	6300
400-500	450	30	13500
500-600	550	32	17600
600-700	650	26	16900
700-800	750	22	16500
		$\Sigma f = \mathbf{160}$	$\Sigma fX = \mathbf{77600}$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{77600}{160} = 485$$

औसत लाभ = ₹ 485

2. **पद विचलन विधि**—पद विचलन शृंखला के सम्बन्ध में चरण विचलन विधि द्वारा अंकगणितीय माध्य की गणना के निम्नलिखित कदम उठाये जाते हैं—

(i) सभी वर्गान्तराल का मध्य मूल्य (X) ज्ञात किया जाता है।

(ii) मध्य बिन्दु के किसी एक मूल्य को कल्पित माध्य (A) के रूप में लिया जाता है।

(iii) d_x ज्ञात करने के लिए मध्य बिन्दु से कल्पिम माध्य को घटाया जाता है। ($d_x = x - A$)

(iv) किसी उभयनिष्ठ मान (i) से विचलनों को (d_x) को विभाजित किया जाता है।

$$d_x = \frac{x - A}{i} = \frac{d_x}{i}$$

$$d = \frac{X - A}{i}$$

(v) प्रत्येक विचलन को सम्बन्धित आवृत्ति से गुणा किया जाता है, अर्थात् (fd_x') ज्ञात किया जाता है।

(vi) कुल आवृत्तियों को ज्ञात किया जाता है। $N = \Sigma f$

(vii) इन सभी गुणनफलों के योग ($\Sigma fd_x'$) को आवृत्तियों के योग (Σf) से विभाजित किया जाता है।

(viii) पद विचलन विधि अपनाने पर माध्य की गणना में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fd_x'}{\Sigma f} \times i$$

जहाँ, $\overline{X}$ = अंकगणितीय माध्य, A = कल्पित माध्य

$\Sigma fd'$ = चरण विचलन एवं आवृत्तियों के गुणनफल का कुल योग,

Σf = आवृत्तियों की कुल संख्या तथा

$i = X$ का सामान्य कारक।

उदाहरण—निम्नलिखित सारणी का प्रयोग करते हुए माध्य की गणना कीजिए—

बच्चों का भार (किग्रा में)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
बच्चों की संख्या	4	12	8	21	32	28	10	3	2

हल—माना कल्पित माध्य $(A) = 55$, माना $i = 10$ (सामान्य कारक)

वर्गान्तराल (भार किग्रा में)	मध्यमान (X)	आवृत्ति (f)	$d_x = X - A$	$d' = d_x/10$	fd'
0-10	5	4	– 50	– 5	– 20
10-20	15	12	– 40	– 4	– 48
20-30	25	8	– 30	– 3	– 24
30-40	35	21	– 20	– 2	– 42
40-50	45	32	– 10	– 1	– 32
50-60	55	28	0	0	0
60-70	65	10	10	1	10
70-80	75	3	20	2	6
80-90	85	2	30	3	6
योग		$\Sigma f = 120$			$\Sigma fd' = -144$

$$\text{समान्तर माध्य (A.M.)} = A + \frac{\Sigma fd'}{\Sigma f} \times i = 55 + \frac{(-144)}{120} \times 10 = 55 - 12 = 43\,\text{kg}$$

प्र.5. गुणोत्तर माध्य की परिभाषा दीजिए और इसके गुण तथा दोषों की विवेचना कीजिए। इसका उपयोग कब होता है, समझाइए।

उत्तर

गुणोत्तर माध्य
(Geometric Mean : G.M.)

गुणोत्तर माध्य किसी श्रेणी के सभी पद-मूल्यों के गुणनफल का वह मूल (Root) होता है जितनी उस श्रेणी में इकाइयाँ होती हैं। यदि किसी श्रेणी में दो पदों के मूल्य 3 और 12 हों तो उनका गुणोत्तर माध्य $\sqrt{3 \times 12} = 6$ होगा। इसी प्रकार तीन संख्यायें होने पर गुणोत्तर माध्य उनके गुणनफल का घनमूल होता है, जैसे—किसी श्रेणी के तीन मूल्य क्रमश: 3, 9 तथा 27 हों तो गुणोत्तर माध्य $\sqrt[3]{3 \times 9 \times 27} = 9$ होता है। जब किसी श्रेणी में चार संख्यायें होती हैं तो चारों संख्याओं के गुणनफल का चतुर्थ मूल (Fourth Root) ही उसका गुणोत्तर माध्य होगा। इसी प्रकार यदि पाँच संख्यायें हैं तो उन सभी संख्याओं के गुणनफल का पाँचवां मूल (5th root) गुणोत्तर माध्य होगा। संक्षेप में, गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने के लिये निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं—

$$\text{G.M.} = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 \times x_5 \ldots x_n \ldots\ldots}$$

G.M. = गुणोत्तर माध्य

N = पदों की संख्या

x_1, x_2, x_3 आदि = पदों के मूल्य।

उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग करने में उस समय कठिनाई आती है जब पदों की संख्या 3 से अधिक बढती जाती है क्योंकि उस समय मूल (root) की गणना करने में कठिनाई होती है इसलिये ऐसी परिस्थितियों में लघुगणक की सहायता से गुणोत्तर माध्य ज्ञात करते हैं। लघुगणक के दो प्रकार के उपयोगों का यहाँ पर प्रयोग करते हैं। प्रथम, विभिन्न संख्याओं के गुणनफलों के लिये और द्वितीय, संख्याओं का मूल (root) ज्ञात करने के लिये—

(i) $$(a \times b) = \text{Antilog}\,(\log a + \log b)$$

(ii) $$\sqrt[n]{a} = \text{Antilog}\,\frac{(\log a)}{N}$$

उपर्युक्त दोनों लघुगणकों के उपयोग के आधार पर गुणोत्तर माध्य का सूत्र निम्नलिखित प्रकार से लिख सकते हैं—

$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\left(\frac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + \log x_n}{n}\right)$$

or
$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\left(\frac{\Sigma \log X}{N}\right)$$

गुणोत्तर माध्य के गुण (Merits of Geometric Mean)

गुणोत्तर माध्य के गुण निम्नलिखित हैं—

1. **सभी मूल्यों पर आधारित**—गुणोत्तर माध्य समंक श्रेणी के सभी पद-मूल्यों पर आधारित होता है।
2. **निश्चितता**—यदि संख्यायें ऋणात्मक या शून्य नहीं हैं तो गुणोत्तर माध्य को निश्चित रूप से ज्ञात कर सकते हैं । वस्तुतः यह एक स्पष्ट एवं निश्चयात्मक माप है।
3. **चरम-मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव**—अन्य माध्यों की तुलना में गुणोत्तर माध्य पर सीमान्त मूल्यों का कम प्रभाव पड़ता है।
4. **बीजगणितीय विवेचन**—गुणोत्तर माध्य का बीजगणितीय विवेचन भी किया जा सकता है। सामूहिक गुणोत्तर माध्य इसका उदाहरण है।
5. **अनुपातों व प्रतिशतों का माध्य**—गुणोत्तर माध्य का प्रयोग परिवर्तन के अनुपातों का औसत ज्ञात करने के लिये किया जाता है। यही कारण है कि चक्रवृद्धि दरों, प्रतिशतों व सूचकांकों के विश्लेषण में इस माध्य का प्रयोग ही सर्वोत्तम माना जाता है।
6. **सन्तुलित स्थिति**—गुणोत्तर माध्य बड़ी संख्याओं को कम और छोटी संख्याओं को अधिक भार (महत्त्व) देता है जिससे कि श्रेणी में सन्तुलन रहता है। यह गुण अन्य माध्यों में नहीं पाया जाता है।

गुणोत्तर माध्य के दोष (Demerits of Geometric Mean)

गुणोत्तर माध्य के दोष निम्नलिखित हैं—

1. **गणना कार्य जटिल**—गणना कार्य करने में कठिनाई होती है, यद्यपि इसके लिये लघुगणकों की सहायता ली जाती है फिर भी काफी जटिलता रहती है। इसलिये यह माध्य अधिक लोकप्रिय नहीं है।
2. **शून्य अथवा ऋणात्मक पद-मूल्य होने पर ज्ञात करना सम्भव नहीं**—समंकमाला में एक भी शून्य या ऋणात्मक पद होने पर गुणोत्तर माध्य को ज्ञात नहीं कर सकते, क्योंकि शून्य संख्या के होने पर सभी का गुणनफल शून्य हो जायेगा। इसी प्रकार से यदि ऋणात्मक संख्या आ जाती है तो सभी मूल्य ऋणात्मक हो जायेंगे और फिर ऐसी स्थिति में गुणोत्तर माध्य को ज्ञात नहीं किया जा सकता।
3. **सभी मूल्यों का ज्ञात होना आवश्यक**—समंकमाला के सभी मूल्य मालूम होने चाहिये तभी गुणोत्तर माध्य ज्ञात हो सकता है क्योंकि यह सभी मूल्यों पर आधारित है।
4. **अवास्तविक संख्या**—गुणोत्तर माध्य ऐसी संख्या (पद-मूल्य) हो सकती है जो कि श्रेणी में न हो। ऐसी स्थिति में प्राप्त गुणोत्तर माध्य को समंक श्रेणी का उचित एवं वास्तविक प्रतिनिधि नहीं कहा जा सकता अर्थात् वह अवास्तविक प्रतीत होगी।
5. **सीमित प्रयोग**—गुणोत्तर माध्य का सीमित प्रयोग होता है।

गुणोत्तर माध्य का उपयोग (Uses of G.M.)

गुणोत्तर माध्य का प्रयोग उन स्थानों पर करते हैं, जहाँ पर निरपेक्ष पदों के स्थान पर अनुपातों या दरों का औसत ज्ञात करना हो अथवा जहाँ पर मूल्यों में बहुत अधिक समानता पाई जाये या छोटी संख्याओं को अधिक और बड़ी संख्याओं को कम महत्त्व देना हो।

प्र.6. गुणोत्तर माध्य की गणना आप किस प्रकार करेंगे? उदाहरण सहित समझाइए।

उत्तर

गुणोत्तर माध्य की गणना
(Calculation of Geometric Mean)

गुणोत्तर माध्य की गणना निम्नलिखित दो प्रकार से की जाती है—

I. व्यक्तिगत श्रेणी में गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean in Individual Series)

व्यक्तिगत श्रेणी में गुणोत्तर माध्य (G.M.) ज्ञात करने हेतु निम्नलिखित प्रक्रिया अपनाई जायेगी—

1. लघुगणक सारणी की सहायता से प्रत्येक पद-मूल्य का लघुगणक (Logarithm or Log) ज्ञात करते हैं। यहाँ पर यह उल्लेखनीय है कि Log ज्ञात करने हेतु 'Characteristic' निरीक्षण द्वारा और 'Mantissa' लघुगणक सारणी की सहायता से निश्चित कर लिये जाते हैं।

2. सभी पद-मूल्यों के लघुगणकों का योग ज्ञात करते हैं जिसे संकेताक्षर रूप में $\Sigma (\log X)$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं।
3. इस प्रकार जो भजनफल प्राप्त हो, उसका प्रति-लघुगणक (A.L.) प्रति लघुगणक सारणी की सहायता से ज्ञात करते हैं और जो मूल्य प्राप्त हो वही गुणोत्तर माध्य (G.M.) होता है।

सूत्रानुसार—

$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma \log X}{N}\right]$$

इस प्रकार गुणोत्तर माध्य, श्रेणी के पद-मूल्यों के लघु गणकों के समान्तर माध्य का प्रति-लघुगणक है।

विशेष टिप्पणी—1. दशमलवांश (mantissa) हमेशा धनात्मक (+) होते हैं जब इसके गुण (characteristic) धनात्मक तथा ऋणात्मक (±) दोनों ही प्रकार के होते हैं। अत: इनका योग करते समय समस्त दशमलवांश (mantissa) एक साथ जोड़े जाते हैं तथा उनकी हासिल (carrying) धनात्मक होने के कारण धनात्मक पूर्णांक में जोड़ी जाती है तत्पश्चात् ऋणात्मक पूर्णांक उसमें से घटाये जाते हैं।

2. यदि लघुगणक (Logs) का योग करते समय पूर्णांक ऋणात्मक होता है तथा पदों की संख्या (N) का पूरा-पूरा भाग ऋणात्मक पूर्णांक में नहीं जाता हो तो n से भाग देने के लिए पूर्णांक योग में संशोधन करना पड़ता है।

पूर्णांक (Characteristic) तथा **दशमलवांश** (Mantissa) में n का भाग इस प्रकार अलग-अलग दिया जाता है कि पूर्णांक n से पूरा-पूरा विभाजित हो जाये और शेष कुछ नहीं बचे। यदि कुछ शेष बचता है तो वह ऋणात्मक मूल्य होगा जिसे Mantissa में नहीं जोड़ा जा सकता क्योंकि Mantissa हमेशा धनात्मक होता है।

उदाहरण—निम्नलिखित दो श्रेणियों के आँकड़ों द्वारा गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

(i)	15	250	15.7	157	1.57		
	105.7	10.5	1.06	25.7	0.257		
(ii)	173	182	75	5	0.8	0.08	0.8974

हल—

गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना

श्रेणी-I		श्रेणी-II	
पद-मूल्य	लघुगणक	पद-मूल्य	लघुगणक
15	1.1761	173	2.2380
250	2.3979	182	2.2601
15.7	1.1959	75	1.8751
157	2.1959	5	0.6990
1.57	0.1959	0.8	$\bar{1}.9031$
105.7	2.0240	0.08	$\bar{2}.9031$
10.5	1.0212	0.8974	$\bar{1}.9530$
1.06	0.0253	$N = 7$	Σ logs = 5.8314
25.7	1.4099		
0.257	$\bar{1}.4099$		
$N = 10$	Σ logs = 11.0520		

श्रेणी-I	श्रेणी-II
$GM = \text{Angilog}\left[\frac{\Sigma\ logs}{N}\right]$	$GM = \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma\ logs}{N}\right]$
$= \text{Antilog}\left[\frac{11.0520}{10}\right]$	$= \text{Antilog}\left[\frac{5.8314}{7}\right]$
$= \text{Antilog } 1.1052 = 12.75$	$= \text{Antilog } 0.8331$
$\mathbf{GM = 12.\ 75}$	$\therefore \quad GM = 6.810$
	$\mathbf{GM = 6.81}$

II. खण्डित तथा सतत् श्रेणी में गुणोत्तर माध्य (G.M. in Discrete and Continuous Series)

खण्डित तथा सतत् श्रेणी में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने की एक-सी ही प्रक्रिया है केवल अन्तर इतना-सा है कि सतत् श्रेणी में पहले प्रदत्त वर्गान्तरों के आधार पर उनके मध्य-बिन्दु (Mid-points) ज्ञात करते हैं। इस प्रकार मध्य-बिन्दु ज्ञात कर लेने पर वह सतत् श्रेणी गुणोत्तर माध्य की गणना के दृष्टिकोण से खण्डित श्रेणी जैसी हो जाती है। गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने की प्रक्रिया इस प्रकार है—

1. सर्वप्रथम पद-मूल्यों के लघुगणक (logs) देखते हैं।
2. इस प्रकार जो लघुगणक प्राप्त हों, उन्हें सम्बन्धित आवृत्ति (f) से गुणा करें तत्पश्चात् उनका योग करें, जिसे संकेत रूप में $\Sigma(\log X \cdot f)$ से व्यक्त करते हैं।
3. अन्त में, निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं—

$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma(\log X \cdot f)}{N}\right]$$

खण्डित श्रेणी में गुणोत्तर माध्य (G.M. in Discrete Series)

उदाहरण—निम्नलिखित तालिका से गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

भार (पौण्ड में)	130	135	140	145	146	148	149	150	157
व्यक्तियों की संख्या	3	4	6	6	3	5	2	1	1

हल—

गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना

भार (पौण्ड में) (X)	व्यक्तियों की संख्या (f)	($\log X$)	($\log X \cdot f$)
130	3	2.1139	6.3417
135	4	2.1303	8.5212
140	6	2.1461	12.8766
145	6	2.1614	12.9684
146	3	2.1644	6.4932
148	5	2.1703	10.8515
149	2	2.1732	4.3464
150	1	2.1761	2.1761
157	1	2.1959	2.1959
	$N = 31$		**66.7710**

$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma\,(logs\ Xf)}{N}\right]$$
$$= \text{Antilog}\left[\frac{66.7710}{31}\right]$$
$$\text{G.M.} = \text{Antilog of } 2.1539 = 142.5 \text{ पौण्ड}$$
$$\text{G.M.} = 142.5 \text{ पौण्ड}$$

सतत् श्रेणी में गुणोत्तर माध्य (G.M. in Continuous Series)

उदाहरण—निम्नलिखित सारणी से गुणोत्तर माध्य की गणना कीजिए—

अंक (से अधिक)	70	60	50	40	30	20
छात्रों की संख्या	7	18	40	40	63	70

हल—गुणोत्तर माध्य में आरोही अथवा अवरोही क्रम का कोई प्रभाव नहीं होता। परन्तु यह प्रश्न संचयी आवृत्ति वितरण का है, अत: सर्वप्रथम साधारण वर्ग आवृत्ति ज्ञात करेंगे—

गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना

अंक	आवृत्ति (f)	मध्यमान (X)	log of X	(log $X \cdot f$)
70-80	7	75	1.8751	13.1257
60-70	11	65	1.8129	19.9419
50-60	22	55	1.7404	38.2888
40-50	0	45	1.6532	0
30-40	23	35	1.5441	35.5143
20-30	7	25	1.3979	9.7853
	$N = 70$			Σ (log $X \cdot f$) = 166·6560

$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma\,(logs\ Xf)}{N}\right]$$
$$= \text{Antilog}\left[\frac{116.6560}{70}\right]$$
$$\therefore \quad \text{G.M.} = \text{Antilog } 1.6665 = 46.40$$
$$\text{G.M.} = 46.40$$

प्र.7. हरात्मक माध्य से आप क्या समझते हैं? इसके गुण तथा दोषों एवं गणना की विवेचना कीजिए। किन परिस्थितियों में आप इसके प्रयोग की सिफारिश करेंगे?

अथवा **हरात्मक माध्य की गणना आप किस प्रकार करेंगे? उदाहरण सहित समझाइए।**

उत्तर

हरात्मक माध्य
(Harmonic Mean)

किसी श्रेणी का हरात्मक माध्य वह मूल्य होता है जो उस श्रेणी के पदों के व्युत्क्रमों (Reciprocals) के योग में पदों का भाग देने पर प्राप्त मूल्य का व्युत्क्रम होता है। दूसरे शब्दों में, यह कहा जा सकता है कि किसी समूह या श्रेणी के पदों का हरात्मक माध्य उनके व्युत्क्रमों के समान्तर माध्य का व्युत्क्रम है। स्पष्ट है कि, हरात्मक माध्य (H.M.) ज्ञात करने के लिये व्युत्क्रम (Reciprocal) ज्ञात करना पड़ता है। किसी भी संख्या का व्युत्क्रम वह संख्या है जो उस संख्या का 1 में भाग देने से प्राप्त होती

है। दूसरे शब्दों में, किसी संख्या का व्युत्क्रम ऐसी संख्या होती है जिसमें उसी संख्या का गुणा करने पर गुणनफल 1 आता है। उदाहरणार्थ 4 का व्युत्क्रम $\frac{1}{4}$ या 0.25, 20 का व्युत्क्रम $\frac{1}{20}$ या 0.05, इसी प्रकार 0.2 का व्युत्क्रम $\frac{1}{0.2}$ या 5 तथा 0.04 का व्युत्क्रम $\frac{1}{0.04}$ या 25 होगा। व्युत्क्रम ज्ञात करने के लिये व्युत्क्रम सारणी का प्रयोग भी कर सकते हैं।

हरात्मक माध्य के गुण (Merits of Harmonic Mean)

1. **सभी मूल्यों पर आधारित**—हरात्मक माध्य समंकमाला के सभी पद-मूल्यों पर आधारित होता है जिसके कारण इस माध्य में गणितीय शुद्धता रहती है।
2. **सुनिश्चित एवं स्पष्ट**—हरात्मक माध्य पूर्णतया स्पष्ट और निश्चयात्मक माप होता है।
3. **बड़े मूल्यों का कम प्रभाव**—यह माध्य बड़े मूल्यों को कम और छोटे मूल्यों को अधिक महत्त्व देता है। इसलिये कुछ बड़े, मूल्य हरात्मक माध्य को अधिक प्रभावित नहीं कर सकते।
4. **बीजगणितीय विवेचन सम्भव**—अन्य गणितीय माध्यों की भाँति हरात्मक माध्य का भी गणितीय विवेचन किया जा सकता है।
5. **अधिक विषमता वाली श्रेणियों के लिए उपयुक्त**—जिन समंक श्रेणियों के अन्तर्गत पद-मूल्यों में परस्पर अधिक विषमता हो, उन श्रेणियों के लिये यह सर्वथा उपयुक्त माध्य है।
6. **मात्रा-मूल्यों, गति तथा चलन वेग का औसत ज्ञात करने के लिए सर्वश्रेष्ठ**—मात्रा-मूल्यों, गति, चलन-वेग आदि का औसत ज्ञात करने के लिये हरात्मक माध्य को सर्वश्रेष्ठ माना जाता है।

हरात्मक माध्य के दोष (Demerits of Harmonic Mean)

1. **जटिल गणन-क्रिया**—इसकी गणना-क्रिया अत्यन्त जटिल है। सारणी से व्युत्क्रम देखने में पर्याप्त सावधानी की आवश्यकता होती है।
2. **श्रेणी के सभी मूल्यों का ज्ञान होना आवश्यक**—हरात्मक माध्य ज्ञात करने के लिये समंक श्रेणी के सभी मूल्यों का ज्ञान होना आवश्यक है अन्यथा हरात्मक माध्य ज्ञात नहीं कर सकते हैं।
3. **अवास्तविक संख्या**—हरात्मक माध्य एक ऐसा मूल्य भी हो सकता है जो कि प्रदत्त समंकमाला में विद्यमान न हो। ऐसी दशा में यह माध्य श्रेणी का प्रतिनिधित्व नहीं करेगा और हरात्मक माध्य अवास्तविक संख्या प्रतीत होगी।

हरात्मक माध्य की गणना
(Calculation of Harmonic Mean)

हरात्मक माध्य निम्नलिखित दो विधियों से ज्ञात किया जा सकता है—

I. व्यक्तिगत श्रेणी में हरात्मक माध्य ज्ञात करना
(Determination of H.M. in an Individual Series)

व्यक्तिगत समंक श्रेणी में हरात्मक माध्य ज्ञात करने की प्रक्रिया निम्नलिखित है—

1. सर्वप्रथम प्रदत्त समंक श्रेणी के प्रत्येक पद-मूल्य का अलग-अलग व्युत्क्रम (Reciprocal) ज्ञात करेंगे। व्युत्क्रम ज्ञात करने के लिये व्युत्क्रम सारणी का प्रयोग करते हैं अथवा 1 में सम्बन्धित संख्या का भाग देते हैं।
2. सभी व्युत्क्रमों का योग Σ (Reciprocal X) ज्ञात करेंगे तत्पश्चात् उस योग में समंक श्रेणी के कुल पदों की संख्या (N) से भाग देंगे।
3. भाग देने पर जो भजनफल प्राप्त हो, उसका पुनः व्युत्क्रम देखिए। इसके बाद जो संख्या प्राप्त होगी, वही हरात्मक माध्य (H.M.) कहलाता है।
4. संक्षेप में, हरात्मक माध्य (H.M.) ज्ञात करने का सूत्र इस प्रकार है—

$$\text{H.M.} = \text{व्युत्क्रम}\left[\frac{\Sigma\,(X \text{ का व्युत्क्रम})}{N}\right]$$

उदाहरण 1. निम्नलिखित 'अ' एवं 'ब' दो श्रेणियों के हरात्मक माध्य की गणना कीजिये—

श्रेणी A	15	250	15.7	157	1.57	105.7	10.5	1.06	25.7	0.257
श्रेणी B	0.8974	0.0570	0.0081	0.5677	0.0002	0.0984	0.0854	0.5672		

हल—

हरात्मक माध्य ज्ञात करना

श्रेणी A		श्रेणी B	
पद-मूल्य	व्युत्क्रम	पद-मूल्य	व्युत्क्रम
15	0.06667	0.8974	1.1143
250	0.00400	0.0570	17.5400
15.7	0.06369	0.0081	123.4570
157	0.00637	0.5677	1.7615
1.57	0.63690	0.0002	5000.0000
105.7	0.00946	0.0984	10.1626
10.5	0.09524	0.0854	11.7096
1.06	0.94340	0.5672	1.7630
25.7	0.03891	$N = 8$	**5167.5080** Σ व्युत्क्रम (X)
0.257	3.89100		
$N = 10$	**5.75564** Σ व्युत्क्रम (X)		

$$\text{H.M.} = \text{व्युत्क्रम}\left[\frac{\Sigma\ \text{व्युत्क्रम}}{N}\right]$$

$$= \text{व्युत्क्रम}\left[\frac{5.75564}{10}\right]$$

$$= \text{व्युत्क्रम } 0.5756 = 1.7373$$

$$\text{H.M.} = 1.7373$$

or

$$\text{H.M.} = \text{व्युत्क्रम}\left[\frac{\Sigma\ \text{व्युत्क्रम}}{N}\right]$$

$$= \text{व्युत्क्रम}\left[\frac{5167.5080}{8}\right]$$

$$\therefore\ \text{H.M.} = \text{व्युत्क्रम } 645.94 = 0.00155$$

$$\text{H.M.} = 0.00155$$

II. खण्डित तथा अखण्डित श्रेणी में हरात्मक माध्य (Harmonic Mean in Discrete and Continuous Series)

खण्डित एवं अखण्डित समंक श्रेणियों में हरात्मक माध्य ज्ञात करने की एक ही विधि है। अखण्डित श्रेणी में प्रत्येक वर्ग का मध्य-बिन्दु ज्ञात कर उसे खण्डित श्रेणी के पद-मूल्य (Item-Value) की तरह मान लेते हैं। संक्षेप में, दोनों श्रेणियों में हरात्मक माध्य ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित प्रक्रिया अपनाई जाती है—

1. सर्वप्रथम मूल्यों के व्युत्क्रम ज्ञात किये जाते हैं।
2. प्राप्त व्युत्क्रमों को उनकी तत्सम्बन्धी आवृत्तियों से गुणा करके उनका योग [Σ(व्युत्क्रम× f)] ज्ञात कर लिया जाता है।
3. तत्पश्चात् इस योग में पदों की संख्या अर्थात् आवृत्तियों के योग का भाग कर देते हैं।
4. प्राप्त भागफल का पुन: व्युत्क्रम (Reciprocal) ज्ञात कीजिये। इस प्रकार उक्त भागफल का व्युत्क्रम ही हरात्मक माध्य कहलाता है। संक्षेप में, खण्डित तथा अखण्डित समंक श्रेणी में हरात्मक माध्य ज्ञात करने के लिए अग्रलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\text{H.M.} = \text{व्युत्क्रम}\left[\frac{\Sigma\,(\text{व्युत्क्रम} \times f)}{N}\right]$$

1. खण्डित श्रेणी में हरात्मक माध्य (H.M. in Discrete Series)

उदाहरण—निम्नलिखित समंक श्रेणी का हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिये—

अंक	1	2	3	4	5	6	7	8	9
छात्रों की संख्या	7	11	16	17	26	31	11	1	1

हल— **हरात्मक माध्य ज्ञात करना**

अंक (X)	छात्रों की संख्या (f)	व्युत्क्रम (X)	$X \cdot f$ का व्युत्क्रम
1	7	1.000	7.0000
2	11	0.5000	5.5000
3	16	0.3333	5.3328
4	17	0.2500	4.2500
5	26	0.2000	5.2000
6	31	0.1667	5.1677
7	11	0.1429	1.5719
8	1	0.1250	0.1250
9	1	0.1111	0.1111
	$N = 121$		**34.2585**

$$\text{H.M.} = \text{व्युत्क्रम}\left[\frac{\Sigma\,(X \cdot f \text{ का व्युत्क्रम})}{N}\right]$$

$$= \text{व्युत्क्रम}\left[\frac{34.2585}{121}\right]$$

$$= \text{व्युत्क्रम } 0.2831$$

$\therefore$ H.M. = 3.53 अंक

H.M. = 3.53

2. अखण्डित श्रेणी में हरात्मक माध्य (H.M. in Continuous Series)

उदाहरण—निम्नलिखित आवृत्ति वितरण से हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिये—

वर्ग-अन्तराल	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55
आवृत्ति	15	30	25	10	15

हल— **हरात्मक माध्य ज्ञात करना**

वर्ग-अन्तराल	X	f	व्युत्क्रम X	$X \cdot f$ का व्युत्क्रम
5-15	10	15	0.1000	1.5000
15-25	20	30	0.0500	1.5000
25-35	30	25	0.0333	0.8325

35-45	40	10	0.0250	0.2500
45-55	50	15	0.0200	0.3000
		$N = 95$		**4.3825**

$$\text{H.M.} = \text{व्युत्क्रम}\left[\frac{\Sigma\,(X \times f \text{ का व्युत्क्रम})}{N}\right] \text{ या व्युत्क्रम}\left[\frac{4.3825}{95}\right]$$

$$\text{H.M.} = \text{व्युत्क्रम } 0.04613 \quad \text{or} \quad 21.68$$

$$\text{H.M.} = 21.68$$

प्र.8. समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य में सम्बन्ध को उदाहरण सहित समझाइए।

उत्तर गुणोत्तर माध्य $= \sqrt{\text{अंकगणितीय माध्य} \times \text{हरात्मक माध्य}}$ के लिए दो धनात्मक संख्याएँ हैं। उपरोक्त सम्बन्धों को सत्यापित करने के लिए a एवं b दो धनात्मक संख्याएँ लेते हैं।

अतः
$$\text{A.M.} = \frac{a+b}{2}, \quad \text{G.M.} = \sqrt{ab}, \quad \text{H.M.} = \frac{2ab}{a+b}$$

अब,
$$\text{A.M.} \times \text{H.M.} = \frac{a+b}{2} \times \frac{2ab}{a+b} = ab = (\text{G.M.})^2$$

$\therefore$
$$\text{G.M.} = \sqrt{\text{A.M.} \times \text{H.M.}}$$

उदाहरण 1—यदि समान्तर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य 20 तथा 16 है, तो इन संख्याओं का हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिए तथा दोनों संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है, A.M. = 20, G.M. = 16

समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य में सम्बन्ध निम्न प्रकार दिया जा सकता है—

$$\sqrt{(\text{A.M.})\,(\text{H.M.})} = \text{G.M.} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(20)\,(\text{H.M.})} = (16)$$

दोनों माध्य का वर्ग करने पर,

$$\text{H.M.} = \frac{256}{20} = 12.8$$

अब दो संख्याएँ X_1 एवं X_2 लेते हैं। इस प्रकार,

$$\text{A.M.} = \frac{X_1 + X_2}{2} = 20 \text{ तथा G.M.} = \sqrt{X_1 \cdot X_2} = 16$$

$$\Rightarrow \quad X_1 + X_2 = 40 \quad \ldots(1)$$

$$\Rightarrow \quad X_1 \cdot X_2 = 256 \quad \ldots(2)$$

इसे हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं—

$$(X_1 - X_2)^2 = (X_1 + X_2)^2 - 4X_1 \cdot X_2 = (40)^2 - 4 \times 256$$

$$= 1600 - 1{,}024 = 576$$

$$\Rightarrow \quad X_1 - X_2 = 24 \quad \ldots(3)$$

समी० (1) तथा समी० (3) को जोड़ने पर निम्नलिखित मान प्राप्त होता है—

$$2X_1 = 64$$

$$\therefore \quad X_1 = 32 \quad \text{यद्यपि } X_2 = 8$$

1. जब श्रेणी के सभी मूल्य पृथक हों तो अंकगणितीय माध्य गुणोत्तर माध्य से अधिक होगा तथा गुणोत्तर माध्य हरात्मक माध्य से अधिक होगा। अर्थात्

A.M. > G.M. > H.M.

उदाहरण 2—4, 8, 16 मूल्यों का प्रयोग करते हुए सत्यापित कीजिए कि अंकगणितीय माध्य > गुणोत्तर माध्य > हरात्मक माध्य।

हल—

$$\text{A.M.} = \frac{4+8+16}{3} = 9.33 \text{ लगभग}$$

$$\text{G.M.} = 3\sqrt{4 \times 8 \times 16} = (512)^{1/3} = 8$$

$$\text{H.M.} = \frac{3}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}} = \frac{3}{\frac{11}{24}} = \frac{3 \times 24}{11} = \frac{72}{11} = 6.54$$

अत: अंकगणितीय माध्य > गुणोत्तर माध्य > हरात्मक माध्य।

2. यदि श्रेणी के सभी मान बराबर हों तो समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य समान होते हैं—

समान्तर माध्य = गुणोत्तर माध्य = हरात्मक माध्य

उदाहरण 3—चर 12 एवं चर 12 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि—

समान्तर माध्य = गुणोत्तर माध्य = हरात्मक माध्य

हल—

$$\text{माध्य} = \frac{12+12}{2} = 12$$

$$\text{गुणोत्तर माध्य} = \sqrt{12 \times 12} = 12$$

$$\text{हरात्मक माध्य} = \frac{2}{1/12 + 1/12} = \frac{2}{2/12} = \frac{2 \times 12}{2} = 12$$

अत: अंकगणितीय माध्य = गुणोत्तर माध्य = हरात्मक माध्य।

प्र.9. अपकिरण का क्या अर्थ है? अपकिरण का प्रयोग, माप, उद्देश्य एवं रीतियों का वर्णन कीजिए।

उत्तर

अपकिरण
(Dispersion)

अपकिरण एक ऐसा सांख्यिकीय तथ्य है जिसके द्वारा हमें यह पता चल जाता है कि किसी समंकमाला के विभिन्न व्यक्तिगत मूल्यों की केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक निश्चित माप से औसत दूरी क्या है। अन्य शब्दों में, अपकिरण हमें यह बताता है कि किसी पदमाला का प्रत्येक पद माध्य से कितनी दूरी पर है। यदि अधिकांश पद-मूल्य माध्य के आस-पास है तो बिखराव की मात्रा कम होगी, इसके विपरीत यदि अधिकांश मदें माध्य से काफी दूर-दूर बिखरी हैं तो बिखराव अधिक होगा। बिखराव के अधिक होने से विचरणता (Variability) अधिक होगी तथा बिखराव के कम होने से विचरणता कम होगी। अपकिरण को प्रसार (Spread), बिखराव (Scatter) तथा विचरण (Variation) आदि अनेक नामों से पुकारा जाता है।

अपकिरण की मुख्य परिभाषाएँ निम्नलिखित हैं—

डॉ० बाउले के अनुसार, "अपकिरण पदों के विचलन का माप है।"

कॉनर के अनुसार, "जिस सीमा तक व्यक्तिगत मूल्यों में भिन्नता होती है, उनके माप को अपकिरण कहते हैं।"

स्पीगेल के अनुसार, "वह सीमा जहाँ तक समंक एक माध्य मूल्य के दोनों ओर फैलने की प्रवृत्ति रखते हैं, उन समंकों का विचरण या अपकिरण कहलाती है।"

बुक्स एवं डिक के अनुसार, "अपकिरण अथवा प्रसार एक केन्द्रीय मूल्य (माध्य मूल्य) के दोनों ओर चर मूल्यों (variables) के विचरण या बिखराव की सीमा है।"

अपकिरण का दो अर्थों में प्रयोग (Use of Dispersion in Two Meanings)

अपकिरण का प्रयोग दो अर्थों में किया जाता है—

प्रथम अर्थ में अपकिरण से आशय किसी समंक श्रेणी के अधिकतम तथा न्यूनतम मूल्यों के अन्तर या सीमा विस्तार से होता है। दूसरे शब्दों में, अपकिरण उन सीमाओं के अन्तर को प्रकट करता है जिसके अन्तर्गत श्रेणी के पद पाये जाते हैं।

दूसरे अर्थ में, अपकिरण से तात्पर्य किसी समंक श्रेणी के माध्य से लिये गये विभिन्न व्यक्तिगत मूल्यों के विचलनों का माध्य (Average of the deviations from an average of series) है। दूसरे शब्दों में, अपकिरण हमें यह बताता है कि किसी समंक श्रेणी के माध्य से उस समंकमाला के विभिन्न व्यक्तिगत मूल्यों की औसत दूरी क्या है।

व्यवहार में अपकिरण का प्रयोग दूसरे अर्थ में ही अधिक किया जाता है।
यह बात ध्यान देने योग्य है कि अपकिरण के इन दोनों अर्थों में पायी जाने वाली भिन्नता पर ही अपकिरण के माप की विभिन्न रीतियाँ निर्भर हैं। अपकिरण का माप पहले अर्थ में सीमाओं की रीति (Method of Limits) द्वारा और दूसरे अर्थ में विचलनों के माध्य (Average of Deviations) द्वारा निकाला जाता है।

अपकिरण का माप (Measures of Dispersion)

अपकिरण के माप को निम्नलिखित दो प्रारूपों में प्रदर्शित किया जा सकता है—

1. **निरपेक्ष माप**—जब किसी समंक श्रेणी के बिखराव या विचरण का माप निरपेक्ष रूप में श्रेणी की इकाई में ही व्यक्त किया जाता है, तो यह अपकिरण का निरपेक्ष माप कहलाता है। उदाहरणार्थ, व्यक्तियों की आय, ऊँचाई, भार, आयु आदि के अपकिरण के निरपेक्ष माप क्रमश: रुपये सेन्टीमीटर किलोग्राम तथा वर्ष के रूप में प्रकट किये जायेंगे।
2. **सापेक्ष माप**—निरपेक्ष माप का सबसे बडा दोष यह है कि इसके द्वारा दो से अधिक श्रेणियों का तुलनात्मक विश्लेषण सम्भव नहीं होता, क्योंकि यह सम्भव है कि विभिन्न श्रेणियों की इकाइयाँ अलग-अलग हों। अत: इनके मापों को तुलना योग्य बनाने के लिए इन्हें सापेक्ष रूप में परिवर्तित किया जाता है। सापेक्ष माप हेतु निरपेक्ष माप में उस माध्य का भाग देते हैं जिसकी सहायता से समंकमाला के प्रत्येक मूल्य का विचलन निकाला गया है। ऐसा करने से उनकी भिन्न-भिन्न इकाइयाँ समाप्त हो जाती हैं और वे तुलना योग्य हो जाते हैं। सापेक्ष माप को अपकिरण गुणांक (Coefficient of Dispersion) कहते हैं।

अपकिरण के माप के उद्देश्य
(Objectives of Measures of Dispersion)

अपकिरण के माप निम्नलिखित उद्देश्यों की पूर्ति करते हैं—

1. **श्रेणी की रचना का ज्ञान**—अपकिरण के मापों के द्वारा श्रेणी की बनावट के बारे में उपयोगी सूचनाएँ उपलब्ध हो जाती हैं। उदाहरणार्थ, माध्य के दोनों ओर मूल्यों का प्रसार या बिखराव कैसा है और उसकी कितनी मात्रा है।
2. **माध्य की विश्वसनीयता का अनुमान**—अपकिरण के माप से यह संकेत मिलता है कि श्रेणी का माध्य किस सीमा तक श्रेणी का प्रतिनिधित्व करता है। यदि विचलन कम है तो प्राप्त माध्य को श्रेणी का प्रतिनिधि माना जा सकता है और उस पर विश्वास किया जा सकता है, इसके विपरीत यदि विचलन अधिक है तो माध्य को उचित प्रतिनिधि नहीं माना जायेगा।
3. **विचरणशीलता के नियन्त्रण में सहायक होना**—अपकिरण के माप का उद्देश्य यह भी है कि विचरण की प्रकृति एवं उसके कारणों का पता लगाकर उसको नियन्त्रित किया जा सके। स्वास्थ्य परीक्षण से ज्ञात रक्तचाप व नाड़ी धड़कन में सामान्य स्तर से विचरणता को उपचार करके नियन्त्रित किया जाता है। इसी प्रकार औद्योगिक उत्पादन के क्षेत्र में किस्म को नियन्त्रित करने के लिए उत्पाद गुणों की विचरणशीलता का पता लगाया जाता है तथा किस्म नियन्त्रण (Quality Control) विधि द्वारा उसको नियन्त्रित किया जाता है। देश में आय व धन के वितरण की असमानताएँ ज्ञात करने के लिए विचरण का अध्ययन आवश्यक है ताकि उचित नीति का अनुसरण करके उस पर नियन्त्रण किया जा सके।
4. **दो या अधिक श्रेणियों में विचरणशीलता की तुलना करना**—अपकिरण के सापेक्ष मापों की सहायता से दो या अधिक श्रेणियों की विचरणशीलता का तुलनात्मक अध्ययन किया जा सकता है।
5. **अन्य सांख्यिकीय मापों के प्रयोग हेतु**—कई महत्त्वपूर्ण सांख्यिकीय तकनीकें या विधियाँ; जैसे—सह-सम्बन्ध, प्रतीपगमन विश्लेषण, परिकल्पना-परीक्षण, उत्पादन-तकनीक, लागत-नियन्त्रण आदि विचरण की मापों पर आधारित हैं।

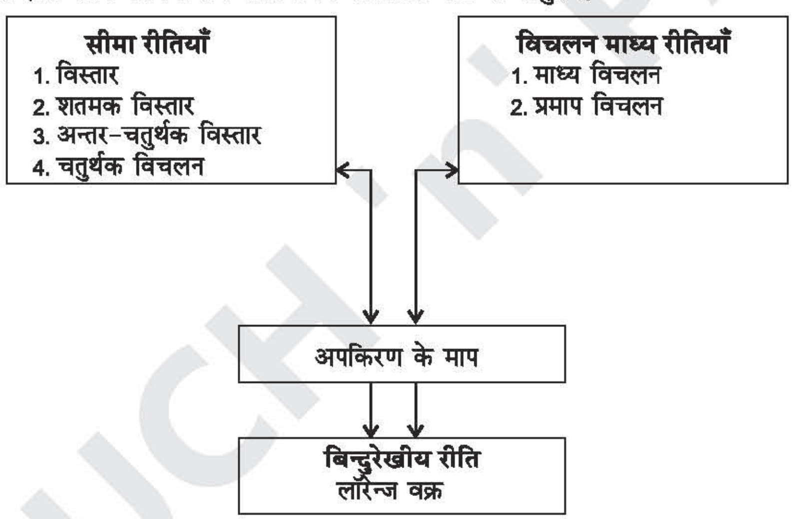
उपर्युक्त उद्देश्यों के कारण अपकिरण का माप किसी भी क्षेत्र में विचरण सम्बन्धी समस्याओं का अध्ययन करने के लिए काफी महत्त्वपूर्ण है। आर्थिक व सामाजिक क्षेत्र में आय या सम्पत्ति के वितरण की असमानताओं का मापन एवं तुलनात्मक अध्ययन करने के लिए अपकिरण के विभिन्न माप अत्यन्त उपयोगी सिद्ध होते हैं। व्यापार एवं उद्योग में माध्य लाभ, माध्य उत्पादन, माध्य लागत आदि से होने वाले परिवर्तनों का विश्लेषण करने से संस्था की प्रगति का अनुमान लगाया जाता है। एकाधिकार और आर्थिक

सत्ता के संकेन्द्रण का मापन भी विभिन्न अपकिरण-गुणांकों की सहायता से किया जाता है। उत्पादन-नियन्त्रण एवं किस्म-नियन्त्रण (Quality Control) में निर्मित वस्तु के केन्द्रीय माप के अतिरिक्त उसके पूर्व निश्चित मानक से होने वाले विचरण का भी अध्ययन किया जाता है। इस प्रकार, प्रत्येक क्षेत्र में पद-मूल्यों के माध्य से प्राप्त आंशिक एवं अपूर्ण सूचना की सम्पूर्ति अपकिरण-माप द्वारा की जाती है। केवल माध्य के आधार पर ही निष्कर्ष निकालना सदैव हानिकारक सिद्ध होता है।

डैरेल हफ ने ठीक ही कहा है, "जब वे महत्त्वपूर्ण अंक (अपकिरण के माप) अज्ञात हों, तो केवल माध्य पर भरोसा मत कीजिये, अन्यथा आप उस अन्धे व्यक्ति के समान होंगे जो केवल औसत तापमान की जानकारी के आधार पर ही कैम्प-स्थल का चुनाव कर लेता है।......... यदि आपने विचरण या विस्तार का ध्यान नहीं रखा तो फिर आप या तो ठंड से जम जायेंगे या फिर गर्मी से उबल जायेंगे।"

अपकिरण के मापन की रीतियाँ
(Methods of Measuring Dispersion)

यह पहले ही स्पष्ट कर चुके हैं कि अपकिरण का प्रयोग दो अर्थों में होता है। इन्हीं अर्थों के आधार पर अपकिरण ज्ञात करने की दो प्रमुख गणितीय रीतियाँ हैं। गणितीय रीतियों के अतिरिक्त बिन्दुरेखीय रीति द्वारा भी अपकिरण को मापा जा सकता है। संक्षेप में, अपकिरण ज्ञात करने की विभिन्न रीतियाँ निम्नलिखित चार्ट में प्रस्तुत हैं—



प्र.10. चतुर्थक क्या है? चतुर्थक की गणना उदाहरण सहित समझाइए।

उत्तर

चतुर्थक
(Quartiles)

केन्द्रीय प्रवृत्ति की वह माप जिसको चार उपभागों में विभक्त किया जाता है, चतुर्थक कहलाता है। इन्हें तीन चतुर्थकों Q_1, Q_2 एवं Q_3 के रूप में निरूपित किया जाता है। चतुर्थक की गणना करने के लिए आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने के पश्चात् चार बराबर भागों में बाँटा जाता है। प्रथम चतुर्थक Q_1, एक आवृत्ति वितरण को इस प्रकार से विभाजित करता है कि वितरण के एक चौथाई (25%) का मूल्य Q_1 से कम तथा तीन चौथाई (75%) का मूल्य Q_1 से अधिक होता है। दूसरी चतुर्थक, Q_2 एक आवृत्ति वितरण को इस प्रकार विभाजित किया जाता है कि इसके ऊपर एवं नीचे समान संख्या में अवलोकन होते हैं। यह माध्यिका के बराबर होती है अत: इसे माध्यिका भी कहते हैं। तीसरे चतुर्थक Q_3 एक आवृत्ति वितरण को इस प्रकार से विभाजित करता है कि तीन चौथाई (75%) अवलोकनों का मान Q_3 उसे कम तथा एक चौथाई (25%) का मान Q_3 से अधिक होता है।

चतुर्थक की गणना
(Calculation of Quartiles)

चतुर्थक की गणना के लिए अग्रलिखित विधियाँ प्रयुक्त की जाती हैं—

1. व्यक्तिगत श्रेणी में चतुर्थक की गणना (Calculation of Quartiles in Individual Series)

श्रेणी को सर्वप्रथम आरोही या अवरोही क्रम में करने के पश्चात् इसकी कुल अवलोकन या संख्या (N) मानने के पश्चात्

$$\text{प्रथम चतुर्थांश } Q_1 = \frac{N+1}{4} \text{ वाँ पद}$$

$$\text{द्वितीय चतुर्थांश } Q_2 = \frac{2(N+1)}{4} \text{ वाँ पद}$$

$$\text{तृतीयक चतुर्थांश } Q_3 = \frac{3(N+1)}{4} \text{ वाँ पद}$$

उदाहरण—निम्नलिखित आँकड़ों से चतुर्थक ज्ञात कीजिए—

प्राप्तांक 06, 30, 37, 18, 14, 42, 34, 11, 09, 26, 22, 03, 28, 52, 48

हल—श्रेणी को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने के पश्चात् हमें प्राप्त है—

क्र०सं०	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
प्राप्तांक	03	06	09	11	14	18	22	26	28	30	34	37	42	48	52

अवलोकनों की कुल संख्या $N = 15$

$$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right) \text{वाँ पद} = \left(\frac{15+1}{4}\right) \text{वाँ पद} = 4\text{वाँ पद} = 11;$$

$$Q_2 = \left[\frac{2(N+1)}{4}\right] \text{वाँ पद} = \left[\frac{2(15+1)}{4}\right] \text{वाँ पद} = 8\text{वाँ पद} = 26$$

$$Q_3 = \left[\frac{3(N+1)}{4}\right] \text{वाँ पद} = \left[\frac{3(15+1)}{4}\right] \text{वाँ पद} = 12\text{वाँ पद} = 37$$

2. खण्डित श्रेणी में चतुर्थक की गणना (Calculation of Quartiles in Discrete Series)

खण्डित शृंखला में चतुर्थक की गणना में निम्नलिखित चरण शामिल होते हैं—

1. परिणाम को आरोही या अवरोही क्रम में आँकड़ों को व्यवस्थित कीजिए (यदि व्यवस्थित नहीं है तो)।
2. से कम प्रकार संचयी आवृत्तियों को ज्ञात कीजिए।
3. निम्न सूत्र का प्रयोग करके चतुर्थक की गणना कीजिए।

$$Q_1 = \frac{N+1}{4} \text{ वाँ पद;}$$

$$Q_2 = \left[\frac{2(N+1)}{4}\right] \text{ वाँ पद}$$

$$Q_3 = \left[\frac{3(N+1)}{4}\right] \text{ वाँ पद}$$

उदाहरण—निम्नलिखित आँकड़ों से चतुर्थक ज्ञात कीजिए।

X	3	5	8	12	18	21	26
f	6	11	24	21	16	13	9

हल—

चर (X)	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्ति (c.f.)
3	6	6
5	11	17
8	24	41
12	21	62
18	16	78
21	13	91
26	9	100
Total	$N = 100$	—

$$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right) \text{वाँ पद} = \left(\frac{100+1}{4}\right) \text{वाँ पद} = 25.25 \text{वाँ पद}$$

$$= 25 \text{वाँ पद} + 0.25\,(26 \text{वाँ पद} - 25 \text{वाँ पद}) = 8 + 0.25\,(8-8) = 8$$

$$Q_2 = \left[\frac{2\,(N+1)}{4}\right] \text{वाँ पद} = 50.50 \text{वाँ पद} = 50 \text{वाँ पद} + 0.5\,(51 \text{वाँ पद} - 50 \text{वाँ पद})$$

$$= 12 + 0.5\,(12-12) = 12$$

$$Q_3 = \left[\frac{3\,(N+1)}{4}\right] \text{वाँ पद} = 75.75 \text{वाँ पद} = 75 \text{वाँ पद} + 0.75\,(76 \text{वाँ पद} - 75 \text{वाँ पद})$$

$$= 18 + 0.75\,(18-18) = 18$$

3. सतत् श्रेणी/समूहीकृत श्रेणी में चतुर्थक की गणना (Calculation of Quartile in Continuous/Grouped Series)

एक समूहीकृत आवृत्ति वितरण के संदर्भ में चतुर्थक गणना की प्रक्रिया में निम्नलिखित चरण शामिल होते हैं—

1. आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए।
2. से कम प्रकार संचयी आवृत्तियों को प्राप्त करना।
3. अपवर्जी श्रेणी को 'समावेशी श्रेणी' में परिवर्तित कीजिए।
4. चतुर्थक ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग कीजिए—

$$Q_K = L_1 + \frac{\frac{KN}{4} - C}{f}\,(L_2 - L_1)$$

यहाँ, $L_2 - L_1 = K$वें चतुर्थक का वर्ग—

$N =$ कुल आवृत्ति $f = K$वें चतुर्थक वर्ग की आवृत्ति, $C = K$वे चतुर्थक वर्ग से पहले के वर्ग की संचयी आवृत्ति

स्पष्ट है कि,

$$Q_1 = L_1 + \frac{\frac{N}{4} - c}{f} \times i$$

$$Q_2 = L_1 + \frac{\frac{2N}{4} - c}{f} \times i$$

$$Q_3 = L_1 + \frac{\frac{3N}{4} - c}{f} \times i$$

यहाँ L_1, c, f, i के मान संगत चतुर्थक वर्ग के आधार पर लिए जाते हैं।

उदाहरण—निम्नलिखित से चतुर्थक की गणना कीजिए—

आयु (वर्षों में)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
व्यक्तियों की संख्या	3	8	20	12	7

हल—चतुर्थक की गणना निम्न प्रकार की जाती है—

आयु	व्यक्तियों की संख्या (f)	संचयी आवृत्ति
0–10	3	3
10–20	8	11
20–30	20	31
30–40	12	43
40–50	7	50
योग	$N = 50$	—

$$Q_1 = \left(\frac{N}{4}\right) \text{वाँ पद} = \left(\frac{50}{4}\right) \text{वाँ पद}$$

= 12.5वाँ पद, जो वर्ग अन्तराल 20-30 में आता है।

अत: $L_1 = 20, L_2 = 30, f = 20, c = 11, i = (L_2 - L_1) = (30 - 20) = 10$

$$\Rightarrow \qquad Q_1 = L_1 = \frac{\frac{N}{4} - c}{f} \times i$$

$$= 20 + \frac{12.5 - 11}{20} \times 10 = 20.75$$

$$Q_2 = \left(\frac{2N}{4}\right) \text{वाँ पद} = \left(\frac{2 \times 50}{4}\right) \text{वाँ पद}$$

= 25वाँ पद, जो वर्ग अन्तराल 20-30 में आता है।

अत: $L_1 = 20, L_2 = 30, f = 20, c = 11, i = (L_2 - L_1) = (30 - 20) = 10$

$$\Rightarrow \qquad Q_2 = L_1 + \frac{\frac{2N}{4} - c}{f} \times i$$

$$= 20 + \frac{25 - 11}{20} \times 10 = 27$$

$$Q_3 = \left(\frac{3N}{4}\right) \text{वाँ पद} = \left(\frac{3 \times 50}{4}\right) \text{वाँ पद}$$

= 37.5वाँ पद, जो वर्ग अन्तराल 30-40 में आता है।

अत: $L_1 = 30, L_2 = 40, f = 12, c = 31, i = (L_2 - L_1) = (40 - 30) = 10$

$$\Rightarrow \qquad Q_3 = L_1 + \frac{\frac{3N}{4} - c}{f} \times i$$

$$= 30 + \frac{37.5 - 31}{12} \times 10 = 35.42$$

प्र.11. माध्य विचलन की गणना करने की विधियाँ उदाहरण सहित समझाइए।

उत्तर

माध्य विचलन की गणना करने की विधियाँ
(Methods of Calculation of Mean Deviation)

माध्य विचलन की गणना करने की निम्नलिखित तीन विधियाँ हैं—

1. व्यक्तिगत श्रेणी में माध्य विचलन की गणना (Calculation of Mean Deviation in Individual Series)

व्यक्तिगत श्रेणी में माध्य विचलन की गणना में निम्नलिखित चरण शामिल हैं—

1. सर्वप्रथम उस माध्य माध्यिका, बहुलक का निश्चय करते हैं जिसकी सहायता से माध्य विचलन की गणना करनी है।
2. धनात्मक (+) एवं ऋणात्मक (–) संकेतों की अनदेशी करते हुए औसत से मदों के विचलन को ज्ञात किया जाता है। परिणामी विचलन को $|dx|$ द्वारा निरूपित किया जाता है।
3. विचलनों के सभी पदों का योग किया जाता है। इसको $\Sigma|dx|$ से निरूपित किया जाता है।
4. अन्तत: विचलनों के योग से पदों की संख्या को विभाजित किया जाता है।
5. **सांकेतिक**—माध्य विचलन $= \frac{\Sigma|d_x|}{N}$

यहाँ, $|d_x|$ = माध्य से विचलन (या माध्यिका) ± चिह्नों को अनदेशी करना। N = पदों की संख्या।

उदाहरण—निम्नलिखित आँकड़े 6 परिवारों के मासिक व्यय को प्रदर्शित करते हैं। माध्यिका तथा माध्य से माध्य विचलन की गणना ज्ञात कीजिए।

व्यय (₹ में)	4,260	4,980	8,460	5,240	4,780	6,480

हल—सर्वप्रथम दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर,

व्यय (₹ में)	4,260	4,780	4,980	5,240	6,480	8,460

यहाँ, $N = 6$ जो एक सम संख्या है, अत:

$$\text{माध्यिका} = \frac{\left(\frac{N}{2}\right)\text{वाँ मान} + \left(\frac{N}{2} + 1\right)\text{वाँ मान}}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{6}{2}\right)\text{वाँ मान} + \left(\frac{6}{2} + 1\right)\text{वाँ मान}}{2}$$

$$= \frac{3\text{वाँ मान} + 4\text{वाँ मान}}{2} = \frac{4980 + 5240}{2} = 5110$$

$$\overline{X} = \frac{4260 + 4780 + 4980 + 5240 + 6480 + 8460}{6}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{34200}{6} = 5,700$$

माध्य के सम्बन्ध में

क्र०सं०	X (₹)	समान्तर माध्य से विचलन (± चिह्न छोड़ते हुए) $\lvert d_x \rvert$
1	4260	1440
2	4780	920
3	4980	720
4	5240	460
5	6480	780
6	8460	2760
Total	$\Sigma X = 34200$	$\Sigma\lvert d_x \rvert = 7080$

माध्यिका के सम्बन्ध में

क्र०सं०	X (₹)	माध्यिका से विचलन (± चिह्न छोड़ते हुए) $\lvert d_x \rvert$
1	4260	850
2	4780	330
3	4980	130
4	5240	130
5	6480	1370
6	8460	3350
Total	$\Sigma X = 34200$	$\Sigma\lvert d_x \rvert = 6160$

माध्य विचलन (माध्य के सम्बन्ध में) $= \frac{\Sigma\lvert d_x \rvert}{N} = \frac{7080}{6} = 1180$

माध्य विचलन (माध्यिका के सम्बन्ध में) $= \frac{\Sigma\lvert d_x \rvert}{N} = \frac{6160}{6} = 1026.67$

2. खण्डित श्रेणी में माध्य विचलन की गणना (Calculation of Mean Deviation in Discrete Series)

खण्डित श्रेणी में माध्य विचलन की गणना निम्नलिखित चरण शामिल हैं—

1. सर्वप्रथम माध्य, माध्यिका या बहुलक जैसे औसत की गणना की जाती है।
2. केन्द्रीय प्रवृत्ति से माप के विचलन की गणना करते हैं। इसमें धनात्मक और ऋणात्मक संकेतों को अनदेखा कर दिया जाता है। इसे $\lvert d_x \rvert$ से निरूपित किया जाता है।
3. प्राप्त विचलन को सम्बन्धित आवृत्ति (f) से गुणा किया जाता है। प्राप्त कुल विचलनों को $f\lvert d_x \rvert$ से निरूपित किया जाता है।
4. आखिरी चरण में, गुणनफलों के योग ($\Sigma f\lvert d_x \rvert$) में पदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त परिणाम माध्य विचलन होता है।
5. **सांकेतिक**— M.D. $= \frac{\Sigma f\lvert d_x \rvert}{\Sigma f}$

यहाँ, $\lvert d_x \rvert$ = माध्य से विचलन (या माध्यिका) ± चिह्नों को अनदेखा कर दिया जाता है।

N = कुल आवृत्ति

उदाहरण—निम्नलिखित आँकड़ों से माध्य विचलन की गणना कीजिए—

माँग मात्राएँ (इकाइयों में)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
आवृत्ति	7	13	16	6	14	19	28	17	21	9

हल—माध्य विचलन की गणना निम्न प्रकार से की जाती है—

माँग मात्राएँ (X)	आवृत्ति (f)	fX	$\lvert d_x \rvert = (X - \bar{X})$ (± चिह्न छोड़ते हुए)	$f\lvert d_x \rvert$
10	7	70	50	350
20	13	260	40	520

30	16	480	30	480
40	6	240	20	120
50	14	700	10	140
60	19	1140	0	0
70	28	1960	10	280
80	17	1360	20	340
90	21	1890	30	630
100	9	900	40	360
Total	$\Sigma f = 150$	$\Sigma fX = 9000$		$\Sigma f\|d_x\| = 3220$

$$\text{अंकगणितीय माध्य } (\overline{X}) = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{9000}{150} = 60$$

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{\Sigma f\,|d_x|}{\Sigma f} = \frac{3220}{150} = 21.5$$

3. सतत् श्रेणी में माध्य विचलन की गणना (Calculation of Mean Deviation in Continuous Series)

सतत् श्रेणी में माध्य विचलन की गणना निम्नलिखित चरणों में की जाती है—

1. सर्वप्रथम, वर्ग अंतराल के मध्यमान की गणना की जाती है।
2. इसके पश्चात् माध्यिका या समान्तर माध्य को ज्ञात किया जाता है।
3. तत्पश्चात् $|d_x|$ तथा $f\,|d_x|$ को ज्ञात करते हैं।
4. अंततः कुल योग $\Sigma f\,|d_x|$ को कुल आवृत्ति Σf से भाग देते हैं।

उदाहरण—निम्नलिखित आँकड़ों से माध्य से माध्य विचलन की गणना कीजिए।

विक्रय (हजारों में)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
दिनों की संख्या	5	6	8	15	17	7	9	3

हल—माध्य विचलन की गणना निम्न प्रकार है—

विक्रय	मध्यमान (X)	दिनों की संख्या (f)	fX	$\|d_X\| = \|X - \overline{X}\|$	$f\|d_X\|$
0-10	5	5	25	35	175
10-20	15	6	90	25	150
20-30	25	8	200	15	120
30-40	35	15	525	5	75
40-50	45	17	765	5	85
50-60	55	7	385	15	105
60-70	65	9	585	25	225
70-80	75	3	225	35	105
		$\Sigma f = 70$	$\Sigma fX = 2800$		$\Sigma f\ \|d_x\| = 1040$

$$\text{माध्य} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{2800}{70} = 40$$

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{\Sigma f |d_x|}{\Sigma f} = \frac{1040}{70} = 14.86$$

प्र.12. मानक विचलन गणना करने की विधियों का उदाहरण सहित वर्णन कीजिए।

उत्तर

मानक विचलन की गणना की विधियाँ
(Methods of Calculation of Standard Deviation)

मानक विचलन की गणना की विधियाँ निम्नलिखित हैं—

I. व्यक्तिगत श्रेणी में मानक विचलन की गणना
(Calculation of Standard Deviation in Individual Series)

व्यक्तिगत श्रेणी में मानक विचलन की गणना करने के लिए दो विधियों का प्रयोग किया जाता है—

1. **वास्तविक माध्य से विचलन ज्ञात करना**—यदि श्रेणी का समान्तर माध्य पूर्णांक में आता है तो इस विधि द्वारा मानक विचलन ज्ञात किया जाता है। इस विधि द्वारा मानक विचलन की गणना करने के लिए निम्नलिखित पद प्रयुक्त किए जाते हैं—
   (i) श्रेणी का वास्तविक समान्तर माध्य ज्ञात करते हैं।
   (ii) प्राप्त समान्तर माध्य से श्रेणी के विभिन्न मूल्यों का विचलन ($d = X - \bar{X}$) ज्ञात करते हैं।
   (iii) इन प्राप्त विचलनों का वर्ग (Σd^2) निकालकर उनका योगफल प्राप्त करते हैं।
   (iv) विचलनों के वर्गों (Σd^2) के योग में से पदों की संख्या को विभाजित करते हैं तथा भागफल का वर्गमूल मानक विचलन होता है। अतः निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग कीजिए—

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}} \text{ or } \sqrt{\frac{\Sigma (X - \bar{X})^2}{N}}$$

2. **लघु (कल्पित) विधि द्वारा मानक विचलन की गणना**—जब समान्तर माध्य पूर्णांक में नहीं होता है ऐसी स्थिति में, यह विधि अपनाई जाती है। तो ऐसी दशा में मानक विचलन की गणना कठिन एवं थकाऊ कार्य है। समय व श्रम बचाने के लिए, हम लघु विधि का प्रयोग करते हैं। विचलन एक कल्पित माध्य से लिया जाता है। इसके लिए निम्नलिखित चरण का प्रयोग किया जाता है—
   (i) समंकमाला के मूल्यों में से किसी मूल्य को कल्पित माध्य के रूप में मान लिया जाता है।
   (ii) इस कल्पित माध्य (A) से शृंखला के प्रत्येक मूल्य का विचलन निकालते हैं। अर्थात् ($X - A$) तथा इसे d_x द्वारा निरूपित किया जाता है।
   (iii) कल्पित माध्य से प्राप्त विचलन का योग करते हैं। अर्थात् (Σd_x) प्राप्त करते हैं।
   (iv) प्रत्येक विचलन का वर्ग करके (Σd_x^2) ज्ञात करते हैं।
   (v) निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके मानक विचलन ज्ञात करते हैं—

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d_x}{N}\right)^2}$$

जहाँ, σ = मानक विचलन, d_x = कल्पित माध्य से विचलन, d_x^2 = कल्पिक माध्य से प्राप्त विचलनों का वर्ग
N = पदों की संख्या, $\bar{X}$ = वास्तविक समान्तर माध्य, A = कल्पित समान्तर माध्य।

उदाहरण—निम्नलिखित आँकड़ों से मानक विचलन की गणना कीजिए।

(₹)	8	10	15	24	28

हल—माना कल्पित माध्य = 16 है।

(a) समान्तर माध्य द्वारा गणना

X	$x = (X - \bar{X})$	x^2
8	–9	81
10	–7	49
15	–2	4
24	7	49
28	11	121
$\Sigma X = 85$		$\Sigma x^2 = 304$

(b) कल्पित माध्य द्वारा गणना

X	$d_x = (X - A)$	d_x^2
8	–8	64
10	–6	36
15	–1	1
24	8	64
28	12	144
	5	$\Sigma d_x^2 = 309$

(a) अंकगणितीय माध्य से,

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{85}{5} = 17 \quad \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}} \text{ or } \frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{N}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} \times 304} = \sqrt{60.8} = 7.8$$

(b) कल्पित माध्य से,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d_x}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{309}{5} - \left(\frac{5}{5}\right)^2} = \sqrt{61.8 - (1)^2} = \sqrt{60.8} = 7.8$$

यदि वास्तविक माध्य भिन्न में आता है तो अधिक जटिल गणना से बचने के लिए कल्पित माध्य लिया जाता है।

II. खण्डित श्रेणी में मानक विचलन की गणना (असमूहीकृत आँकड़े)

[Calculation of Standard Deviation in Discrete Series (Ungrouped Data)]

खण्डित श्रेणी में मानक विचलन की गणना के लिए तीन विधियों का प्रयोग किया जाता है—

1. **वास्तविक माध्य विधि**—इसमें निम्नलिखित चरण शामिल हैं—
   (i) श्रेणी के माध्य की गणना कीजिए।
   (ii) प्राप्त माध्य से विचलन की गणना कीजिए। अर्थात् $[d_x = (X - \bar{X})]$
   (iii) विचलन का वर्ग कीजिए इस प्राप्त विचलन को सम्बन्धित आवृत्ति से गुणा कीजिए। अब हमें प्राप्त होता है fd_x^2.
   (iv) कुल गुणनफल के योग (Σfdx^2) प्राप्त करने के पश्चात् निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd_x^2}{\Sigma f}}$$

उदाहरण—निम्नलिखित आँकड़ों की सहायता से मानक विचलन ज्ञात कीजिए—

आयु वर्षों में	15	25	35	45	55	65
व्यक्तियों की संख्या	7	25	20	16	11	6

हल—वास्तविक माध्य विधि द्वारा मानक विचलन की गणना निम्न प्रकार है—

आयु (X)	**व्यक्तियों की संख्या** (f)	fX	$d_x = (X - \bar{X})$	fd_x^2
15	7	105	–22	3388
25	25	625	–12	3600

35	20	700	–2	80
45	16	720	8	1024
55	11	605	18	3564
65	6	390	28	4704
	$\Sigma f = 85$	$\Sigma fX = 3145$		$\Sigma fd_x^2 = 16360$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{3145}{85} = 37$$

$$\text{मानक विचलन } (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma f(d_x)^2}{\Sigma f}} = \sqrt{\frac{16360}{85}} = \sqrt{192.5} = 13.87$$

2. **कल्पित माध्य विधि**—जिस प्रकार व्यक्तिगत श्रेणी में लघु विधि का प्रयोग किया जाता है, उसी प्रकार खण्डित श्रेणी में भी इस सूत्र का प्रयोग किया जाता है। इस विधि में वास्तविक माध्य से विचलन नहीं ज्ञात किया जाता है अपितु कल्पित माध्य द्वारा ज्ञात किया जाता है। इसमें निम्नलिखित चरण शामिल हैं—
   (i) शृंखला के किसी भी एक पद को एक औसत मान लें और इस औसत को कल्पित माध्य कहा जाता है, जिसे A द्वारा निरूपित किया जाता है।
   (ii) ज्ञात माध्य से विचलन ज्ञात कीजिए, अर्थात् $(X - A)$ तथा इसे dx द्वारा निरूपित किया जाता है।
   (iii) इन विचलन को सम्बन्धित आवृत्तियों द्वारा गुणा करें और Σfd_x प्राप्त करें।
   (iv) विचलन $(dx)^2$ का वर्ग करें।
   (v) सम्बन्धित आवृत्तियों f द्वारा वर्ग विचलन $(dx)^2$ को गुणा करें और Σfdx^2 प्राप्त कीजिए।
   (vi) निम्नलिखित सूत्र में मानों को प्रतिस्थापित करें—

$$\Sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd_x^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd_x}{\Sigma f}\right)^2} \quad \text{जहाँ } d_x = X - A$$

उदाहरण—निम्नलिखित श्रेणी की सहायता से मानक विचलन की गणना कीजिए—

X	10	11	12	13	14	कुल
f	4	16	22	14	6	**62**

हल—माना, कल्पित माध्य $(A) = 12.$
इस विधि द्वारा मानक विचलन की गणना निम्न प्रकार है—

X	f	$d_x = (X - A)$	d_x^2	fd_x	fd_x^2
10	4	–2	4	–8	16
11	16	–1	1	–16	16
12	22	0	0	0	0
13	14	1	1	14	14
14	6	2	4	12	24
Total	$\Sigma f = 62$			$\Sigma fd_x = 2$	$\Sigma fd_x^2 = 70$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f\,(d_x)^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd_x}{\Sigma f}\right)^2} = \sqrt{\frac{70}{62} - \left(\frac{2}{62}\right)^2} = \sqrt{1.13 - 0.001} = 1.06$$

3. **पद विचलन विधि**—इस विधि में श्रेणी के सभी पदों के बीच एक उभयनिष्ठ गुणक को लिया जाता है। इस विधि में गणना करना सरल तथा आसान हो जाता है। इसके लिए सूत्र निम्न प्रकार है—

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2_x}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd'_x}{\Sigma f}\right)^2} \times i$$

जहाँ, $d'_x = \dfrac{X - A}{i}$, i = उभयनिष्ठ गुणक।

उदाहरण—निम्नलिखित आँकड़ों की सहायता से मानक विचलन की गणना कीजिए।

X	4.5	14.5	24.5	34.5	44.5	54.5	64.5
f	5	3	7	18	14	9	4

हल—माना, कल्पित माध्य $(A) = 34.5$

इस विधि द्वारा मानक विचलन की गणना निम्न प्रकार है—

X	f	$d_x = (X - A)$	$d_x = \left(\frac{d_x}{10}\right)$	fd'_x	$f(d'_x)^2$
4.5	5	– 30	– 3	– 15	45
14.5	3	– 20	– 2	– 6	12
24.5	7	– 10	– 1	– 7	7
34.5	18	0	0	0	0
44.5	14	10	1	14	14
54.5	9	20	2	18	36
64.5	4	30	3	12	36
	$\Sigma f = 60$			$\Sigma fd'_x = 16$	$\Sigma f(d'_x)^2 = 150$

$$\sigma = \sqrt{\left\{\frac{\Sigma f(d'_x)^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd'_x}{\Sigma f}\right)^2\right\}} \times i = \sqrt{\frac{150}{60} - \left(\frac{16}{60}\right)^2} \times 10 = 1.56 \times 10 = 15.6$$

III. सतत् श्रेणी में मानक विचलन की गणना (समूहीकृत आँकड़े)

[Calculation of Standard Deviation in Continuous Series (Grouped Data)]

सतत् श्रेणी में मानक विचलन ज्ञात करने की लगभग वही विधि है जो कि खण्डित आवृत्ति (समूहीकृत) श्रेणी में प्रयोग की जाती है। अन्तर सिर्फ इस बात का है कि सतत् श्रेणी में गणना के लिए मध्य बिन्दु ज्ञात कर लिए जाते हैं। चरण विचलन विधि का व्यापक रूप से प्रयोग किया जाता है। इसमें निम्नलिखित चरण शामिल होते हैं—

1. प्रत्येक वर्ग के मध्य बिन्दु को ज्ञात किया जाता है।
2. इन मध्य बिन्दुओं में से एक का कल्पित माध्य के रूप में चयन किया जाता है। इसे A से निरूपित किया जाता है।
3. कल्पित औसत A से प्रत्येक मध्य मूल्य का विचलन ज्ञात करते हैं तथा इस विचलन को dx द्वारा निरूपित किया जाता है।
4. यदि वर्गान्तर समान होते हैं तो सामान्य कारक का चयन किया जाता है। प्रत्येक विचलन को इस संख्या से विभाजित किया जाता है तथा प्राप्त भागफल को d'_x से निरूपित किया जाता है।
5. d'_x को सम्बन्धित आवृत्ति (f) से गुणा करके प्राप्त गुणनफल $\Sigma fd'_x$ का योग ज्ञात करते हैं।
6. इस प्रकार प्राप्त योगफल का वर्ग (d_x^2) किया जाता है।
7. वर्ग विचलन (d_x^2) को सम्बन्धित आवृत्ति से गुणा किया जाता है फिर Σfd_x^2 प्राप्त किया जाता है।

8. मानक विचलन प्राप्त करने के लिए निम्न सूत्र में मानों को रखते हैं,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2_x}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd'_x}{\Sigma f}\right)^2} \times i$$

जहाँ $d'_x = \frac{X - A}{i}$ तथा i = उभयनिष्ठ गुणक।

उदाहरण—निम्नलिखित आँकड़ों की सहायता से मानक विचलन की गणना कीजिए—

ऊँचाई (इंच)	44-46	46-48	48-50	50-52	52-54	कुल
बच्चों की संख्या	5	25	28	22	5	85

हल—माना, कल्पित माध्य $A = 49$.

ऊँचाई (इंच)	मध्यमान (X)	बच्चों की संख्या (f)	$d_x = X - 49$	$d'_x = d_x/2$	fd'_x	fd'^2_x
44-46	45	5	– 4	– 2	– 10	20
46-48	47	25	– 2	– 1	– 25	25
48-50	49	28	0	0	0	0
50-52	51	22	2	1	22	22
52-54	53	5	4	2	10	20
योग		$\Sigma f = 85$			$\Sigma fd'_x = -3$	$\Sigma fd'^2_x = 87$

$$\sigma = \sqrt{\left\{\frac{\Sigma f(d'_x)^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma d'_x}{\Sigma f}\right)^2\right\}} \times i = \sqrt{\frac{87}{85} - \left(\frac{-3}{85}\right)^2} \times 2 = 1.01 \times 2 = 2.02$$

❑

UNIT-III

सह-सम्बन्ध

खण्ड-अ अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. प्रत्यक्ष सम्बन्ध से आप क्या समझते हैं?

उत्तर दोनों सम्बद्ध श्रेणियों में कार्य-कारण सम्बन्ध हो सकता है, जैसे—मुद्रा की मात्रा व मूल्य स्तर के बीच धनात्मक सहसम्बन्ध होने से यह तो माना जा सकता है कि कीमतों में अधिकांश परिवर्तन मुद्रा की पूर्ति में परिवर्तन के कारण ही होते हैं।

प्र.2. धनात्मक (+) तथा ऋणात्मक (–) सहसम्बन्ध को समझाइए।

उत्तर यदि दो पदमालाओं का परिवर्तन एक ही दिशा में होता है तो उनके सहसम्बन्ध को **प्रत्यक्ष** (direct), **अनुलोम** अथवा **धनात्मक** (positive) सहसम्बन्ध कहते हैं। उदाहरणार्थ—यदि किसी वस्तु की मांग में वृद्धि के साथ-साथ उस वस्तु के मूल्य में भी वृद्धि होती है तो उनके बीच के सम्बन्ध को प्रत्यक्ष, अनुलोम या धनात्मक सहसम्बन्ध कहेंगे। प्राय: मांग एवं मूल्य में धनात्मक सम्बन्ध होता है। इसके विपरीत, यदि दो पदमालाओं में परिवर्तन एक ही दिशा में न होकर विपरीत दिशाओं में होते हैं तो उन दो मालाओं के सहसम्बन्ध को **प्रतीप** (Inverse), **अप्रत्यक्ष, विलोम** या **ऋणात्मक** (Indirect or Negative) कहते हैं। उदाहरणार्थ—यह देखा जाता है कि पूर्ति की वृद्धि के साथ-साथ मूल्य घटता जाता है इसलिए पूर्ति व मूल्य में ऋणात्मक सहसम्बन्ध है।

प्र.3. सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए जब $\Sigma dxdy = 434, \Sigma dx = 08, \Sigma dy = 15, \Sigma dx^2 = 200, \Sigma dy^2 = 1500, N = 08.$

उत्तर सहसम्बन्ध गुणांक $n(r) = \dfrac{N\,\Sigma d_x d_y - \Sigma d_x \Sigma d_y}{\sqrt{\{N\Sigma d_x^2 - (\Sigma d_x)^2\} \times \{N\,\Sigma d_y^2 - (\Sigma d_y)^2\}}}$

$$= \frac{8 \times 434 - 8 \times 15}{\sqrt{8 \times 200 - (8)^2} \times \sqrt{8 \times 1500 - (15)^2}}$$

$$= \frac{3352}{\sqrt{18086400}} = \frac{3352}{4252.81}, r = 0.788$$

प्र.4. रेखीय और अरेखीय या वक्ररेखीय सहसम्बन्ध को बताइए।

उत्तर जब दो चरों में परिवर्तन का अनुपात स्थायी रूप में समान होता है अर्थात् जब दो चरों (variables) में विचरण का अनुपात सदैव एक-सा हो, तो इस प्रकार के सहसम्बन्ध को **रेखीय** कहते हैं। इस प्रकार का सहसम्बन्ध भौतिक तथा गणितीय विज्ञानों में पाया जाता है; सामाजिक तथा आर्थिक क्षेत्रों में यह सम्भव नहीं होता है। उदाहरणस्वरूप—यदि किसी कारखाने में मजदूरों की संख्या को दोगुना कर देने पर उत्पादन भी दोगुना हो जाये तो इसे रेखीय सहसम्बन्ध कहेंगे। इसके विपरीत, जब परिवर्तन का अनुपात स्थायी रूप से समान नहीं रहता तब सहसम्बन्ध को **अरेखीय** या **वक्ररेखीय** (Non-linear or Curvilinear) कहते हैं। जैसे—विज्ञापन व्यय और बिक्री में सामान्यत: वक्ररेखीय सहसम्बन्ध होगा, क्योंकि बहुत कम सम्भावना है कि दोनों चरों के परिवर्तन के अनुपात में स्थायित्व होगा।

प्र.5. X एवं Y दो चरों के मध्य कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक 0.75 है। उनका सह-विचरण +21 है। यदि X का विचरण 16 है तो Y का मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल
$$r = \frac{Cov\,(X \cdot Y)}{\sqrt{Var\,(X)\,Var\,(Y)}}$$

यहाँ $Cov\,(X, Y) = +\,21, r = 0.75, Var = (X) = 16.$

अत:
$$0.75 = \frac{21}{\sqrt{16}\,\sqrt{Var\,(Y)}}$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{Var\,(Y)} = \frac{21}{4 \times 0.75} = \frac{21}{3} = 7$$

$$\Rightarrow \qquad \text{S.D.}\,(Y) = \sqrt{Var\,(Y)} = 7$$

प्र.6. दो चर X, Y के बीच सह-सम्बन्ध गुणांक 0.6 है। उनका सह-विचरण 18 है। X का विचरण 25 है। Y शृंखला का विचरण ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $r = 0.6, Cov.\,(X, Y) = 18$ and $Var.\,(X) = 25.$

$$r = \frac{Cov.\,(X, Y)}{\sqrt{Var.\,(X)}\,\sqrt{Var.\,(Y)}}$$

$$\Rightarrow \qquad 0.6 = \frac{18}{\sqrt{25}\,\sqrt{Var.\,(Y)}}$$

$$\Rightarrow \qquad 0.6 = \frac{18}{5\,\sqrt{Var.\,(Y)}} \Rightarrow 3 = \frac{18}{\sqrt{Var.\,(Y)}}$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{Var.\,(Y)} = \frac{18}{3} = 6 \qquad \Rightarrow Var.\,(Y) = 36$$

प्र.7. सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए, जब X और Y का सह-विचरण 488 तथा X का विचरण 824 है और Y का विचरण 325 है।

हल विचरण गुणांक $(r) = \dfrac{Cov.\,(X, Y)}{\sqrt{Var.\,(X)}\,\sqrt{Var.\,(Y)}} = \dfrac{488}{\sqrt{824 \times 325}} = 0.943$

प्र.8. सरल, बहुगुणी एवं आंशिक सहसम्बन्ध से आप क्या समझते हैं?

उत्तर दो चल-मूल्यों के बीच में पाये जाने वाले सहसम्बन्ध को **सरल सहसम्बन्ध** (Simple Correlation) कहते हैं। इन दो चल-मूल्यों में से एक कारण या स्वतन्त्र श्रेणी (Subject Series) और दूसरा परिणाम या आश्रित श्रेणी (Dependent Series) कहलाता है। **बहुगुणी सहम्बन्ध** (Multiple Correlation) तब होता है जब दो या दो से अधिक स्वतन्त्र चल-मूल्य होते हैं और आश्रित चल-मूल्य केवल एक होता है। इन सभी स्वतन्त्र चल-मूल्यों का आश्रित चल-मूल्यों पर सम्मिलित प्रभाव पड़ता है। आंशिक सहसम्बन्ध तब होता है जब दो से अधिक चल-मूल्यों का अध्ययन तो किया जाता है परन्तु अन्य चल-मूल्यों के प्रभाव को स्थिर रखकर केवल दो चल-मूल्यों में सहसम्बन्ध निकाला जाता है। उदाहरण के लिए—यदि वर्षा और खाद दोनों के गेहूँ की उपज पर सामूहिक प्रभाव का गणितीय अध्ययन किया जाये तो वह बहुगुणी सहसम्बन्ध कहलायेगा। इसके विपरीत, यदि एक स्थिर वर्षा की मात्रा में खाद की मात्रा व गेहूँ की उपज के सम्बन्ध का विवेचन किया जाये तो वह **आंशिक सहसम्बन्ध** कहलायेगा।

प्र.9. सह-सम्बन्ध ज्ञात करने की रीतियाँ लिखिए।

उत्तर दो या दो से अधिक श्रेणियों में सहसम्बन्ध ज्ञात करने की निम्नलिखित रीतियाँ हैं—

1. बिन्दुरेखीय विधि (The Graphic Method);
2. विक्षेप बिन्दु (Scatter Diagram or Dot Diagram or Dotogram);
3. सहसम्बन्ध सारणी (Correlation Table);
4. कार्ल पियर्सन की विधि (Karl Person's Method);

5. संगामी विचलन विधि (Concurrent Deviation Method);
6. स्पीयरमैन की श्रेणी-अन्तर विधि (Spearman's Ranking Method);
7. न्यूनतम वर्ग रीति (Method of Least Squares)।

प्र.10. सौंदर्य प्रतियोगिता में दो न्यायाधीशों ने प्रविष्टियों पर टिप्पणी कीजिए–

X	1	2	3	4	5
Y	5	4	3	2	1

न्यायाधीशों के निर्णय के मध्य क्या परिणाम प्राप्त हुआ?

हल कोटि सहसम्बन्ध गुणांक की गणना निम्न प्रकार है—

(R_1)	(R_2)	$D = (R_1 - R_2)$	D^2
1	5	– 4	16
2	4	– 2	4
3	3	0	0
4	2	2	4
5	1	4	16
			$\Sigma D^2 = 40$

कोटि सहसम्बन्ध गुणांक $(R) = 1 - \dfrac{6\,\Sigma D^2}{N\,(N^2 - 1} = 1 - \dfrac{6 \times 40}{5\,(5^2 - 1)} = 1 - \dfrac{240}{5\,(25 - 1)}$

$$= 1 - \frac{240}{120} = 1 - 2 = -1$$

न्यायधीशों के निर्णय के मध्य पूरी तरह से ऋणात्मक सह-सम्बन्ध है।

प्र.11. सांख्यिकी एवं लेखांकन में कुछ छात्रों द्वारा प्राप्त अंकों के बीच कोटि सह-सम्बन्ध गुणांक 0.8 है। यदि कोटि अन्तर का वर्ग का योग 33 है, तो छात्रों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल कोटि सहसम्बन्ध गुणांक $(R) = 1 - \dfrac{6\,\Sigma D^2}{N\,(N^2 - 1)}$

$\Rightarrow \quad 0.8 = 1 - \dfrac{6 \times 33}{N\,(N^2 - 1)} = \dfrac{198}{N\,(N^2 - 1)} = 1 - 0.8$

$\Rightarrow \quad \dfrac{198}{N\,(N^2 - 1)} = 0.2 \Rightarrow N\,(N^2 - 1) = 990$

$\Rightarrow \quad N\,(N + 1)\,(N - 1) = 990 \qquad [\because a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)]$

$\Rightarrow \quad (N - 1) \times N \times (N + 1) = 9 \times 10 \times 11 \quad \Rightarrow \quad N = 10$

प्र.12. पियर्सन सह-सम्बन्ध गुणांक की विशेषताएँ लिखिए।

उत्तर पियर्सन सह-सम्बन्ध गुणांक की मुख्य विशेषताएँ निम्नलिखित हैं—

1. **सहसम्बन्ध गुणांक की सीमा**—कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक का मान $\pm$ 1 के बीच ही होता है किसी भी दशा में यह $\pm$ 1 से अधिक नहीं हो सकता।
   अर्थात् $\quad r \not> 1 \quad$ या $\quad r \leq 1$
2. **प्रतीपगमन गुणांकों का गुणोत्तर माध्य**—दो श्रेणियों के बीच सहसम्बन्ध गुणांक, उन दोनों श्रेणियों के सरल प्रतीपगमन गुणांकों का गुणोत्तर माध्य होता है
   अर्थात् $\quad r = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}}$
   b_{xy} तथा b_{yx} क्रमशः X तथा Y श्रेणियों के प्रतीपगमन गुणांक हैं।

3. **मूलबिन्दु और पैमाने में परिवर्तन का प्रभाव नहीं**—कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक X तथा Y श्रेणी के मूलबिन्दु और पैमाने में परिवर्तन से स्वतन्त्र होता है, अर्थात यदि X तथा Y श्रेणी के मूलबिन्दु और पैमाने में परिवर्तन कर दिया जाए तो यह गुणांक अप्रभावित रहता है।
4. **विशुद्ध अंक**—सहसम्बन्ध गुणांक (r) एक विशुद्ध अंक है जिसके फलस्वरूप यह दो युग्म समंकों के बीच सहसम्बन्ध की व्याख्या को सहज बना देता है चाहे उनके माप की इकाइयां भिन्न ही क्यों न हों।

प्र.13. स्पीयरमैन रीति की विशेषताएँ लिखिए।

उत्तर सहसम्बन्ध गुणांक निकालने की स्पियरमैन रीति की निम्न प्रमुख विशेषताएँ हैं—

1. **सरल**—यह रीति गणना और समझने की दृष्टि से कार्ल पियर्सन सहसम्बन्ध गुणांक की रीति से बहुत सरल है।
2. **केवल क्रम-मान पर्याप्त**—यदि पदों के वास्तविक मान न मालूम हों पर उनका क्रम पता हो, तो सहसम्बन्ध गुणांक निकाला जा सकता है।
3. **अनियमित सामग्री के होने पर उपयुक्त**—यह रीति वहाँ के लिए उपयुक्त है जहाँ सामग्री अनियमित हो।
4. **जहाँ पदों का मूल्य पूर्ण शुद्ध न हो**—यह रीति वहाँ के लिए उपयुक्त है जहाँ पदों का मूल्य अनुमानतः शुद्ध हो क्योंकि यहाँ तो केवल क्रम की आवश्यकता होती है। मात्रा की शुद्धता की अपेक्षा क्रम की शुद्धता अधिक आवश्यक है।
5. **व्यक्तिगत अध्ययन में उपयुक्त**—यह वहाँ के लिए अधिक उपयुक्त है जहाँ व्यक्तिगत अध्ययनों में सहसम्बन्ध ज्ञात करना है। इसमें पद-मूल्यों के निरपेक्ष मान का उतना महत्त्व नहीं है जितना उनके सापेक्ष या तुलनात्मक मानों का है।
6. **संख्याएं बहुत अधिक नहीं**—यह रीति वहाँ सरलता व सफलतापूर्वक अपनायी जा सकती है जहाँ पदों की अधिक-से-अधिक संख्या लगभग 25 या 30 हो। पदों की संख्या बहुत अधिक होने पर इसका प्रयोग कठिन हो जाता है।

प्र.14. सहसम्बन्ध विश्लेषण के महत्त्व को समझाइए।

उत्तर **सहसम्बन्ध विश्लेषण का महत्त्व**—सहसम्बन्ध विश्लेषण का प्रयोग उन समस्त क्षेत्रों (आर्थिक, सामाजिक, व्यावसायिक, आदि) में किया जाता है जहाँ दो या अधिक चरों के मध्य कारण-परिणाम सम्बन्ध पाया जाता है परन्तु अर्थशास्त्र में इस तकनीक का विशेष महत्त्व है। मूल्य तथा मांग, उत्पादन तथा रोजगार, मजदूरी तथा मूल्य सूचकांक, विनियोजित पूँजी एवं अर्जित लाभ तथा अन्य ऐसे ही तथ्यों में निकट का सम्बन्ध पाया जाता है। अर्थशास्त्र में सहसम्बन्ध के उपयोग के बारे में **नीसवैंगर** (Neiswanger) लिखते हैं, "सहसम्बन्ध विश्लेषण आर्थिक व्यवहार को समझने में योग देता है, विशेष महत्त्वपूर्ण चरों जिन पर अन्य चर निर्भर करते हैं, को खोजने में सहायता देता है। अर्थशास्त्री उन सम्बन्धों को स्पष्ट करता है जिनसे गड़बड़ी फैलती है तथा उसे उन उपायों के सुझाव देता है जिनके द्वारा स्थिरता लाने वाली शक्तियाँ प्रभावी हो सकती हैं।"

खण्ड-ब लघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए–

मूल्य	50	55	48	54	60	56	58	59
आपूर्ति	90	110	75	100	120	110	115	120

हल मूल्य एवं आपूर्ति के आँकड़ों के लिए सहसम्बन्ध गुणांक की गणना निम्न प्रकार है—

मूल्य (X)	आपूर्ति (Y)	$x = X - \bar{X}$	$y = Y - \bar{Y}$	x^2	y^2	xy
50	90	– 5	– 15	25	225	75
55	110	0	5	0	25	0
48	75	– 7	– 30	49	900	210
54	100	– 1	– 5	1	25	5
60	120	5	15	25	225	75

56	110	1	5	1	25	5
58	115	3	10	9	100	30
59	120	4	15	16	225	60
$\Sigma X = 440$	$\Sigma Y = 840$			$\Sigma x^2 + 126$	$\Sigma y^2 = 1750$	$\Sigma xy = 460$

$$\overline{X}\ \frac{\Sigma x}{N} = \frac{440}{8} = 55, \overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{840}{8} = 105$$

$$\text{सहसम्बन्ध गुणांक } (r) = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\ \Sigma y^2}} = \frac{460}{\sqrt{126 \times 1750}} = \frac{460}{469.57} = 0.9796$$

प्र.2. नीचे दिए गए आँकड़ों से कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए तथा इसकी व्याख्या कीजिए।

मूल्य	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
आपूर्ति	30	29	29	25	24	24	24	21	18	25

हल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक की गणना निम्न प्रकार है—

मूल्य (X)	आपूर्ति (Y)	$x = X - \overline{X}$	x^2	$y = (Y - \overline{Y})$	y^2	xy
11	30	– 4.5	20.25	5.1	26.01	– 22.95
12	29	– 3.5	12.25	4.1	16.81	– 14.35
13	29	– 2.5	6.25	4.1	16.81	– 10.25
14	25	– 1.5	2.25	0.1	0.01	– 0.15
15	24	– 0.5	0.25	– 0.9	0.81	0.45
16	24	0.5	0.25	– 0.9	0.81	– 0.45
17	24	1.5	2.25	– 0.9	0.81	– 1.35
18	21	2.5	6.25	– 3.9	15.21	– 9.75
19	18	3.5	12.25	– 6.9	47.61	– 24.15
20	25	4.5	20.25	0.1	0.01	0.45
$\Sigma X = 155$	$\Sigma Y = 249$		$\Sigma x^2 = 82.5$		$\Sigma y^2 = 124.9$	$\Sigma xy = - 82.5$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{155}{10} = 15.5;$$

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{249}{10} = 24.9$$

$$\text{सहसम्बन्ध गुणांक } (r) = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \times \Sigma y^2}} = \frac{-82.5}{\sqrt{82.5 \times 124.9}} = \frac{-82.5}{\sqrt{10304.25}}$$

$$= \frac{-82.5}{101.51} = -0.81$$

प्र.3. निम्न आँकड़ों से कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए। श्रेणी X के लिए 125 तथा श्रेणी Y के लिए 190 कल्पित माध्य मानिए।

श्रेणी X	112	114	108	124	145	150	190	125	147	150
श्रेणी Y	200	190	214	187	170	170	210	190	180	180

हल माना कल्पित माध्य

$A_x = 125, A_y = 190, d_x = X - A_x, d_y = X - A_y, N = 10,$

X	Y	d_x	d_y	d_x^2	d_y^2	$d_x d_y$
112	200	–13	10	169	100	–130
114	190	–11	0	121	0	0
108	214	–17	24	289	576	–408
124	187	–1	–3	1	9	3
145	170	20	–20	400	400	–400
150	170	25	–20	625	400	–500
190	210	65	20	4225	400	1300
125	190	0	0	0	0	0
147	180	22	–10	484	100	–220
150	180	25	–10	625	100	–250
		$\Sigma d_x = 115$	$\Sigma d_y = -9$	$\Sigma d_x^2 = 6939$	$\Sigma d_y^2 = 2085$	$\Sigma d_x d_y = -605$

$$r = \frac{N\Sigma d_x d_y - \Sigma d_x \Sigma d_y}{\sqrt{\{N\Sigma d_x^2 - (\Sigma d_x)^2\}\{N\Sigma d_y^2 - (\Sigma d_y)^2\}}}$$

$$= \frac{10(-605) - (115)(-9)}{\sqrt{\{10(6939) - (115)^2\}\{10(2085) - (-9)^2\}}}$$

$$= \frac{-5015}{34153.93} = -0.1468$$

अत: $r = -0.1468$

प्र.4. निम्नलिखित शृंखला के लिए कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए–

विक्रय (₹ लाखों में)	16	20	26	30	28	18	22	32
व्यय (₹ लाखों में)	36	42	48	52	50	38	44	50

हल माना X के लिए कल्पित माध्य 30 है तथा Y के लिए 40 है।

X	$d_x = (X - A_x)$	$d'_x = d_x/2$	$(d'_x)^2$	Y	$d_y = (Y - A_y)$	$d'_y = d_y/2$	$(d'_y)^2$	$d'_x d'_y$
16	–14	–7	49	36	–4	–2	4	14
20	–10	–5	25	42	2	1	1	–5
26	–4	–2	4	48			16	–8
30	0	0	0	52	12	6	36	0
28	–2	–1	1	50	10	5	25	–5
18	–12	–6	36	38	–2	–1	1	6
22	–8	–4	16	44	4	2	4	–8
32	2	1	1	50	10	5	25	5
		$\Sigma d'_x = -24$	$\Sigma d'^2_x = 132$			$\Sigma d'_y = 20$	$\Sigma d'^2_y = 112$	$\Sigma d'_x d'_y = -1$

$$r=\frac{\Sigma d'_x d'_y-\frac{\Sigma d'_x d'_y}{N}}{\sqrt{\Sigma (d'_x)^2-\frac{(\Sigma d'_x)^2}{N}}\sqrt{\Sigma (d'_y)^2-\frac{(\Sigma d'_y)^2}{N}}}=\frac{-1-\left(-\frac{1}{8}\right)}{\sqrt{132-\frac{(-24)^2}{8}}\sqrt{112-\frac{(20)^2}{8}}}$$

$$=\frac{\left(\frac{-8+1}{8}\right)}{\sqrt{132-72}\times\sqrt{112-50}}=\frac{\left(\frac{-7}{8}\right)}{\sqrt{60}\times\sqrt{62}}=\frac{-7}{8\times 61}=-0.014\times 2=0.028$$

प्र.5. निम्नलिखित आँकड़ों से छात्रों की आयु और उनकी खेल की आदतों के मध्य सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए।

आयु (वर्षों में)	15	16	17	18	19	20
विद्यार्थियों की संख्या	250	200	150	120	100	80
नियमित खिलाड़ी	200	150	90	48	30	12

हल चूँकि यहाँ, उम्र और खेल की आदतों के मध्य सम्बन्ध को ज्ञात करना है, इसलिए नियमित खिलाड़ियों के प्रतिशत की गणना करना आवश्यक है जो इस प्रकार है—

विद्यार्थियों की संख्या	नियमित खिलाड़ी	नियमित खिलाड़ियों का प्रतिशत
250	200	$\frac{200}{250}\times 100=80$
200	150	$\frac{150}{200}\times 100=75$
150	90	$\frac{90}{150}\times 100=60$
120	48	$\frac{48}{120}\times 100=40$
100	30	$\frac{30}{100}\times 100=30$
80	12	$\frac{12}{80}\times 100=15$

माना X के लिए कल्पित माध्य $=17$ तथा Y के लिए कल्पित माध्य $=40$ है।

X आयु	Y (नियमित खिलाड़ियों का प्रतिशत)	$d_x=(X-17)$	$d_y=(Y-40)$	d_x^2	d_y^2	$d_x d_y$
15	80	−2	40	4	1600	−80
16	75	−1	35	1	1225	−35
17	60	0	20	0	400	0
18	40	1	0	1	0	0
19	30	2	−10	4	100	−20
20	15	3	−25	9	625	−75
योग		$d_x=3$	$d_y=60$	$\Sigma d_x^2=19$	$\Sigma d_y^2=3950$	$\Sigma d_x d_y=-210$

$$r = \frac{N\Sigma d_x d_y - \Sigma d_x \Sigma d_y}{\sqrt{\{N\Sigma d_x^2 - (\Sigma d_x)^2\} \times \{N\Sigma d_y^2 - (\Sigma d_y)^2\}}}$$

$$= \frac{6(-210) - 3 \times 60}{\sqrt{6 \times 19 - (3)^2} \times \sqrt{6 \times 3950 - (60)^2}} = -0.99$$

X एवं Y चर पूर्ण या ऋणात्मक सहसम्बन्ध है।

प्र.6. एक शोधकर्त्ता यह निर्धारित करना चाहता है कि, किसी व्यक्ति की आयु प्रति सप्ताह वह कितने घण्टे व्यायाम करता है, एक नमूने से प्राप्त आँकड़ा दिया गया है। कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक के आधार पर अपनी राय बताइए–

आयु	16	24	38	46	54	62
घण्टे	11	7	5	4	2	1

हल कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक की गणना निम्न प्रकार है—

आयु (X)	घण्टे (Y)	X^2	Y^2	XY
16	11	256	121	176
24	7	576	49	168
38	5	1444	25	190
46	4	2116	16	184
54	2	2916	4	108
62	1	3844	1	62
$\Sigma X = 240$	$\Sigma Y = 30$	$\Sigma X^2 = 11152$	$\Sigma Y^2 = 216$	$\Sigma XY = 888$

$$\text{सहसम्बन्ध गुणांक } (r) = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}\sqrt{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}}$$

$$= \frac{6 \times 888 - (240)(30)}{\sqrt{6 \times 11152 - (240)^2}\sqrt{6 \times 216 - (30)^2}}$$

$$= \frac{-1872}{\sqrt{9312} \times \sqrt{396}} = \frac{-1872}{1920.3} = -0.975$$

इसलिए, आयु और प्रति सप्ताह व्यायाम के घण्टों की संख्या के बीच एक ऋणात्मक सह-सम्बन्ध है।

प्र.7. निम्नलिखित आँकड़ों से कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए–

X/Y	0-20	20-40	40-60
10-25	10	5	3
25-40	4	40	8
40-55	6	9	15

हल $d_x = \dfrac{m.p_x - 30}{20}, d_y = \dfrac{m.p_y - 32.5}{15}$

Y \ X	$m.p_x$		0-20	20-40	40-60				
			10	30	50				
	$m.p_y$	d_y \ d_x	–1	0	1	f	fd_y	fdy^2	fd_xd_y
10–25	17.5	–1	10(fd_xd_y) 10	0 5	–3 3	18	–18	18	7
25–40	32.5	0	0 4	0 40	0 8	52	0	0	0
40–55	47.5	1	–6 6	0 9	15 15	30	30	30	9
		f	20	54	26	$\Sigma f = 100$	$\Sigma fd_y = 12$	$\Sigma fd_y^2 = 48$	$\Sigma fd_xd_y = 16$
		fd_x	–20	0	26	$\Sigma fd_x = 6$			
		fd_x^2	20	9	26	$\Sigma fd_x^2 = 46$			
		fd_xd_y	4	0	12	$\Sigma fd_xd_y = 16$			

$$b_{xy} = \frac{\Sigma fd_xd_y - \frac{(\Sigma fd_x)(\Sigma fd_y)}{N}}{\Sigma fd_y^2 - \frac{(\Sigma fd_y)^2}{N}} \times \frac{i_x}{i_y} = \frac{16 - \frac{6 \times 12}{100}}{48 - \frac{(12)^2}{100}} \times \frac{20}{15}$$

$$= \frac{(16 - 0.72)}{(48 - 1.44)} \times \frac{4}{3} = \frac{61.12}{139.68} = 0.438$$

$$b_{yx} = \frac{\Sigma fd_xd_y - \frac{(\Sigma fd_x)(\Sigma fd_y)}{N}}{\Sigma fd_x^2 - \frac{(\Sigma fd_x)^2}{N}} \times \frac{i_y}{i_x} = \frac{16 - \frac{6 \times 12}{100}}{46 - \frac{(6)^2}{100}} \times \frac{15}{20}$$

$$= \frac{(16 - 0.72)}{(46 - 0.36)} \times \frac{3}{4} = \frac{45.84}{182.56} = 0.251$$

$$r = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}} = \sqrt{0.438 \times 0.251} = \sqrt{0.1099} = 0.331 \text{ (लगभग)}$$

प्र.8. एक निश्चित शहर में 100 स्कूल शिक्षकों की आय और बचत के बारे में एक सर्वेक्षण से निम्नलिखित आँकड़ा प्रदान किया गया है।

आय (₹ में)	बचत (₹ में)				कुल
	50	100	150	200	
400	8	4	–	–	12
600	–	12	24	6	42
800	–	9	7	2	18
1000	–	–	10	5	15
1200	–	–	9	4	13
कुल	**8**	**25**	**50**	**17**	**100**

सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए (r)।

हल सहसम्बन्ध गुणांक की गणना निम्न प्रकार है—

		बचत							
आय		50	100	150	200				
		$dy-1$	0	1	2	f	fdx	fdx^2	$fdxdy$
400	dx −2	$16(fd_xd_y)$ 8	4 0			12	−24	48	16
600	−1		0 12	−24 24	−12 6	42	−42	42	−36
800	0		0 9	0 7	0 2	18	0	0	0
1000	1			10 10	10 5	15	15	15	20
1200	2			18 9	16 4	13	26	52	34
f		8	25	50	17	$N=100$	$\Sigma fdx=-25$	$\Sigma fdx^2=157$	$\Sigma fdxdy=34$
fdy		−8	0	50	34	$\Sigma fdy=76$			
fdy^2		8	0	50	68	$\Sigma fdy^2=126$			
$fdxdy$		16	0	4	14	$\Sigma fdxdy=34$			

$$r=\frac{\Sigma fxdy-\dfrac{(\Sigma fdx)\,(\Sigma fdy)}{N}}{\sqrt{\Sigma fdx^2-\dfrac{(fdx)^2}{N}}\sqrt{\dfrac{(\Sigma fdy)^2}{N^2}}}$$

$\Sigma fdxdy=34, \Sigma fdx=-25, \Sigma fdy=76, \Sigma fdx^2=157, \Sigma fdy^2=126, N=100$

$$r=\frac{34-\dfrac{(-25)\times 76}{100}}{\sqrt{\left\{157-\dfrac{(-25)^2}{100}\right\}\times\left\{126-\dfrac{(76)^2}{100}\right\}}}=0.523$$

प्र.9. सौंदर्य प्रतियोगिता में 10 लड़कियों को निम्नलिखित क्रम में 3 न्यायधीशों द्वारा स्थान प्रदान किया गया है–

जज A	3	8	2	4	7	9	5	10	6	1
जज B	6	10	1	4	8	7	3	9	5	2
जज C	5	7	2	3	9	10	6	1	8	4

स्पीयरमैन के सह-सम्बन्ध गुणांक का उपयोग करते हुए, यह ज्ञात कीजिए कि किस जोड़ी के न्यायधीशों के पास सौंदर्य में उभयनिष्ठ रुचि के लिए निकटतम दृष्टिकोण है?

हल कोटि सहसम्बन्ध की गणना निम्न प्रकार है—

R_1	R_2	R_3	$D_1=(R_1-R_2)^2$	$D_2=(R_2-R_3)^2$	$D_3=(R_1-R_3)^2$
3	6	5	9	1	4
8	10	7	4	9	1
2	1	2	1	1	0
4	4	3	0	1	1
7	8	9	1	1	4
9	7	10	4	9	1
5	3	6	4	9	1
10	9	1	1	64	81
6	5	8	1	9	4
1	2	4	1	4	9
$N=10$			**26**	**108**	**106**

कोटि सहसम्बन्ध को R द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। $R=1-\frac{6\Sigma D^2}{N^3-N}$

जज A एवं B के मध्य कोटि सहसम्बन्ध

$$=1-\frac{6\Sigma D_1}{N^3-N}=1-\frac{6\times 26}{10^3-10}=1-\frac{156}{990}=\frac{990-156}{990}=0.842$$

जज B एवं C के मध्य कोटि सहसम्बन्ध

$$=1-\frac{6\Sigma D_2}{N^3-N}=1-\frac{6\times 108}{10^3-10}=1-\frac{648}{990}=\frac{990-648}{990}=0.345$$

जज A एवं C के मध्य कोटि सहसम्बन्ध

$$=1-\frac{6\Sigma D_3}{N^3-N}=1-\frac{6\times 106}{10^3-10}=1-\frac{636}{990}=\frac{990-636}{990}=0.357$$

चूँकि न्यायधीश A और न्यायधीश B के निर्णयों में गुणांक अधिकतम है, इसलिए उनके पास सौंदर्य में उभयनिष्ठ रुचि के लिए निकटतम दृष्टिकोण है।

प्र.10. निम्नलिखित आँकड़ों से कोटि सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए–

X	115	109	112	87	98	98	120	100	98	118
Y	75	73	85	70	76	65	82	73	68	80

हल कोटि सहसम्बन्ध गुणांक की गणना निम्न प्रकार की जाती है—

X	कोटि (R_1)	Y	कोटि (R_2)	$D=(R_1-R_2)$	D^2
115	3	75	5	–2	4
109	5	73	6.5	–1.5	2.25
112	4	85	1	3	9
87	10	70	8	2	4
98	8	76	4	4	16

98	8	65	10	–2	4
120	1	82	2	–1	1
100	6	73	6.5	–0.5	0.25
98	8	68	9	–1	1
118	2	80	3	–1	1
					ΣD^2 42.5

कोटि सहसम्बन्ध गुणांक, $R = 1 - \dfrac{6\left(\Sigma D^2 + \frac{1}{12}(m_1^3 - m_1) + \frac{1}{12}(m_2^3 - m_2)\ldots\right)}{N^3 - N}$

$$= R = 1 - \frac{6\left(\Sigma 42.5 + \frac{1}{12}(3^3 - 3) + \frac{1}{12}(2^3 - 2)\ldots.\right)}{10^3 - 10} = 0.724 \text{ लगभग}$$

प्र.11. 9 विद्यार्थियों द्वारा विषय A एवं B में प्राप्त अंक निम्नलिखित हैं। स्पीयरमैन के श्रेणी सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए–

A में अंक	35	23	47	17	10	43	9	6	28
B में अंक	30	33	45	23	8	49	12	4	31

हल स्पीयरमैन के श्रेणी सहसम्बन्ध गुणांक की गणना निम्न प्रकार की जाती है—

x	y	x में श्रेणी, R_1	y में श्रेणी, R_2	$D = R_1 - R_2$	D^2
35	30	3	5	–2	4
23	33	5	3	2	4
47	45	1	2	–1	1
17	23	6	6	0	0
10	8	7	8	–1	1
43	49	2	1	1	1
9	12	8	7	1	1
6	4	9	9	0	0
28	31	4	4	0	0
$N = 9$					$\Sigma D^2 = 12$

$$r = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 12}{9(81-1)} = 1 - \frac{72}{720} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 0.9$$

r का उच्च मान बहुत उच्च सम्बन्ध को इंगित करता है। इसका अर्थ यह है कि जो छात्र A में अच्छे हैं, वे B में भी अच्छे हैं तथा जो B में अच्छे हैं, वे A में भी अच्छे हैं।

प्र.12. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए साधारण सह-सम्बन्ध (r) का मान 0.636 है–

X	0.05	0.14	0.24	0.30	0.47	0.52	0.57	0.61	0.67	0.72
Y	1.08	1.15	1.27	1.33	1.41	1.46	1.54	2.72	4.01	9.63

इन आँकड़ों के लिए स्पीयरमैन की कोटि सह-सम्बन्ध गुणांक P की गणना कीजिए।

हल स्पीयरमैन के कोटि सहसम्बन्ध गुणांक की गणना निम्न प्रकार है—

X	कोटि (R_1)	Y	कोटि (R_2)	$D = (R_1 - R_2)$	D^2
0.5	1	1.08	1	0	0
0.14	2	1.15	2	0	0
0.24	3	1.27	3	0	0
0.30	4	1.33	4	0	0
0.47	5	1.41	5	0	0
0.52	6	1.46	6	0	0
0.57	7	1.54	7	0	0
0.61	8	2.72	8	0	0
0.67	9	4.01	9	0	0
0.72	10	9.63	10	0	0
					$\Sigma D^2 = 0$

$$\text{कोटि सहसम्बन्ध गुणांक } (R) = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 0}{10(100-1)} = 1$$

प्र.13. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए कोटि सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए–

पूँजी (₹ लाखों में)	66	55	46	33	22	18	11	8	7	11
लाभ (₹ लाखों में)	58	43	36	27	15	9	12	15	6	14

हल कोटि सहसम्बन्ध की गणना निम्न प्रकार है—

पूँजी (X)	लाभ (Y)	कोटि (R_1)	कोटि (R_2)	$D = R_1 - R_2$	D^2
66	58	10	10	0	0
55	43	9	9	0	0
46	36	8	8	0	0
33	27	7	7	0	0
22	15	6	5.5	0.5	0.25
18	9	5	2	3	9
11	12	3.5	3	0.5	0.25
8	15	2	5.5	–3.5	12.25
7	6	1	1	0	0
11	14	3.5	4	–0.5	0.25
$N = 10$					$\Sigma D^2 = 22$

यहाँ, संख्या 11 श्रेणी X में दो बार तथा संख्या 15 श्रेणी Y में दो बार आई है। अत: X में $m_1 = 2$ तथा Y में $m_2 = 2$.

$$\therefore \quad R = 1 - \frac{6\left[\Sigma D^2 + \frac{1}{12}(m_1^3 - m_1) + \frac{1}{12}(m_2^3 - m_2)\right]}{N^3 - N}$$

$$= 1 - \frac{6\left[22 + \frac{1}{12}(2^3 - 2) + \frac{1}{12}(2^3 - 2)\right]}{10^3 - 10}$$

$$= 1 - \frac{6\left[22 + \frac{1}{12}(6) + \frac{1}{12}(6)\right]}{1000 - 10}$$

$$= 1 - \frac{6\left[22 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\right]}{990} = 1 - \frac{6(23)}{990}$$

$$= 1 - \frac{138}{990} = \frac{990 - 138}{990} = \frac{852}{990} = 0.86$$

प्र.14. निम्नलिखित आँकड़ों से r_k की गणना कीजिए–

X	75	73	72	72	63	62	55	50
Y	62	58	67	45	81	60	67	48

हल कोटि सहसम्बन्ध की गणना निम्न प्रकार है—

X	कोटि (R_1)	Y	कोटि (R_2)	$D = (R_1 - R_2)$	D^2
75	1	62	4	– 3	9
73	2	58	6	– 4	16
72	3.5	67	2.5	1	1
72	3.5	45	8	– 4.5	20.25
63	5	81	1	4	16
62	6	60	5	1	1
55	7	67	2.5	4.5	20.25
50	8	48	7	1	1
					$\Sigma D^2 = 84.5$

शृंखला X में 72 दो $(m_1 = 2)$ बार है, अर्थात् तीसरी तथा चौथी कोटि। इसलिए दो मानों की औसत कोटि अर्थात् $\left(\frac{3+4}{2}\right)$वीं = 3.5वीं कोटि, जबकि शृंखला Y में 67 की कोटि तीसरी तथा दूसरी है।
इसलिए दोनों की औसत कोटि $= \left(\frac{2+3}{2}\right)$वीं = 2.5वीं कोटि।

$$\text{कोटि सह-सम्बन्ध गुणांक } (r_k) = 1 - \frac{6\left[\Sigma D^2 + \frac{m_1^3 - m_1}{12} + \frac{m_2^3 - m_2}{12}\right]}{N(N^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6\left[84.5 + \frac{2^3 - 2}{12} + \frac{2^3 - 2}{12}\right]}{8(8^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6\,[84.5 + 0.5 + 0.5]}{8(8^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6\,[85.5]}{504} = 1 - \frac{513}{504} = 1 - 1.0178 = -0.0178$$

खण्ड-स विस्तृत उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. 'सह-सम्बन्ध' को परिभाषित कीजिए तथा इसके प्रकारों को भी समझाइए।

उत्तर

सहसम्बन्ध का अर्थ एवं परिभाषाएँ
(Meaning and Definitions of Correlation)

दो चरों के मध्य रैखिक संबंध के अध्ययन को सह-संबंध के रूप में जाना जाता है। यदि दो चर हैं तथा एक चर के मूल्य में परिवर्तन से दूसरे चर के मूल्य में परिवर्तन होता है तो यह कहा जाता है कि दोनों चर परस्पर सम्बन्धित होते हैं। सहसम्बन्ध एक सांख्यिकीय उपकरण है जिसका प्रयोग चर के दो समूहों के मध्य सम्बन्धों को मापने एवं प्रत्येक को सटीक विधि से व्यक्त करने के लिए किया जाता है।

क्रोक्स्टन एवं काउडन के अनुसार, "मात्रात्मक प्रकृति के सम्बन्ध को ज्ञात करने तथा मापने तथा इसे संक्षिप्त सूत्र में व्यक्त करने के लिए उपयुक्त सांख्यिकीय उपकरण सहसम्बन्ध के रूप में जाना जाता है।"

ए० एम० टटल के अनुसार, "दो या दो से अधिक चर के सह संयोजक विश्लेषण को सामान्यत: सहसम्बन्ध कहा जाता है।"

सह-सम्बन्ध के प्रकार
(Types of Correlation)

सहसम्बन्ध का वर्गीकरण विभिन्न आधारों पर किया जाता है जैसे चर के परिवर्तन की दिशा, चर के मध्य परिवर्तन के अनुपात की स्थिरता आदि। सह-सम्बन्ध को निम्न प्रकार में बाँटा गया है—

I. धनात्मक एवं ऋणात्मक सहसम्बन्ध
(Positive and Negative Correlation)

चर के परिवर्तन की दिशा के आधार पर, सहसम्बन्ध धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है।

1. **धनात्मक सह-सम्बन्ध**—जब दोनों चरों में परिवर्तन एक ही दिशा में हो तो उन चरों के मध्य सह-सम्बन्ध, धनात्मक सह-सम्बन्ध कहलाता है। उदाहरण के लिए, किसी फर्म की बिक्री एवं व्यय के मध्य सम्बन्ध (तालिका) में दिया गया है—

फर्म	1	2	3	4	5	6
विक्रय (₹ में)	50	60	70	80	90	100
व्यय (₹ में)	11	15	19	23	27	31

2. **ऋणात्मक सह-सम्बन्ध**—जब दोनों चरों में परिवर्तन एक-दूसरे के विपरीत दिशा में हो तो उन चरों के मध्य सह-सम्बन्ध, ऋणात्मक सह-सम्बन्ध कहलाता है। **उदाहरण के लिए**—फसल के उत्पादन और मूल्य के मध्य सम्बन्ध निम्नांकित तालिका में दिया गया है—

उत्पादन (किग्रा में)	100	200	300	400	500	600	700	800
मूल्य (प्रति किग्रा)	10	9	8	7	6	5	4	3

II. रैखिक तथा गैर-रैखिक या वक्रीय सह-सम्बन्ध
(Linear and Currilinear Correlation)

चर के मध्य परिवर्तन के अनुपात की स्थिरता के आधार पर, सहसम्बन्ध रेखीय या आरेखीय हो सकता है।

1. **रैखिक सह-सम्बन्ध**—इस प्रकार का सह-सम्बन्ध दोनों चरों के मध्य परिवर्तन के एक निश्चित अनुपात पर आधारित होता है। जब ये चर एक ग्राफ पर आरेखित किए जाते हैं, तो आरेखित किए गए बिंदु एक सीधी रेखा पर आ जाते हैं। उदाहरण के लिए—तालिका में दिखाए गए निम्न सम्बन्ध पर विचार करते हैं—

सरसों (किग्रा)	10	20	30	40	50	60	70	80
तेल (किग्रा)	3	6	9	12	15	18	21	24

2. **गैर-रैखिक या वक्रीय सह-सम्बन्ध**—इस प्रकार का सह-सम्बन्ध दोनों चरों के मध्य परिवर्तन के अनुपात पर आधारित रहता है। यदि चरों के मध्य परिवर्तन का अनुपात असमान या अस्थिर हो तो यह सह-सम्बन्ध आरेखीय या वक्रीय कहलाता है। जब ये चर एक ग्राफ पर आरेखित किए जाते हैं, तो आरेखित किए गए बिंदु एक वक्र पर नीचे की ओर गिरेंगे। तालिका में दिखाए गए सम्बन्ध पर विचार करते हैं—

फर्टिलाइजर का प्रयोग (किग्रा में)	1	2	3	4	5
चावल का उत्पादन (किग्रा में)	4	6	9	17	28

III. सरल, आंशिक एवं बहुगुणी सह-सम्बन्ध (Simple, Partial and Multiple Correlation)

अध्ययन किए गए चर की संख्या के आधार पर इसे तीन प्रकार में वर्गीकृत किया जा सकता है—

1. **सरल सह-सम्बन्ध**—जब दो चरों के मध्य रेखीय सम्बन्ध पाया जाता है इस सहसम्बन्ध को सरल सहसम्बन्ध कहते हैं।
   उदाहरण के लिए—बिक्री एवं आय एवं व्यय आदि के मध्य सम्बन्ध के रूप में जाना जाता है।
2. **आंशिक सह-सम्बन्ध**—इस सहसम्बन्ध की स्थिति तब उत्पन्न होती है जब दो से अधिक चर मूल्यों का अध्ययन किया जाता है परन्तु अन्य चल मूल्यों के प्रभाव को निश्चित करके दो मूल्यों का सहसम्बन्ध निकाला जाता है।
   उदाहरण के लिए—दो चर ऊँचाई एवं भार पर विचार कीजिए जो कि आंशिक रूप से सहसम्बद्ध हैं क्योंकि तीसरा चर 'आयु' ऊँचाई एवं भार पर अपना प्रभाव डालता है। इस स्थिति में, यदि हम उम्र के प्रभाव की उपेक्षा करते हैं यदि ऊँचाई एवं वजन के मध्य सम्बन्ध का अध्ययन करते हैं तो इस सहसम्बन्ध को आंशिक सहसम्बन्ध के रूप में जाना जाता है।
3. **बहुगुणी सह-सम्बन्ध**—इसे एक चर पर कई चर के प्रभाव के माप के रूप में परिभाषित किया जाता है। उदाहरण के लिए, यह हम गेहूँ के उत्पादन पर वर्षा एवं तापमान के सम्बन्ध को ज्ञात करने की कोशिश करते हैं, तो इसे बहुसम्बन्ध के रूप में जाना जाता है।

प्र.2. सह-सम्बन्ध गुणांक से आप क्या समझते हैं? सहसम्बन्ध परिमाण तथा अनुप्रयोग को समझाइए।

उत्तर

सहसम्बन्ध गुणांक (Correlation Coefficient)

किसी माप की सीमा में किसी संख्या में एक संख्या के परिवर्तन होने से कितना प्रभावित होने की उम्मीद रहती है इसको सहसम्बन्ध गुणांक के रूप में जाना जाता है। **उदाहरण के लिए,** जब सूचकांक में परिवर्तन होता है तो किसी कम्पनी के अंश का मूल्य कितना प्रभावित होगा। यदि दो संख्याएँ पूर्णत: सम्बन्धित हैं तो इसका अर्थ है कि सहसम्बन्ध का मान +1 है।

यदि दो चर एक ही दिशा में बढ़ते हैं अर्थात् वे एक-दूसरे से पूर्णत: सम्बन्धित हैं तो सहसम्बन्ध गुणांक का मान –1 होता है। यदि एक चर बढ़ता है तथा दूसरा घटता है तो उनके मध्य ऋणात्मक सम्बन्ध होता है। यदि दो चरों के मध्य कोई सम्बन्ध नहीं है तो उनका सहसम्बन्ध गुणांक शून्य होगा।

जब संख्याएँ, सम्बन्धित होती हैं तथा गुणांक या तो 1 अथवा –1 होता है तथा दो संख्याओं के मध्य अन्य प्रभाव एवं सम्बन्ध निर्धारित नहीं होते हैं तो इसे गैर-शून्य सहसम्बन्ध गुणांक के रूप में जाना जाता है। यदि एक संख्या ज्ञात होती है तो दूसरी संख्या ज्ञात की जा सकती है, परन्तु अनिश्चितता के साथ। यदि सहसम्बन्ध गुणांक शून्य से अधिक होता है तो अनिश्चिता बढ़ जाती है। परन्तु यह सम्बन्ध तब उपयोगी नहीं होता है यदि सहसम्बन्ध गुणांक बहुत कम है।

सह-सम्बन्ध का परिमाण (Degree of Correlation)

सहसम्बन्ध के गुणांक के आधार पर सहसम्बन्ध का परिमाण निम्नानुसार निर्धारित किया जाता है—

1. **पूर्ण सह-सम्बन्ध**—जब दो विभिन्न चरों पर पदमालाओं का परिवर्तन एक ही दिशा तथा एक समान अनुपात में हो तो यह पूर्ण धनात्मक सह-सम्बन्ध कहलाता है। पूर्ण धनात्मक सह-सम्बन्ध गुणांक को कार्ल पियर्सन के अनुसार, +1 के रूप में प्रकट किया जाता है। इसके विपरीत जब दो चरों के परिवर्तन का अनुपात समान हो परन्तु दिशा विपरीत हो तो वहाँ पूर्ण ऋणात्मक सह-सम्बन्ध होता है। इसे –1 के रूप में प्रकट किया जाता है।

2. **सह-सम्बन्ध की अनुपस्थिति**—यदि दो चरों की दो श्रृंखलाओं के मध्य कोई संबंध नहीं है या एक चर में परिवर्तन से दूसरे चर में परिवर्तन नहीं होता है, तो इसका अर्थ है कि चरों के मध्य कोई संबंध नहीं है। इस मामले में, सह-संबंध का गुणांक शून्य है।
3. **सह-सम्बन्ध का सीमित परिणाम**—यदि दो चर पूर्ण चर से सहसम्बन्ध नहीं है या पूर्ण सहसम्बन्ध की अनुपस्थित होता है तो इसे सीमित सहसम्बन्ध के रूप में संदर्भित किया जाता है। यह धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है लेकिन इसकी सीमा ± होती है। उच्च परिणाम, मध्यम परिणाम तथा न्यूनतम इस प्रकार की सहसम्बन्ध की तीन श्रेणियाँ होती है। यदि सहसम्बन्ध गुणांक (द्वारा दर्शाया जाता है।) ± 0.75 से ± 1 के मध्य है तो इसे उच्च परिमाण सहसम्बन्ध के रूप में जाना जाता है। तथा जब r का मान ± 0.25 से ± 0.75 के मध्य होता इसे मध्यम परिणाम के रूप में जाना जाता है तथा जब सहसम्बन्ध का मान 0 एवं ± 0.25 के मध्य होता है तो इसे सहसम्बन्ध की न्यूनतम मान कहते हैं। (देखें सारणी)

सारणी : सहसम्बन्ध के माप

क्र० सं०	सह-सम्बन्ध परिमाण	धनात्मक सह-सम्बन्ध गुणांक का मान	ऋणात्मक सह-सम्बन्ध गुणांक का मान
1.	पूर्ण	+1	– 1
2.	सीमित		
	(i) उच्च	+ 0.75 से + 1	– 1 से – 0.75
	(ii) मध्य	+ 0.25 से + 0.75	– 0.75 से – 0.25
	(iii) निम्न	+ 0 से + 0.25	– 0.25 से 0
3.	सह-सम्बन्ध का अभाव	0	0

सह-सम्बन्ध के अनुप्रयोग (Applications of Correlation)

इसके प्रमुख अनुप्रयोग निम्नलिखित हैं—

1. दो या दो से अधिक चरों के मध्य सम्बन्ध की प्रकृति, दिशा तथा मात्रा सह-सम्बन्ध विश्लेषण के उपयोग द्वारा निर्धारित की जाती है।
2. इसका उपयोग एक चर के मूल्य में परिवर्तन का अनुमान लगाने के लिए किया जाता है जो दूसरे चर के मूल्य में परिवर्तन के कारण होता है।
3. कुछ विशिष्ट परिस्थितियों में, यह अनुसन्धानकर्त्ता को कुछ घटनाओं के व्यवहार को समझने में सहायता करता है। **उदाहरण के लिए**, किसी विशिष्ट क्षेत्र में वर्षा से सम्बन्धित कारकों का पता लगाया जा सकता है तथा यह निर्धारित किया जा सकता है कि ये कारक चावल के उत्पादन को किस प्रकार से प्रभावित करते हैं।
4. सह-सम्बन्ध विश्लेषण व्यापार शब्द को निर्णय लेने का मंच प्रदान करता है तथा निर्णय लेकर अनिश्चितता के कारण को कम करता है।
5. सह-सम्बन्ध विश्लेषण भविष्यवाणी करने में सहायक होता है।

प्र.3. कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक को विस्तार से समझाइए तथा इसकी सहायता से सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना भी समझाइए।

उत्तर

कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक (Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

दो चरों के मध्य रैखिक सम्बन्ध के परिणाम की गणना करने के लिए कार्ल पियर्सन (बॉयोमीट्रिक या सांख्यिकीविद) ने एक मात्रात्मक तकनीक प्रदान की थी। इस तकनीक को पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक (r) के रूप में जाना जाता है तथा इसका अभ्यास बड़े स्तर पर प्रयोग किया जाता है।

कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक के गुण—इसके प्रमुख गुण निम्नलिखित हैं—

1. सहसम्बन्ध का आदर्श माप है तथा चर का इकाइयों से स्वतंत्र है।

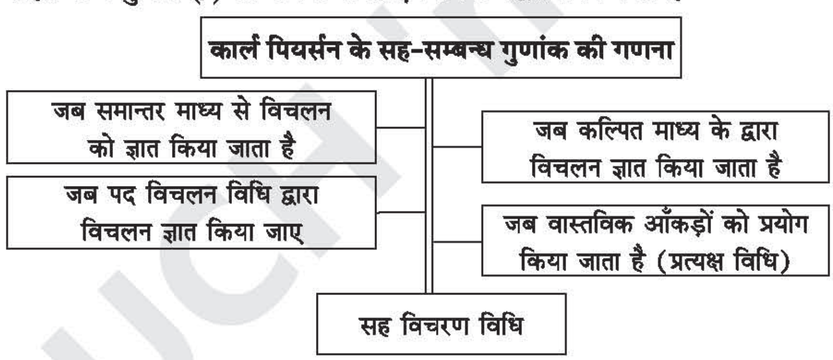
2. मूल एवं पैमाने के परिवर्तन से मुक्त होता है।
3. सभी अवलोकनों पर आधारित होता है।
4. सहसम्बन्ध का मान – 1 से +1 तक होता है।
   (i) जब $r = -1$ चर के मध्य पूर्ण ऋणात्मक सह सम्बन्ध दर्शाता है।
   (ii) $r = 0$ चरों के मध्य कोई सहसम्बन्ध नहीं होते हैं (अर्थात् अनुपस्थिति सहसम्बन्ध होता है।)
   (iii) $r = +1$ चरों के मध्य पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध दर्शाता है।

कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक के लाभ—कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक का मुख्य लाभ यह है कि यह परिणाम को एक मान में देता है तथा सह-सम्बन्ध एवं दिशा की मात्रा को भी सारांशित करता है।

कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक की हानियाँ—इसकी प्रमुख हानियाँ निम्नलिखित हैं—
1. प्रत्येक समय चरों के मध्य केवल रैखिक सम्बन्ध को मानता है।
2. सह-सम्बन्ध गुणांक (r) के मान की व्याख्या करना कठिन है।
3. सह-सम्बन्ध गुणांक (r) का महत्त्व चरम मूल्यों से प्रभावित होता है।
4. यह एक समय लेने वाली विधि है।
5. यह कारण एवं प्रभाव सम्बन्ध को व्यक्त नहीं करता है।

कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना
(Calculation of Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक (r) की गणना के लिए विभिन्न पद्धतियाँ निम्नवत हैं—



1. जब समान्तर माध्य से विचलन को ज्ञात किया जाता है—जब विचलन को अंकगणितीय माध्य से ज्ञात किया जाता है, तो r की गणना निम्न प्रकार की जाती है—

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2}\,\sqrt{\Sigma y^2}} \text{ or } \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \cdot \Sigma y^2}} \text{ or } \frac{\Sigma xy}{N\sigma_x \cdot \sigma_y} \text{ or } r = \frac{\Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sqrt{\Sigma(X-\bar{X})^2\ \Sigma(Y-\bar{Y})^2}}$$

जहाँ $x = X - \bar{X}$ (X श्रेणी का अंकगणितीय माध्य का विचलन)
$y = Y - \bar{Y}$ (Y श्रेणी का अंकगणितीय माध्य का विचलन
N = पदों की संख्या
$\sigma_x = x$ श्रेणी का मानक विचलन, $\sigma_y = y$ श्रेणी का मानक विचलन

उदाहरण—निम्नलिखित आँकड़ों की सहायता से कार्ल पियर्सन सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए—

X	42	52	55	60	66	68	65	60	58	34
Y	11	13	18	22	26	40	31	27	24	18

हल—कार्ल पियर्सन गुणांक की गणना निम्न प्रकार की जाती है—

X	Y	$x = (X - \bar{X})$	x^2	$y = (Y - \bar{Y})$	y^2	xy
42	11	– 14	196	– 12	144	168
52	13	– 4	16	– 10	100	40
55	18	– 1	1	– 5	25	5
60	22	4	16	– 1	1	– 4
66	26	10	100	3	9	30
68	40	12	144	17	289	204
65	31	9	81	8	64	72
60	27	4	16	4	16	16
58	24	2	4	1	1	2
34	18	– 22	484	– 5	25	110
$\Sigma X = 560$	**$\Sigma Y = 230$**		**$\Sigma x^2 = 1058$**		**$\Sigma y^2 = 674$**	**$\Sigma xy = 643$**

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{560}{10} = 56; \ \bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{230}{10} = 23$$

$$\text{सहसम्बन्ध गुणांक, } r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \times \Sigma y^2}} = \frac{643}{\sqrt{1058 \times 674}} = 0.76$$

2. जब कल्पित माध्य के द्वारा विचलन ज्ञात किया जाता है—जब विचलन को कल्पित माध्य से लिया जाता है तो r के मान का गणना करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$r = \frac{N \times \Sigma d_x d_y - \Sigma d_x \cdot \Sigma d_y}{\sqrt{N \cdot \Sigma d_x^2 = (\Sigma d_x)^2} \sqrt{N \cdot \Sigma d_y^2 - (\Sigma d_y)^2}}$$

यहाँ $d_x = X - A_x$ तथा $d_y = Y - A_y$, A = कल्पित माध्य

उदाहरण—निम्नलिखित आँकड़ों की सहायता से सह-सम्बन्ध के गुणांक की गणना कीजिए—

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	62	56	48	41	36	28	21	16	12	8

हल—माना कल्पित माध्य $X = 5$ है तथा Y का कल्पित माध्य 40 है।

X	Y	$d_x = (X - 5)$	$d_y = (Y - 40)$	d_x^2	d_y^2	$d_x d_y$
1	62	– 4	22	16	484	– 88
2	56	– 3	16	9	256	– 48
3	48	– 2	8	4	64	– 16
4	41	– 1	1	1	1	– 1
5	36	0	– 4	0	16	0
6	28	1	– 12	1	144	– 12
7	21	2	– 19	4	361	– 38
8	16	3	– 24	9	576	– 72
9	12	4	– 28	16	784	– 112
10	8	5	– 32	25	1024	– 160
योग		**$d_x = 5$**	**$d_y = -72$**	**$\Sigma d_x^2 = 85$**	**$\Sigma d_y^2 = 3710$**	**$\Sigma d_x d_y = -547$**

$$r = \frac{N\Sigma d_x d_y - \Sigma d_x \Sigma d_y}{\sqrt{\{N\Sigma d_x^2 - (\Sigma d_x)^2\} \times \{N\Sigma d_y^2 - (\Sigma d_y)^2\}}}$$

$$= \frac{10(-547) - 5(-72)}{\sqrt{10 \times 85 - (5)^2}\sqrt{10 \times 3710 - (-72)^2}} = -0.996$$

चर X एवं Y पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध है।

3. जब पद विचलन विधि द्वारा विचलन ज्ञात किया जाए—पद विचलन विधि से विचलन (r) ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$r = \frac{N \times \Sigma d'_x\, d'_y - \Sigma d'_x \cdot \Sigma d'_y}{\sqrt{N \cdot \Sigma d'^2_x - (\Sigma d'_x)^2}\sqrt{N \cdot \Sigma d_y^2 - (\Sigma d'_y)^2}};$$

जहाँ $d'_x = \frac{d_x}{i_x}, d'_y = \frac{d_y}{i_y}$

उदाहरण—निम्न आँकड़ों से ज्ञात कीजिए कि किसी परिवार के व्यय तथा बचत के बीच सह-सम्बन्ध है या नहीं—

व्यय (₹ में)	0	15	25	35	75
बचत (₹ में)	70	55	35	25	15

हल—माना कल्पित माध्य $X = 25$ तथा $Y = 45$ है।

X	$d_x = (X - 25)$	$d'_x = \frac{dx}{5}$	$(d'_x)^2$	Y	$d_y = (Y - 45)$	$d'_y = \frac{dy}{5}$	$(d'_y)^2$	$d'_x d'_y$
0	– 25	– 5	25	70	25	5	25	– 25
15	– 10	– 2	4	55	10	2	4	– 4
25	0	0	0	35	– 10	– 2	4	0
35	10	2	4	25	– 20	– 4	16	– 8
75	50	10	100	15	– 30	– 6	36	– 60
$N = 5$		$\Sigma d'_x = 5$	$\Sigma d'^2_x = 133$	$N = 5$		$\Sigma d'_y = -5$	$\Sigma d'^2_y = 85$	$\Sigma d'_x d'_y = -97$

$$r = \frac{\Sigma d'_x\, d'_y - \frac{\Sigma d'_x\, d'_y}{N}}{\sqrt{\Sigma d'^2_x - \frac{(\Sigma d'_x)^2}{N}}\sqrt{\Sigma (d'_y)^2 - \frac{(\Sigma d'_y)^2}{N}}}$$

$$= \frac{-97 - \left(-\frac{97}{5}\right)}{\sqrt{133 - \frac{25}{5}}\sqrt{85 - \frac{(-5)^2}{5}}} = \frac{-77.6}{\sqrt{128} \times \sqrt{80}}$$

$$= \frac{-77.6}{\sqrt{10240}} = \frac{-77.6}{101.2} = -0.767$$

4. जब वास्तविक आँकड़ों का प्रयोग किया जाता है (प्रत्यक्ष विधि द्वारा)—प्रत्यक्ष आँकड़ों की स्थिति में सहसम्बन्ध गुणांक के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$r = \frac{N\Sigma XY - \Sigma X \Sigma Y}{\sqrt{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}\sqrt{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}}$$

उदाहरण—निम्न आँकड़ों की सहायता से कार्ल पियर्सन सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए—

X	4	7	11	14	19	15
Y	18	16	17	19	19	21

हल—इस विधि द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना निम्न प्रकार है—

X	Y	X^2	Y^2	XY
4	18	16	324	72
7	16	49	256	112
11	17	121	289	187
14	19	196	361	266
19	19	361	361	361
15	21	225	441	315
$\Sigma X = 70$	$\Sigma Y = 110$	$\Sigma X^2 = 968$	$\Sigma Y^2 = 2032$	$\Sigma XY = 1313$

सह-सम्बन्ध गुणांक, $r = \dfrac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}\sqrt{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}}$

$$= \frac{6 \times 1313 - 70 \times 110}{\sqrt{6 \times 968 - (70)^2}\sqrt{6 \times 2032 - (110)^2}}$$

$$= \frac{178}{\sqrt{83536}} = \frac{178}{289} = 0.616$$

5. विचरण एवं सह-विचरण विधि—जब विचरण तथा सह-विचरण की स्थिति हो, तब निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$r = \frac{Cov.(X, Y)}{\sqrt{Var.(X)}\sqrt{Var.(Y)}}$$

जहाँ,
$$r = \frac{\Sigma(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})}{\sqrt{\Sigma(X - \overline{X})^2 \; \Sigma(Y - \overline{Y})^2}}$$

N से अंश और हर को विभाजित करने पर,

$$r = \frac{\Sigma(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})/N}{\sqrt{\dfrac{\Sigma(X - \overline{X})^2 \; \Sigma(Y - \overline{Y})^2}{N}}} = \frac{\Sigma(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})/N}{\sqrt{\dfrac{\Sigma(X - \overline{X})^2}{N} \times \dfrac{\Sigma(Y - \overline{Y})^2}{N}}}$$

$$= \frac{Cov.(X, Y)}{\sqrt{Var.(X)}\sqrt{Var.(Y)}}$$

उदाहरण—यदि X तथा Y के बीच सह-विचरण की मात्रा 12.5 है तथा x तथा y के विचरण क्रमश: 16.4 तथा 13.8 हों तो सह-सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।

हल—XY के मध्य सह-विचरण $= 12.5$, X का विचरण $= 16.4$, Y का विचरण $= 13.8$

$$r = \frac{Cov.(X, Y)}{\sqrt{Var.(X)}\sqrt{Var.(Y)}} = \frac{12.5}{\sqrt{16.4}\sqrt{13.8}}$$

$$= \frac{12.5}{\sqrt{226.32}} = \frac{12.5}{15.04} = 0.83 = 0.83$$

प्र.4. सतत् श्रेणी में सह-सम्बन्ध गुणांक को उदाहरण सहित समझाइए।

उत्तर

सतत् श्रेणी में सह-सम्बन्ध
(Correlation in Continuous Series)

जब हमें एक द्विभाजित समूहीकृत आँकड़े से सहसम्बन्ध गुणांक प्राप्त करना होता है तो निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$r = \frac{N\Sigma fd_x d_y - \Sigma fd_x \Sigma fdy_y}{\sqrt{N\Sigma fd_x^2 - (\Sigma fd_x)^2}\sqrt{N\Sigma fd_y^2 - (\Sigma fd_y)^2}}$$

जहाँ, $dx = X - A_x$ तथा $dy = Y - A_y$, $A_x = x$ श्रेणी का कल्पित माध्य, $A_y = y$ श्रेणी का कल्पित माध्य।

उदाहरण—नीचे दी गई सारणी से पतियों तथा पत्नियों की आयु के बीच सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए—

पत्नियों की आयु (Y-श्रेणी)	पतियों की आयु (X-श्रेणी)					
	20-30	**30-40**	**40-50**	**50-60**	**60-70**	**कुल**
15-25	5	9	3	–	–	17
25-35	–	10	25	2	–	37
35-45	–	1	12	2	–	15
45-55	–	–	4	16	5	25
55-65	–	–	–	4	2	6
कुल	**5**	**20**	**44**	**24**	**7**	**100**

हल—पति और पत्नियों की आयु के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक की गणना निम्न प्रकार है—

पत्नियों की आयु (Y)				पतियों की आयु (X)								
				आयु समूह 20-30	30-40	40-50	50-60	60-70				
				m.p. 25	35	45	55	65				
			d_x	−20	−10	0	+10	+20	योग			
	d_y			−2	−1	0	+1	+2	f	fd_y	fd_y^2	$fd_x d_y$
आयु समूह 15-25	m.p. 20	−20	−2	20 ($fd_x d_y$) 5	18 9	0 3			17	−34	68	38
25-35	30	−10	−1		10 10	0 25	−2 2		37	−37	37	8

35-45	40	0	0		0 1	0 12	0 2		15	0	0	0
45-55	50	+1	+1			0 4	16 16	10 5	25	+25	25	26
55-65	60	+20	+2				8 4	8 2	6	+12	24	16
			Total f	5	20	44	24	7	100	Σfd_y =−34	Σfd_y^2 =−154	$\Sigma fd_x d_y$ = 88
			fd_x	−10	−20	0	+24	+14	Σfd_x = 8			
			fd_x	20	20	0	24	28	Σfd_x^2 = 92			
			$fd_x d_y$	20	28	0	22	18				

$$d_x = \frac{X - A_x}{h}, d_y = \frac{Y - A_y}{h}$$

उपर्युक्त मानों को कार्ल पियर्सन सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर,

$$r = \frac{\Sigma fd_x d_y - n\left(\frac{\Sigma fd_x}{n}\right)\left(\frac{fd_y}{n}\right)}{\sqrt{\frac{\Sigma fd_x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd_x}{n}\right)^2}\sqrt{\frac{\Sigma fd_y^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd_y}{n}\right)^2}}$$

अत:

$$r = \frac{88 - 100\left(\frac{8}{100}\right)\left(\frac{-34}{100}\right)}{100\sqrt{\frac{92}{100} - \left(\frac{8}{100}\right)^2}\sqrt{\frac{154}{100} - \left(\frac{-34}{100}\right)^2}}$$

$$= \frac{9072}{\sqrt{9136 \times 14244}} = \frac{9072}{11407.59} = 0.74$$

प्र.5. स्पीयरमैन की कोटिविधि को समझाइए। इसके लाभ तथा हानियों का वर्णन करते हुए इसकी गणना के लिए विभिन्न शर्तों को समझाइए।

उत्तर

स्पीयरमैन की कोटिविधि
(Spearman's Rank Method)

स्पीयरमैन की कोटि सह-सम्बन्ध गुणांक का नाम **चार्ल्स एडवर्ड स्पीयरमैन** के नाम पर रखा गया है और इसे (R) द्वारा निरूपित किया जाता है। यह दो श्रृंखलाओं के बीच की कोटि सम्बन्ध ज्ञात करने की तकनीक है। इस तकनीक का उपयोग तब किया जाता है जब चर के मान की मात्रात्मक रूप से गणना नहीं की जा सकती। स्पीयरमैन की कोटि सह-सम्बन्ध तकनीक को लागू करने के लिए पहले क्रमिक रूप में चर के मान को व्यवस्थित करने की आवश्यकता है। इस पद्धति का प्रयोग तब किया जाता है जब गुणात्मक मात्रा हो। उदाहरण के लिए, जब हम प्रति सप्ताह टीवी के सामने बिताए गए घंटों की संख्या वाले व्यक्ति के आईक्यू का परीक्षण करते हैं, तो स्पीयरमैन के सहसम्बन्ध गुणांक का प्रयोग किया जाता है। स्पीयरमैन की कोटि सह-सम्बन्ध गुणांक-कोटि

$$R = 1 - \frac{6\,\Sigma D^2}{N\,(N^2 - 1)}$$

जहाँ, R = कोटि सह-सम्बन्ध गुणांक, D = प्रत्येक पद-युग्म के क्रम अन्तर या कोटि अन्तर

ΣD^2 = कोटि अन्तर के वर्गों का कुल योग, N = पद-युग्मों के प्रेक्षण की संख्या

कोटि सह-सम्बन्ध गुणांक (R) हमेशा 1 और +1 के बीच होता है और इसका प्रयोग तब किया जाता है जब दोनों शृंखलाओं के लिए माप दिए जाते हैं।

स्पीयरमैन की कोटिविधि के लाभ—इस विधि के प्रमुख लाभ निम्न प्रकार हैं—

1. यह समझने में आसान तथा गणना करने में सरल है।
2. जब आँकड़ें प्रकृति में गुणात्मक (जैसे—बुद्धि, दक्षता) होते हैं तो यह बहुत उपयोगी होता है।
3. यह उस समय भी लागू होता है जब वास्तविक आँकड़ा दिया जाता है।

स्पीयरमैन की कोटिविधि की हानियाँ—इस विधि की प्रमुख हानियाँ निम्नलिखित हैं—

1. यह आवृत्ति वितरण में उपयोगी नहीं है।
2. यदि हम बड़ा नमूना ($n > 30$) लेते हैं तो गणना अधिक कठिन हो जाती है तथा इसमें बहुत अधिक समय लगता है।

कोटि सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना
(Calculation of Rank Correlation Coefficient)

कोटि सह-सम्बन्ध की गणना के लिए विभिन्न शर्तें इस प्रकार हैं—

1. **जब कोटि दी गई हो**—जब वास्तविक कोटि (R_1 तथा R_2) दी गयी हो, तो कोटि की गणना करने के लिए निम्न चरणों का उपयोग किया जाता है—
   (i) दो कोटि ($R_1 - R_2$) के मध्य के अन्तर की गणना करें और इसे दर्शाए, अर्थात् $D = (R_1 - R_2)$
   (ii) इसके बाद D के वर्ग की गणना करें और D को ΣD^2 के रूप में दर्शाएँ।
   (iii) और अन्त में सूत्र में सभी का प्राप्त मानों को रखें।

उदाहरण—अंग्रेजी एवं इतिहास दो विषयों में 10 छात्रों द्वारा प्राप्त कोटि निम्नलिखित है। दोनों विषयों में छात्रों का ज्ञान किस स्तर तक सम्बन्धित है?

अंग्रेजी	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
इतिहास	2	4	1	5	3	10	9	6	7	8

हल—कोटि सहसम्बन्ध गुणांक की सहायता से छात्रों के ज्ञान का स्तर निम्न प्रकार मापा जा सकता है—

अंग्रेजी में कोटि (R_1)	इतिहास में कोटि (R_2)	$D = (R_1 - R_2)$	D^2
1	2	–1	1
2	4	–2	4
3	1	+2	4
4	5	–1	1
5	3	+2	4
6	10	–4	16
7	9	–2	4
8	6	+2	4
9	7	+2	4
10	8	+2	4
			$\Sigma D^2 = 46$

कोटि सहसम्बन्ध गुणांक $(R) = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 46}{10(10^2 - 1)}$

$$= 1 - \frac{276}{10(100-1)} = 1 - \frac{276}{990} = 1 - 0.28 = +\ 0.72$$

2. **जब कोटि नहीं दी गयी हो**—यदि कोई कोटि नहीं दी गई हो, तो पहले दिए गए आँकड़ों (वास्तविक आँकड़े) की कोटि की गणना करते हैं—
   (i) कोटि का निर्धारण करने के लिए सबसे छोटी संख्या 1 लेते हैं। कोटि की अगली छोटी संख्या 2 है, इसी तरह कोटि का निर्धारण आगे भी करते हैं। या फिर सबसे बड़ी संख्या को प्रथम रैंक उससे छोटी संख्या को दूसरा रैंक तथा आगे भी इसी प्रकार से करते हैं।
   (ii) दो कोटि के अन्तर की गणना करते हैं, और इसे D से दर्शाते है अर्थात् $D = (R_1 - R_2)$
   (iii) फिर D के वर्ग की गणना करते हैं और इस D को ΣD^2 के रूप में दर्शाते हैं।
   (iv) अन्त में सभी का मान सूत्र में प्रतिस्थापित कर देते हैं।

उदाहरण—निम्न आँकड़ों द्वारा कोटि सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए—

X	54	58	85	75	65	90	80	50
Y	120	134	150	115	110	140	142	100

हल—कोटि सहसम्बन्ध गुणांक की गणना निम्न प्रकार है—

X	कोटि (R_1)	Y	कोटि (R_2)	$D = (R_1 - R_2)$	D^2
54	2	120	4	– 2	4
58	3	134	5	– 2	4
85	7	150	8	– 1	1
75	5	115	3	+2	4
65	4	110	2	+2	4
90	8	140	6	+2	4
80	6	142	7	– 1	1
50	1	100	1	0	0
					$\Sigma D^2 = 22$

कोटि सहसम्बन्ध गुणांक $(R) = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 22}{8(64 - 1)}$

$$= 1 - \frac{132}{504} = \frac{504 - 132}{504} = \frac{372}{504} = 0.738$$

3. **समान या पुनरावृत्त कोटि**—जब मानो का पुनरावृत्त हो, तो इन मानों की निधारित की गई कोटि समान होती है। इस स्थिति में, कोटि का औसत निकालते हैं तथा पुनरावृत्ति मूल्यों को कोटि प्रदान करते हैं। **उदाहरण के लिए,** यदि दो व्यक्तियों को पाँचवें स्थान पर रखा जाता है, तो उनमें से प्रत्येक को कोटि इस प्रकार से प्रदान की जाती है— $\frac{5+6}{2} = 5.5$ जो सामान्य कोटि को निर्धारित करता है तथा अगली कोटि 7 होगी। इस स्थिति में, यदि तीन संख्या को पाँचवें स्थान पर समान स्थान दी जाती है तो सभी को कोटि इस प्रकार देते हैं— $\frac{5+6+7}{3} = 6$ जो प्रत्येक की सामान्य

कोटि निर्धारित करती है तथा अगली कोटि 8 होगी। सामान्य या पुनरावृत्त कोटि की स्थिति में, गणना करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का उपयोग किया जाता है।

$$\text{कोटि सहसम्बन्ध गुणांक } (R) = 1 - \frac{6\left(\Sigma D^2 + \frac{1}{12}(m_1^3 - m_1) + \frac{1}{12}(m_2^3 - m_2)\ldots\right)}{N^3 - N}$$

जहाँ, m = सामान्य कोटि वाले पदों की संख्या।

उदाहरण—निम्न आँकड़ों द्वारा कोटि सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए—

X	68	64	74	50	64	80	74	40	55	64
Y	62	58	67	45	81	60	67	48	50	70

हल—कोटि सहसम्बन्ध गुणांक की गणना निम्न प्रकार है—

X	कोटि (R_1)	Y	कोटि (R_2)	$D = (R_1 - R_2)$	D^2
68	7	62	6	1	1
64	5	58	4	1	1
74	8.5	67	7.5	1	1
50	2	45	1	1	1
64	5	81	10	– 5	25
80	10	60	5	5	25
74	8.5	67	7.5	1	1
40	1	48	2	– 1	1
55	3	50	3	0	0
64	5	70	9	– 4	16
					$\Sigma D^2 = 72$

श्रेणी X में, संख्या 64 तीन बार आती है ($m_1 = 3$) अर्थात् यह संख्या चौथे, पाँचवें एवं छठे स्थान पर हैं। अत: ये तीनों मान औसत कोटि के रूप में दिए जाते हैं अर्थात् $\frac{4+5+6}{3}$ वाँ = 5 वाँ मान। श्रेणी X में संख्या 74 दो बार आती है ($m_2 = 2$) अर्थात् यह 8वें एवं 9वें स्थान पर है। इस प्रकार ये मान औसत कोटि के रूप में दिए जाते हैं अर्थात् $\frac{8+9}{2}$वीं = 8.5वीं कोटि।

वहीं श्रेणी Y में 7वें एवं 8वें स्थान पर संख्या 67 दो बार आती है ($m_3 = 2$)। इस प्रकार इन दोनों स्थानों को औसत कोटि के रूप में दिया जा सकता है अर्थात् $\frac{7+8}{2}$वीं = 7.5वीं कोटि।

$$\text{कोटि सहसम्बन्ध गुणांक } (R) = 1 - \frac{6\left[\Sigma D^2 + \frac{m_1^3 - m_1}{12} + \frac{m_2^3 - m_2}{12} + \frac{m_3^3 - m_3}{12}\right]}{N(N^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6\left[72 + \frac{3^3 - 3}{12} + \frac{2^3 - 2}{12} + \frac{2^3 - 2}{12}\right]}{10(10^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6\,[72 + 2 + 0.5 + 0.5]}{10(10^2 - 1)} = 1 - 0.4545$$

$$R = 0.5455$$

प्र.6. विक्षेप चित्र क्या है? विक्षेप चित्र बनाने की विधि तथा निर्वचन को समझाइए। इसके विभिन्न प्रारूपों का चित्रीय निरूपण कीजिए।

उत्तर

विक्षेप चित्र
(Scatter Diagram or Dotogram)

किन्हीं दो समंकमालाओं के बीच विक्षेप चित्र द्वारा सह-सम्बन्ध ज्ञात करने के लिये दोनों समंकमालाओं के चर-मूल्यों को ग्राफ पर अंकित किया जाता है एवं इस प्रकार चर-मूल्यों को अंकित करने से जो चित्र बनता है उसे ही विक्षेप या बिन्दु-चित्र कहते हैं। विक्षेप चित्र का निरीक्षण करने से बिन्दुओं का एक समूह दिखाई पड़ता है जिसके आधार पर सह-सम्बन्ध का अध्ययन किया जाता है। इस रीति में मुख्य दोष यह है कि इस रीति द्वारा सह-सम्बन्ध का केवल चाक्षुष अध्ययन (Visual Study) ही सम्भव है। इस रीति से सह-सम्बन्ध का अंकात्मक माप प्राप्त नहीं किया जा सकता, केवल सह-सम्बन्ध की दिशा और मात्रा का अनुमान किया जा सकता है।

विक्षेप चित्र बनाने की विधि
(Method to draw Scatter Diagram)

विक्षेप चित्र तैयार करने के लिये सर्वप्रथम प्रदत्त दो चरों में से एक को x-चर तथा दूसरे को y-चर मान लेते हैं। भुजाक्ष (x-axis) पर x चर तथा कोटि-अक्ष (y-axis) पर y चर को दर्शाया जाता है। इसके बाद x तथा y चर के प्रत्येक युग्म (Pair) के मूल्यों के आधार पर ग्राफ पर बिन्दु अंकित कर देते हैं। इस प्रकार जितने युग्म पद (Pair of Values) होते हैं उतने ही बिन्दु ग्राफ पर प्रांकित हो जाते हैं। हमें यह अवश्य ध्यान रखना है कि इन बिन्दुओं को किसी रेखा के द्वारा मिलाया नहीं जाता है वरन् इन बिन्दुओं के बिखराव के आधार पर ही सह-सम्बन्ध का अध्ययन किया जाता है।

यदि दो काल-श्रेणियों (Time Series) के मध्य सह-सम्बन्ध ज्ञात करना हो तो समय को x-axis पर तथा x एवं y दोनों चरों के मूल्यों को y-axis पर प्रकट किया जाता है।

जहाँ तक मापदण्ड (Scale) तय करने का प्रश्न है इसके लिये यह ध्यान रखें कि यदि दोनों चरों की इकाई समान है तो एक मापदण्ड अन्यथा दो अलग-अलग मापदण्ड लेकर विभिन्न बिन्दुओं को प्रांकित कर देते हैं। संक्षेप में, दोनों चरों के लिये अलग-अलग या समान, जैसा उचित हो माप (Scale) ले लेते हैं।

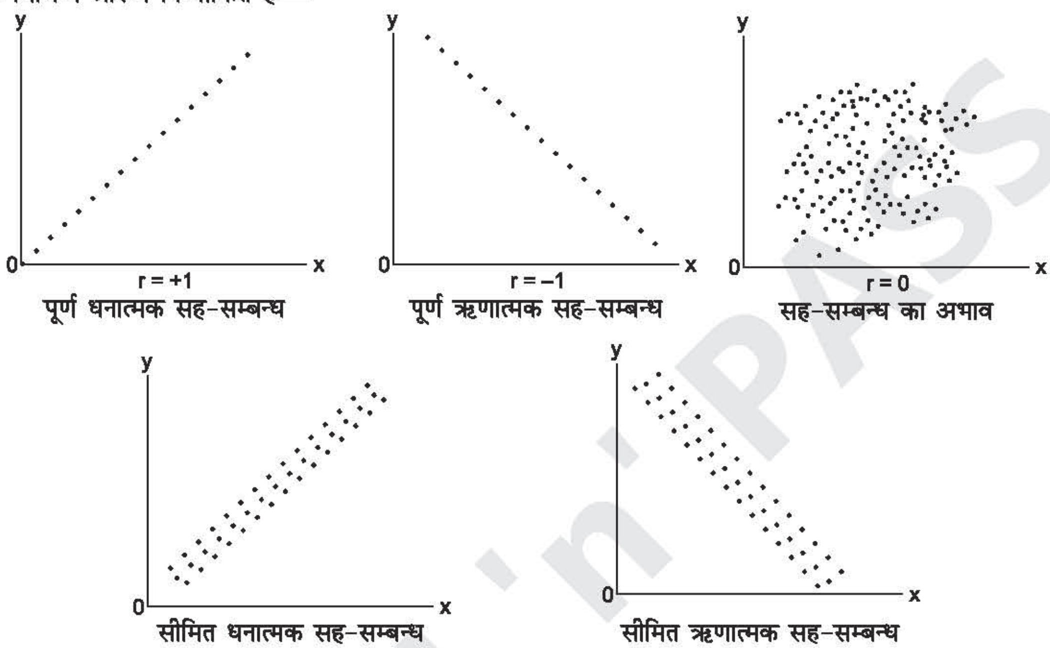
विक्षेप चित्रों के अध्ययन (निर्वचन) की रीति
(Methods to Study of Scatter Diagram)

दोनों चरों के विभिन्न बिन्दुओं को ग्राफ पर प्रांकित करने से प्राप्त विक्षेप चित्र के आधार पर सह-सम्बन्ध का अध्ययन निम्नलिखित प्रकार किया जा सकता है—

1. यदि विक्षेप चित्र में अंकित विभिन्न बिन्दु बायीं ओर से दाहिनी ओर ऊपर की तरफ एक सीधी रेखा के रूप में हों तो इसका अभिप्राय है कि दोनों चरों के बीच धनात्मक पूर्ण सह-सम्बन्ध (Perfect Positive Corrleation) है।
2. यदि विक्षेप चित्र में अंकित विभिन्न बिन्दु ऊपर के बायें कोने से नीचे के दाहिने कोने की तरफ एक सीधी रेखा के रूप में हों तो ऋणात्मक पूर्ण सह-सम्बन्ध (Perfect Negative Correlation) कहा जायेगा।
3. यदि विक्षेप चित्र में अंकित विभिन्न बिन्दु ऊपर-नीचे बिखरे हुये हों अर्थात् प्रांकित बिन्दुओं का वितरण इस प्रकार हो कि उनसे किसी एक दिशा का आभास नहीं होता हो तो इसका अभिप्राय है कि दोनों चरों के बीच सह-सम्बन्ध की अनुपस्थिति (Absence of Correlation) है।
4. यदि विक्षेप चित्र में अंकित विभिन्न बिन्दुओं का बिखराव नीचे के बायें कोने से ऊपर के दायें कोने की तरफ हो तो दोनों चरों के बीच सीमित धनात्मक सह-सम्बन्ध (Limited Positive Correlation) कहा जायेगा।
5. यदि विक्षेप चित्र में अंकित विभिन्न बिन्दुओं का फैलाव ऊपर के बायें कोने से नीचे दायें कोने की ओर हो तो दोनों चरों के बीच सीमित ऋणात्मक सह-सम्बन्ध (Limited Negative Correlation) माना जायेगा। यदि अंकित बिन्दुओं में बिखराव अधिक हो तो मामूली ऋणात्मक सह-सम्बन्ध किन्तु बिन्दुओं में फैलाव कम होने पर उच्च ऋणात्मक सह-सम्बन्ध माना जाता है।

विक्षेत्र चित्र के विभिन्न प्रारूप
(Various Formats of Scatter Diagram)

इसके विभिन्न-प्रारूप निम्नांकित हैं—



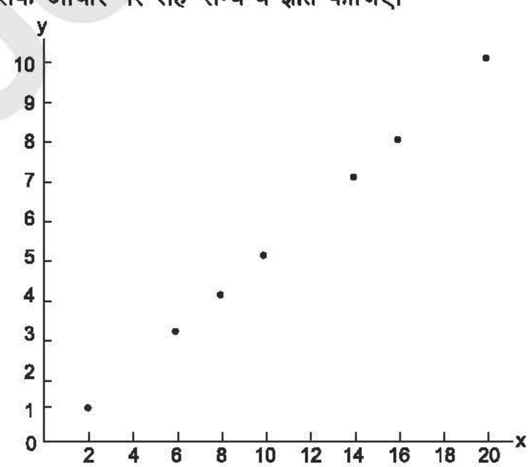
चित्र : विक्षेप चित्र के विभिन्न प्रारूप

उदाहरण—x तथा y चरों के निम्नलिखित पद-युग्म दिए गए हैं—

x	2	6	8	10	14	16	20
y	1	3	4	5	7	8	10

एक विक्षेप चित्र बनाइए और उसके आधार पर सह-सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।

हल—



चित्र

उपरोक्त विक्षेप चित्र के निरीक्षण से स्पष्ट होता है कि सभी प्रांकित बिन्दु नीचे बाएँ कोने से दाएँ ओर ऊपर की तरफ एक सीधी रेखा के रूप में हैं। अत: धनात्मक पूर्ण सह-सम्बन्ध है। ❑

UNIT-IV

व्यावसायिक सांख्यिकी

खण्ड-अ अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. सूचकांक का क्या महत्त्व है? समझाइए।

उत्तर सूचकांक का महत्त्व निम्न प्रकार है—

1. आंतरिक मूल्य स्तर में परिवर्तन की व्याख्या सूचकांकों का उपयोग करके की जा सकती है।
2. विदेशी व्यापार में वृद्धि या गिरावट ऐसे सूचकांकों के उपयोग से जानी जा सकती है।
3. एक देश में निवास की लागत में परिवर्तन की व्याख्या करने के लिए जीवन सूचकांक की लागत जैसे सूचकांकों का उपयोग किया जा सकता है।
4. उत्पादन में प्रवृत्ति का अध्ययन सूचकांकों का उपयोग करके किया जा सकता है तथा यह सरकार को उद्योगों के लिए नीतियाँ बनाने की सुविधा प्रदान करता है।
5. एक नियोजित अर्थ व्यवस्था सूचकांक संख्या के कुशल उपयोग से सरलता से उपयोग हो सकता है। सूचकांकों के साथ रणनीति बनाने वालों के पास देश की वित्तीय स्थिति के बारे में सटीक विवरण हो सकता है और इस प्रकार व्यक्तियों के हितों के लिए नीतियों का निर्माण हो सकता है।

प्र.2. मूल्य सूचकांक (Price Index) के निर्माण को समझाइए।

उत्तर मूल्य सूचकांक का उपयोग किसी निश्चित समय एवं स्थानों पर उत्पादों के समूह की तुलना करने के लिए किया जाता है। दिए गए मूल्यों की तुलना करने के लिए आधार अवधि मूल्य या स्थान का उपयोग किया जाता है। निम्न सूत्र का प्रयोग मूल्य सूचकांक की गणना करने के लिए किया जाता है।

$$P_{01} = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

जहाँ P_{01} = आधार वर्ष की मूल्य के आधार पर चालू वर्ष की मूल्य सूचकांक

उदाहरणार्थ—2014 में भारत में चावल की मात्रा ₹ 850 प्रति क्विंटल थी तथा 2013 में यह ₹ 750 प्रति क्विंटल में थी। 2014 के सापेक्ष मूल्य हैं—

$$\frac{85}{75} \times 100 = 113.33\%$$

नोट—2013 को आधार वर्ष के रूप में लिया गया। इस प्रकार, मूल्य सापेक्ष एक विशिष्ट वर्ष में वस्तु की मूल्य का प्रतिशत और किसी दिए गए वर्ष में एक ही वस्तु का मूल्य है।

प्र.3. मूल्य संूचकांक (Value Index) के निर्माण समझाइए।

उत्तर मूल्य संूचकांक यह कुल मौद्रिक मूल्य में परिवर्तन को मापता है। यह अधिक सूचनात्मक सूचकांक प्रस्तुत करने के लिए मूल्य एवं मात्रा में परिवर्तन को जोड़ती है। जी०एन०पी० का सूचकांक एवं खुदरा बिक्री का सूचकांक इसके उदाहरण हैं। मूल्य सूचकांक का उपयोग आधार अवधि के कुल मूल्य के साथ किसी विशेष अवधि के मूल्य की तुलना करने के लिए किया जाता है। इसका उपयोग वर्तमान वर्ष एवं आधार वर्ष में उपभोग के सन्दर्भ के साथ वस्तु के मूल्य (मात्रा एवं उत्पाद) में भिन्नता को बनाने एवं मापने के लिए किया जाता है। एक वस्तु के लिए, यदि P_1 एवं q_1 चालू वर्ष में मूल्य एवं मात्रा है और उसी वस्तु के लिए P_0 एवं q_0 आधार वर्ष में मूल्य एवं मात्रा हैं, तो मूल्य सूचकांक की गणना के लिए निम्न सूत्र का उपयोग किया जाता है।

$$V_{01} = \frac{V_1}{V_0} \times 100$$

जहाँ, $V_1 = p_1q_2$ चालू वर्ष का मूल्य है।

प्र.4. चल माध्य रीति के गुणों को समझाइए।

उत्तर चल माध्य रीति के प्रमुख गुण निम्नलिखित हैं—

1. उपनति ज्ञात करने की यह रीति समझने तथा प्रयोग की दृष्टि से अत्यन्त सरल है।
2. इस रीति के द्वारा प्राप्त परिणाम तुलनात्मक रूप से अधिक परिशुद्ध होते हैं।
3. यह रीति व्यक्तिनिष्ठ (subjective) न होने के कारण, पक्षपात से मुक्त है।
4. यह उपनति ज्ञात करने की लोचदार विधि है क्योंकि प्रदत्त समंकमाला में यदि कुछ मूल्य और जोड़ दिये जायें तो कुछ अतिरिक्त उपनति मूल्य प्राप्त हो जायेंगे, परन्तु पहले वाले मूल्यों में कोई परिवर्तन नहीं होगा।
5. स्पष्ट आवधिक उच्चावचनों वाली काल श्रेणी के लिये यह रीति सर्वोपयुक्त है क्योंकि उच्चावचन पूर्ण रूप से समाप्त हो जाते हैं और एक निश्चित दीर्घकालीन प्रवृत्ति निर्धारित हो जाती है।

प्र.5. निम्न तालिका में 2000 से 2004 तक के तीन वस्तुओं के औसत थोक मूल्य दिए गए हैं। शृंखला आधार रीति से निर्देशांकों की रचना कीजिए–

औसत थोक मूल्य

वस्तु	2000	2001	2002	2003	2004
I	10	12	16	16	20
II	16	20	24	30	36
III	20	24	30	36	40

हल

औसत थोक मूल्य

वस्तु	2000		2001		2002		2003		2004	
	P	LR	P	LR	P	LR	P	LR	P	LR
I	10	100	12	120	16	133.33	16	100	20	125
II	16	100	20	125	24	120	30	125	36	120
III	20	100	24	120	30	125	36	120	40	111.11
कुल LR		300		365		378.33		345		356.11
औसत LR		100		121.67		126.11		115		118.7

प्र.6. सूचकांक की सीमाएँ लिखिए।

उत्तर सूचकांक की सीमाएँ निम्नलिखित हैं—

1. सूचकांकों की गणना करने के लिए वस्तुओं एवं मात्राओं के नमूने का उपयोग किया जाता है। नमूनाकरण सामान्य रूप से पक्षपाती होता है और इस प्रकार गणना में त्रुटियों का परिचय देता है। इसलिए ऐसी त्रुटियों को कम करने के लिए प्रयास किए जाने चाहिए।
2. परिवर्तित समय के साथ ग्राहकों की नापसंद में परिवर्तन आ जाता है इसलिए पदों की गुणवत्ता में परिवर्तन हो सकता है। नयी गुणवत्ता एवं अन्य प्रचलनों का उपयोग दीर्घावधि में तुलना को गलत बना सकता है।
3. विभिन्न सूचकांकों का निर्माण विभिन्न प्रकार से किया जाता है। इस प्रकार, यह विभिन्न परिस्थितियों में विभिन्न परिणाम दे सकता है।
4. विशेष उद्देश्यों की पूर्ति के लिए सूचकांकों में हेर-फेर किया जा सकता है। उच्च लाभ वर्ष को आधार अवधि बनाया जा सकता है जिससे चालू वर्ष में लाभ कम होता है।
5. विभिन्न स्रोतों द्वारा आँकड़ा संग्रह, क्षेत्र सदैव विश्वसनीय नहीं हो सकते क्योंकि संग्राहक आंकड़ों की गुणवत्ता से प्रभावित होती है।

6. सूचकांकों का उपयोग अंतराष्ट्रीय संदर्भ में नहीं किया जा सकता है।
7. सूचकांक किसी घटना/मात्रा/मद के अनुमानित संकेतक हैं।

प्र.7. मात्रा सूचकांक के निर्माण को समझाइए।

उत्तर आधार वर्ष मात्रा के संदर्भ में एक वर्ष में वस्तुओं की मात्रा (उत्पादित, उपभोग या वितरित) के स्तर में भिन्नता को ज्ञात करने के लिए, इसे सूचकांक का उपयोग किया जाता है। मात्रा सूचकांक की गणना के लिए उपयोग किया जाने वाला सबसे सरल सूत्र निम्नलिखित है—

$$Q_{01} = \frac{q_1}{q_0} \times 100$$

जहाँ, Q_{01} आधार वर्ष की मात्रा के आधार पर चालू वर्ष की मात्रा का सूचकांक।

प्र.8. चल माध्य रीति के दोष लिखिए।

उत्तर चल माध्य रीति के दोष निम्नलिखित हैं—
1. चल-माध्यों की उचित अवधि (periodicity) निश्चित करना काफी कठिन एवं जटिल कार्य है।
2. यह रीति केवल नियमित परिवर्तनों वाली काल-श्रेणी के लिये ही उपयुक्त है। अन्य श्रेणियों के लिये नहीं।
3. चल-माध्य, समंकों में अनायास ही चक्रीय उच्चावचनों को जन्म देने की प्रवृत्ति रखते हैं।
4. इस रीति का सबसे बड़ा दोष यह है कि प्रवृत्ति का मापन करते समय आरम्भ तथा अन्त के कुछ उपनति मूल्य स्वत: ही छूट जाते हैं।,
5. समान्तर माध्य की भाँति चल-माध्य भी बड़े पद-मानों (big sizes) से प्रभावित होकर सही प्रवृत्ति को विकृत कर देते हैं।
6. इस विधि का उपयोग पूर्वानुमान लगाने के लिये नहीं किया जा सकता।

प्र.9. सूचकांकों का उद्‌गम एवं विकास को समझाइए।

उत्तर सूचकांकों की रचना एवं विकसित करने का श्रेय इटली निवासी प्रसिद्ध सांख्यिक श्री कार्ली (Carlie) को जाता है जिन्होंने सन् 1764 में इटली के अनाज, तेल व शराब के मूल्यों पर अमेरिका की खोज का प्रभाव ज्ञात करने के लिये सूचकांकों की रचना की थी। इस हेतु उन्होंने सन् 1500 को आधार वर्ष मानकर वर्ष 1750 के लिये साधारण मूल्य-सूचकांक ज्ञात किये। सन् 1863 में प्रसिद्ध अर्थशास्त्री जेवन्स (Jevons) ने भी सूचकांकों की सहायता से मूल्य स्तरों का अध्ययन किया। 19वीं शताब्दी में सूचकांक तकनीक का सैद्धान्तिक विकास करने में मार्शल (Marshall), वाल्श (Walsh), मिचेल (Mitchell), इरविंग फिशर (Irving Fisher), एजवर्थ (Edgeworth) आदि ने सराहनीय योगदान दिया। बीसवीं शताब्दी से सूचकांकों का प्रयोग अर्थव्यवस्था के अन्य क्षेत्रों जैसे राष्ट्रीय आय, उत्पादन, जीवन-स्तर यातायात, निर्यात आदि में तुलनात्मक अध्ययन के लिये किया जाने लगा है।

प्र.10. श्रृंखला आधार रीति के गुण तथा अवगुण लिखिए।

उत्तर श्रृंखला आधार रीति के प्रमुख **गुण** निम्न प्रकार हैं—
1. इन निर्देशांकों की सहायता से निकट के दो वर्षों के बीच मूल्यों में परिवर्तन की तुलना सरल हो जाती है जिससे प्रत्येक चालू वर्ष में ठीक उससे पिछले वर्ष की तुलना में मूल्यों में हुए परिवर्तनों की जानकारी मिल जाती है।
2. यह निर्देशांक मौसमी एवं चक्रीय परिवर्तन से प्रभावित नहीं होते हैं।
3. इन निर्देशांकों में पुरानी अनावश्यक मदों को छोड़ा जा सकता है और आवश्यक नई मदों को शामिल किया जा सकता है।

श्रृंखला आधार रीति के **अवगुण** निम्नलिखित हैं—
1. इन निर्देशांकों की रचना तुलनात्मक रूप से कठिन होती है और गणित्य होती है।
2. यह निर्देशांक दीर्घकालीन परिवर्तनों का तुलनात्मक अध्ययन करने के लिए उचित नहीं है।
3. इन निर्देशांकों में किसी एक स्थान पर अशुद्धि का प्रभाव अन्य सभी गणितीय परिणामों पर पड़ता है।

प्र.11. फिशर के 'आदर्श' सूचकांक के लाभ एवं हानियाँ लिखिए।

उत्तर फिशर आदर्श सूचकांक के **लाभ** निम्नलिखित हैं—
1. यह विधि सूचकांक की गणना करने के लिए सबसे उपयुक्त औसत (गुणोत्तर माध्य) का उपयोग करती है।

2. इस विधि के लिए सभी आंकड़ों जैसे—P_1, P_0, q_1 और q_0 का उपयोग किया जाता है।
3. यह एक ऊपरी एवं निचला पूर्वाग्रह नहीं दर्शाता है क्योंकि यह भार के रूप चालू एवं आधार दोनों वर्षों की मात्रा प्राप्त करता है।
4. यह निम्न परीक्षणों की आवश्यकताओं को पूरा करता है—
   (i) इकाई परीक्षण
   (ii) समय उत्क्राम्यता परीक्षण
   (iii) कारक उत्क्राम्यता परीक्षण
5. इसमें चालू एवं आधार वर्ष दोनों के प्रभाव शामिल होते हैं।

फिशर 'आदर्श' सूचकांक की **हानियाँ** निम्नलिखित हैं—

1. इसकी गणना अत्यन्त कठिन है क्योंकि इसमें गणोत्तर माध्य व लघु गणक का प्रयोग किया जाता है।
2. सामान्य व्यक्तियों के लिए इसे समझना बहुत कठिन होता है।
3. प्रत्येक समय जब सूचकांक की गणना की जाती है तो उसे वर्तमान आंकड़ों की आवश्यकता होती है, इसलिए यह महँगा एवं थकाऊ कार्य है।
4. यह दो सूचकांकों (लैस्पियरे एवं पाश्चे) का संलयन है, इसलिए यह ज्ञात करना अत्यन्त कठिन है क्योंकि वास्तव में यह विधि किस प्रकार का उपाय करती है।

प्र.12. मौसमी परिवर्तन (आर्त्तव विचरण) तथा चक्रीय उच्चावचनों में अन्तर स्पष्ट कीजिए।

उत्तर मौसमी परिवर्तन (आर्त्तव विचरण) तथा चक्रीय उच्चावचनों में अन्तर निम्नलिखित हैं—

1. **पुनरावृत्ति की अवधि**—आर्त्तव विचरण की अवधि प्राय: 1 वर्ष होती है जबकि चक्रीय उच्चावचनों की अवधि सामान्यत: 3 से 11 वर्ष होती है।
2. **नियमितता**—आर्त्तव विचरण में अवधि तथा क्रम की दृष्टि से नियमितता होती है जबकि चक्रीय उच्चावचनों में विभिन्न चरण तो निश्चित होते हैं परन्तु प्रत्येक चरण की अवधि निश्चित न होकर बदलती रहती है।
3. **माप की शुद्धता**—चक्रीय उच्चावचनों की अपेक्षा आर्त्तव विचरणों का माप अधिक स्पष्टता एवं शुद्धता के साथ किया जा सकता है।
4. **कारण**—आर्त्तव विचरण प्राय: मौसम में परिवर्तन, रीति-रिवाज तथा समय विशेष की आवश्यकताओं से प्रभावित होते हैं जबकि चक्रीय उच्चावचन मौद्रिक घटकों; जैसे—मुद्रा प्रसार, मुद्रा सकुंचन माँग में परिवर्तन आदि के कारण उत्पन्न होते हैं।
5. **व्यवसायों का सम्बन्ध**—मौसमी परिवर्तन प्रत्येक व्यवसाय के लिये अलग-अलग क्रम से होते हैं, जबकि चक्रीय उच्चावचन प्रत्येक व्यवसाय के लिये एक से होते हैं तथा सभी व्यवसायों को समान रूप से प्रभावित करते हैं।

प्र.13. चल-माध्यों की विशेषताओं को लिखिए।

उत्तर चल-माध्यों की विशेषताएँ निम्नलिखित हैं—

1. यदि काल-श्रेणी में विभिन्न मूल्यों में एक ही गति से बढ़ने या घटने की प्रवृत्ति पायी जाये तो श्रेणी को सरल रेखा के रूप में रेखाचित्र पर प्रस्तुत किया जा सकता है। ऐसी परिस्थिति में श्रेणी के मूल्यों के चल माध्य भी अंकित करने पर एक सरल रेखा ही अंकित होगी।
2. यदि श्रेणी के मूल्यों में उच्चावचन हो और एक सरल रेखा अंकित न हो सके तो चल माध्यों को अंकित करने पर उच्चावचन कम हो सकते हैं और श्रेणी की वक्रता कम हो सकती है।
3. यदि श्रेणी में चक्रानुसार उतार-चढ़ाव होते हैं और चल माध्य का समय चक्रीय उच्चावचनों के समय से मेल खाता है तो ऐसे उच्चावचन स्वत: ही समाप्त हो जाते हैं और चल माध्य एक सरल रेखा के रूप में रेखाचित्र पर अंकित किये जा सकते हैं।
4. चल माध्य अनियमित या दैव उच्चावचनों को पृथक् (isolate) नहीं कर पाते, उन्हें केवल कम कर सकते हैं।

प्र.14. स्थायी आधार एवं शृंखला आधार सूचकांक में अन्तर स्पष्ट कीजिए।

उत्तर स्थायी आधार एवं शृंखला आधार सूचकांक में अन्तर निम्न प्रकार हैं—

क्र०सं०	स्थायी आधार सूचकांक	शृंखला आधार सूचकांक
1.	स्थायी आधार सूचकांक में, आधार वर्ष निश्चित रहता है।	शृंखला आधार सूचकांक में नई विद्यमान वस्तुओं को समाप्त किया जा सकता है।
2.	स्थिर आधार सूचकांक चक्रीय एवं मौसमी विचरणों से मुक्त नहीं होता है।	शृंखला आधार सूचकांक चक्रीय एवं मौसमी विचरणों से मुक्त होता है।
3.	स्थायी आधार सूचकांक सामान्य रूप से गणना करने में सरल होते हैं।	शृंखला आधार सूचकांक की गणना करना सरल नहीं होता है।

प्र.15. सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति के उद्देश्य लिखिए।

उत्तर सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति तथा उपनति (Trend) विश्लेषण के तीन प्रमुख उद्देश्य हैं—

1. श्रेणी की भूतकालीन वृद्धि या कमी का पता लगाना तथा विभिन्न उद्योगों की भूतकालीन प्रगति का तुलनात्मक अध्ययन करना।
2. भावी पूर्वानुमान लगाना एवं
3. प्रवृत्ति का विश्लेषण करके काल श्रेणी को उपनति के प्रभाव से मुक्त करना ताकि दूसरे प्रकार के अल्पकालिक उच्चावचनों का अध्ययन एवं विश्लेषण किया जा सके।

प्र.16. सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति की माप को समझाइए।

उत्तर सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति का अध्ययन तभी किया जा सकता है जब हम सम्बन्धित काल-श्रेणी में उसको प्रभावित करने वाले अल्पकालीन उच्चावचनों को दूर कर दें। दीर्घकालीन प्रवृत्ति (उपनति) को मापने की मुख्य रीतियाँ निम्नलिखित हैं—

1. मुक्त-हस्त वक्र रीति (Freehand Curve Method),
2. अर्द्ध-मध्यक रीति (Semi-Averages Method),
3. चल-माध्य रीति (Moving Averages Method),
4. न्यूनतम वर्ग रीति (Method of Least Squares)।

प्र.17. न्यूनतम वर्ष रीति के गुण-दोष को समझाइए।

उत्तर न्यूनतम वर्ग रीति के **मुख्य गुण** निम्नलिखित हैं—

1. यह दीर्घकालीन प्रवृत्ति मापन की एक श्रेष्ठ व सरल रीति है।
2. यह रीति व्यक्तिगत पक्षपात से मुक्त है और इसके आधार पर ज्ञात प्रवृत्ति मूल्य अधिक शुद्ध और उपयुक्त होते हैं।
3. इस रीति की सहायता से आगामी वर्षों के लिए भी सम्भावित मूल्य ज्ञात किये जा सकते हैं।

परन्तु न्यूनतम वर्ग रीति में निम्नलिखित **दोष** भी हैं—

1. यह रीति गणना करने में अपेक्षाकृत जटिल है।
2. इस रीति में लोच नहीं है। यदि मूल समंकों में एक भी मूल्य में परिवर्तन कर दिया जाए तो प्रवृत्ति समीकरण (Trend Equation) ही बदल जाता है।

उपरोक्त दोष होते हुए भी दीर्घकालीन उपनति ज्ञात करने के लिये न्यूनतम वर्ग रीति ही सबसे श्रेष्ठ और उपयुक्त रीति है। अत: इसी का प्रयोग व्यापक रूप में किया जाता है।

खण्ड-ब लघु उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. सूचकांकों के प्रकारों को समझाइए तथा इनको वर्गीकृत भी कीजिए।

उत्तर

सूचकांकों का वर्गीकरण
(Classification of Indices)

मूलरूप से सूचकांकों के प्रकारों को अग्र प्रकारों में वर्गीकृत किया जा सकता है—

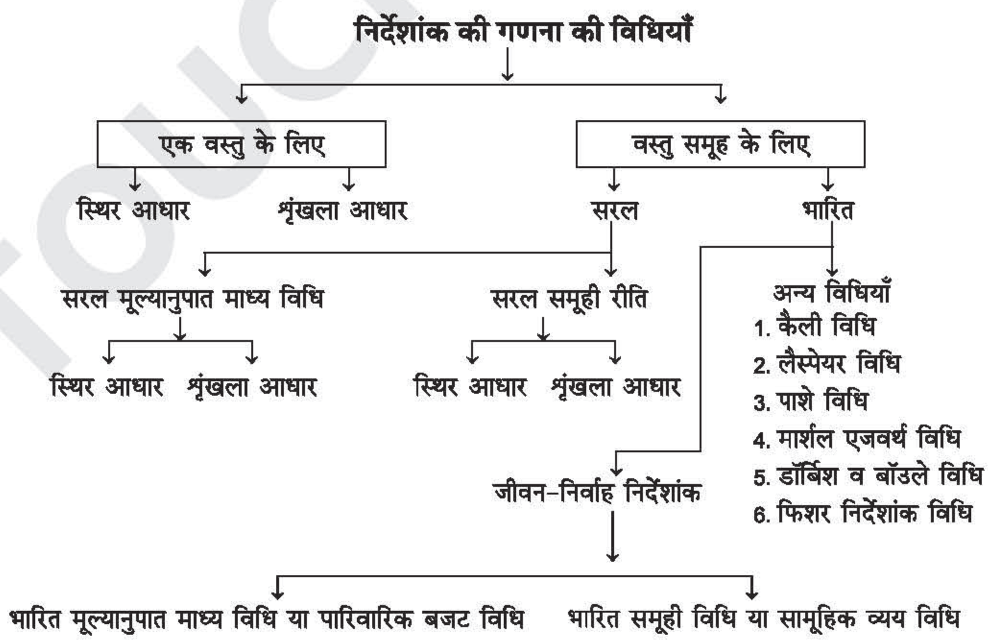
1. **मूल्य सूचकांक संख्या**—ये सबसे सरल एवं सबसे अधिक उपयोग किए जाने वाले सूचकांक हैं। उनका उपयोग किसी निश्चित समय में उपभोग की जाने वाली वस्तुओं की मूल्य में भिन्नता को मापने के लिए किया जाता है। वस्तुओं के मूल्यों में भिन्नता या परिवर्तन को मापने के लिए यह आधार अवधि को संदर्भ के रूप में उपयोग करता है।
   मूल्य सूचकांकों के प्रकार निम्नलिखित हैं—
   (i) **थोक मूल्य सूचकांक संख्या**—इसका उपयोग किसी उत्पाद या सेवा के सामान्य मूल्य स्तर में भिन्नता को ज्ञात करने के लिए किया जाता है।
   (ii) **खुदरा मूल्य सूचकांक संख्या**—इसका उपयोग किसी उत्पाद या सेवा के खुदरा मूल्य (खुदरा व्यापार में क्रम एवं विक्रम किया गया) में भिन्नता को ज्ञात करने के लिए किया जाता है।
2. **मात्रा सूचकांक संख्या**—एक निश्चित समयावधि में, मात्रा सूचकांक वस्तुओं की (एक संगठन द्वारा विक्रय, क्रय एवं उत्पादित) भौतिक मात्रा की गणना एवं तुलना करने में सहायता करती है।
3. **मूल्य सूचकांक संख्या**—इसका उपयोग वस्तुओं के मूल्य में भिन्नता को ज्ञात करने के लिए एवं आधार अवधि के संदर्भ में एक समयावधि में उपभोग या क्रय की गई वस्तुओं का संग्रह करने की भिन्नता के लिए किया जाता है।
4. **सरल सूचकांक संख्या**—व्यक्तिगत वस्तुओं के लिए सूचकांक को सरल सूचकांक के रूप में जाना जाता है।
5. **सकल (या समग्र) सूचकांक संख्या**—वस्तुओं के समूह के लिए सूचकांक का निर्माण समग्र (कुल) सूचकांक के रूप में होता है।
6. **जीवन सूचकांक की लागत संख्या**—इसे उपभोक्ता मूल्य सूचकांक के रूप में भी जाना जाता है। इसका उपयोग किसी वस्तु के व्यय एवं उपभोग में औसत अन्तर की तुलना के लिए एक समयावधि से दूसरे समय तक करने के लिए किया जाता है। इसका उपयोग ग्राहकों के एक व्यक्तिगत वर्ग की भिन्नता को मापने के लिए भी किया जाता है।

प्र.2. मूल्य सूचकांक की रचना की विधियाँ चार्ट के माध्यम से समझाइए।

उत्तर

मूल्य सूचकांक की रचना की विधियाँ
(Methods of Constructing Price Index Numbers)

निर्देशांक ज्ञात करने की (निर्देशांक रचना की) बहुत-सी विधियाँ हैं जिनका वर्गीकरण निम्न चार्ट द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है—



प्र.3. आधार वर्ष कितने प्रकार के होते हैं? समझाइए।

उत्तर

आधार वर्ष के प्रकार
(Types of Base Year)

आधार वर्ष निम्नलिखित तीन प्रकार का हो सकता है—

1. **स्थिर आधार रीति**—इस रीति के अनुसार, एक सामान्य वर्ष को आधार वर्ष चुन लिया जाता है। उस वर्ष के मूल्यों को 100 मानकर आगे के सभी वर्षों के मूल्यों को उनके आधार पर प्रतिशतों में व्यक्त किया जाता है। अन्य वर्षों के मूल्य स्तरों की तुलना इस आधार वर्ष के आधार पर की जाती है। यह वर्ष प्रत्येक प्रकार से सामान्य होना चाहिये अर्थात् बाढ़,महामारी, अकाल, युद्ध, अभिवृद्धि काल, अवसाद काल उस वर्ष में न हों। जहाँ तक सम्भव हो सभी प्रकार के निर्देशांकों के लिये समान आधार वर्ष रखना चाहिये जिससे विभिन्न क्षेत्रों में तुलना की जा सके।
2. **औसत आधार रीति**—किसी एक वर्ष को आधार मानने में यह आशंका है कि यदि यह वर्ष असाधारण हुआ तो निर्देशांक वास्तविक स्थिति को नहीं प्रकट करेंगे। फिर कौन-सा वर्ष साधारण है और कौन-सा असाधारण, इसमें भी मतभेद हो सकता है। ऐसी दशा में अधिक अच्छा यही है कि आधार के रूप में कई वर्षों का माध्य ले लिया जाये। तीन या पाँच वर्ष का माध्य प्राय: आधार के रूप में लिया जाता है। इस औसत को 100 मानकर चालू वर्ष के लिये मूल्यानुपात निकाल लेते हैं।
3. **शृंखला आधार रीति**—यदि वर्ष प्रतिवर्ष के मूल्य-स्तरों के परिवर्तनों की तुलना करनी हो तो शृंखला-आधार रीति अपनायी जाती है। इस रीति के अनुसार प्रत्येक वर्ष के लिये उसके पूर्व का वर्ष आधार होता है। शृंखला-आधार रीति से रचित निर्देशांकों को शृंखला निर्देशांक (Link Index Numbers) कहते हैं। उदाहरणार्थ, यदि 1999, 2000, 2001 तथा 2002 के शृंखला निर्देशांक बनाने हों, तो 1999 के निर्देशांक का आधार वर्ष 1998, 2000 के निर्देशांक का आधार वर्ष 1999 तथा 2001 के निर्देशांक का आधार वर्ष 2000 रखा जायेगा। इस रीति के अनुसार आधार वर्ष बदलता रहता है। अत: इसे 'बदलते आधार की रीति' (shifting base system) भी कहते हैं।

प्र.4. नीचे दिए गए आँकड़ों से आधार वर्ष के रूप में 2013 एवं 2014 के लिए सूचकांक का निर्माण कीजिए–

वस्तु	2013 में मूल्य (₹)	2014 में मूल्य (₹)
A	70	80
B	80	60
C	40	35
D	50	50

हल मूल्य सूचकांक का निर्माण निम्न प्रकार किया जाता है—

वस्तु	मूल्य 2013 (P_0)	मूल्य 2014 (P_1)
A	70	80
B	80	60
C	40	35
D	50	50
	$\Sigma P_0 = 240$	$\Sigma P_1 = 225$

सरल समूही विधि द्वारा,

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0} \times 100 = \frac{240}{225} \times 100 = 106.67$$

इसका तात्पर्य यह है कि 2013 में मूल्यों की तुलना में 2014 के मूल्यों में 6.67% = (106.66 – 100) की शुद्ध वृद्धि हुई है।

प्र.5. निम्नलिखित आँकड़ों से मूल्य के सूचकांक की फिशर विधि द्वारा गणना कीजिए–

वस्तु	2013		2014	
	मूल्य	मात्रा	मूल्य	मात्रा
ईंट	8	14	6	28
स्टील की चादरें	15	12	10	24
लकड़ी	12	28	12	54
सीमेण्ट	14	46	4	27

हल मूल्य के सूचकांक की फिशर विधि द्वारा गणना निम्नलिखित है—

वस्तुएँ	2013		2014		p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
	मूल्य	मात्रा	मूल्य	मात्रा				
	p_0	q_0	p_1	q_1				
ईंट	8	14	6	28	84	112	168	224
स्टील की चादरें	15	12	10	24	120	180	240	360
लकड़ी	12	28	12	54	336	336	648	648
सीमेण्ट	14	46	4	27	184	644	108	378
					$\Sigma p_1q_0 = 724$	$\Sigma p_0q_0 = 1272$	$\Sigma p_1q_1 = 1164$	$\Sigma p_0q_1 = 1610$

फिशर आदर्श सूचकांक,

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100 = \sqrt{\frac{724}{1272} \times \frac{1164}{1610}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{842736}{2047920}} \times 100 = \sqrt{0.4115} \times 100 = 64.15$$

प्र.6. निम्नलिखित सूचनाओं से फिशर के सूचकांक की गणना कीजिए–

मद	मूल्य	आधार वर्ष	चालू वर्ष	
		व्यय (p_0q_0)	मूल्य	व्यय (p_1q_1)
A	5	120	8	96
B	6	360	12	600
C	9	450	15	585
D	14	406	7	140

हल इस समस्या में हमें विभिन्न वस्तुओं के लिए व्यय (e) और (P) प्रति इकाई दिया जाता है।

हमारे पास $$\text{व्यय} = \text{मूल्य} \times \text{मात्रा}$$

$\Rightarrow$ $$\text{मात्रा} = \frac{\text{व्यय}}{\text{मूल्य}} = q = \frac{e}{p} \quad \text{...(1)}$$

समीकरण (1) से हम पहले आधार वर्ष और चालू वर्ष के लिए उपभोग की गई मात्राएँ प्राप्त करते हैं जैसा कि अग्रलिखित तालिका में दिया गया है—

फिशर आदर्श सूचकांक की गणना

मदें	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_1q_1	p_1q_0	p_0q_1
A	5	24	8	12	120	96	192	60
B	6	60	12	50	360	600	720	300
C	9	50	15	39	450	585	750	351
D	14	29	7	20	406	140	203	280
					$\Sigma p_0q_0 = 1336$	$\Sigma p_1q_1 = 1421$	$\Sigma p_1q_0 = 1865$	$\Sigma p_0q_1 = 991$

इस प्रकार, फिशर का आदर्श मूल्य सूचकांक

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100 = \sqrt{\frac{1865 \times 1421}{1336 \times 991}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{26,50,165}{13,23,976}} \times 100 = \sqrt{2} \times 100 = 141.4$$

प्र.7. फिशर सूचकांक की गणना कीजिए और यह दिखाइए कि यह उत्क्राम्यता परीक्षणों को कैसे संतुष्ट करता है?

मदें	आधार वर्ष		चालू वर्ष	
	मूल्य	मात्रा	मूल्य	मात्रा
P	10	12	12	15
Q	7	14	5	20
R	5	24	9	30
S	16	5	14	10

उत्तर

फिशर के आदर्श सूचकांक का निर्माण

मदें	आधार वर्ष		चालू वर्ष		p_0q_0	p_1q_0	p_1q_1	p_0q_1
	p_0	q_0	p_1	q_1				
P	10	12	12	15	120	144	180	150
Q	7	14	5	20	98	70	100	140
R	5	24	9	30	120	216	270	150
S	16	5	14	10	80	70	140	160
योग					$\Sigma p_0q_0 = 418$	$\Sigma p_1q_0 = 500$	$\Sigma p_1q_1 = 690$	$\Sigma p_0q_1 = 600$

फिशर का आदर्श सूचकांक

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100 = \sqrt{\frac{500}{418} \times \frac{690}{600}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{3450}{2508}} \times 100 = 117.3$$

समय उत्क्रमणीयता परीक्षण संतुष्ट होता है यदि

$$p_{01} \times P_{10} = 1 = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times \frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1} \times \frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}}$$

तालिका से मूल्य घटाने पर,

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{500}{418} \times \frac{690}{600} \times \frac{600}{690} \times \frac{418}{500}} = \sqrt{1} = 1$$

$\therefore$ फिशर के आदर्श सूत्र द्वारा समय उत्क्रमणीयता परीक्षण संतुष्ट होती है,

$$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

$$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}}$$

मान रखने पर,

$$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{500}{418} \times \frac{690}{600} \times \frac{600}{418} \times \frac{690}{500}} = \frac{690}{418}$$

अब
$$\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} = \frac{690}{418}$$

अत: फिशर का आदर्श सूचकांक उत्क्रमणीयता परीक्षण को भी संतुष्ट करता है।

प्र.8. निम्नलिखित आँकड़ों से फिशर आदर्श सूचकांक ज्ञात कीजिए तथा यह दिखाइए कि यह समय उत्क्रमणीयता परीक्षण और तत्त्व उत्क्रमणीयता परीक्षण को संतुष्ट करता है–

मदें	2013		2014	
	कीमत	मूल्य	कीमत	मूल्य
A	18	140	22	170
B	22	90	28	120
C	12	150	15	180
D	26	90	32	110
E	38	440	60	500

हल

फिशर के आदर्श सूचकांक का निर्माण

मदें	आधार वर्ष		चालू वर्ष		p_0q_0	p_1q_0	p_1q_1	p_0q_1
	p_0	q_0	p_1	q_1				
A	18	140	22	170	2520	3080	3740	3060
B	22	90	28	120	1980	2520	3360	2640
C	12	150	15	180	1800	2250	2700	2160
D	26	90	32	110	2340	2880	3520	2860
E	38	440	60	500	16720	26400	30000	19000
					Σp_0q_0 = **25360**	Σp_1q_0 = **37130**	Σp_1q_1 = **43320**	Σp_0q_1 = **29720**

फिशर आदर्श सूचकांक

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100 = \sqrt{\frac{37130}{25360} \times \frac{43320}{29720}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{1608471600}{753699200}} \times 100 = 1.461 \times 100 = 146.1$$

समय परिवर्तन उत्क्रमणीयता परीक्षण संतुष्ट होगा यदि

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}}$$

सारणी से मान रखने पर,

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{37130}{25360} \times \frac{43320}{29720} \times \frac{29720}{43320} \times \frac{25360}{37130}} = \sqrt{1} = 1$$

$\therefore$ समय परिवर्तनीय उत्क्रमणीयता परीक्षण फिशर समीकरण सूत्र द्वारा संतुष्ट होता है।

फिशर आदर्श सूचकांक कारक परिवर्तनीय परीक्षण को भी संतुष्ट करता है।

$$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times \sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}}$$

मान रखने पर, $$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{37130}{25360} \times \frac{43320}{29720} \times \frac{29720}{25360} \times \frac{43320}{37130}} = \frac{43320}{25360}$$

अब $$\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} = \frac{43320}{25360}.$$

$\therefore$ फिशर का आदर्श सूचकांक उत्क्रमणीयता परीक्षण को भी संतुष्ट करता है।

प्र.9. तीन वस्तुओं के औसत मूल्यों (₹ प्रति इकाई) से 1988 से शृंखलाबद्ध मूल्यानुपात विधि द्वारा मूल्य सूचकांक ज्ञात कीजिए–

वस्तु	1988	1989	1990	1991	1992
X	8	10	12	15	12
Y	10	12	15	18	20
Z	6	9	12	15	18

हल **शृंखलाबद्ध सूचकांक का निर्माण**

वस्तु	1988		1989		1990		1991		1992	
	p_0	LR	p_1	LR	p_2	LR	p_3	LR	p_4	LR
X	8	100	10	$\frac{10}{8}\times 100 = 125$	12	$\frac{12}{10}\times 100 = 120$	15	$\frac{15}{12}\times 100 = 125$	12	$\frac{12}{15}\times 100 = 80$
Y	10	100	12	$\frac{12}{10}\times 100 = 120$	15	$\frac{15}{12}\times 100 = 125$	18	$\frac{18}{15}\times 100 = 120$	20	$\frac{20}{18}\times 100 = 111.1$
Z	6	100	9	$\frac{9}{6}\times 100 = 150$	12	$\frac{12}{9}\times 100 = 133.3$	15	$\frac{15}{12}\times 100 = 125$	18	$\frac{18}{15}\times 100 = 120$
कुल LR	–	300	–	395	–	378.3	–	370	–	311.1
ALR		100		131.7		126.1		123.3		103.7
1988 पर आधारित शृंखला सूचकांक		100		$\frac{100\times 131.7}{100} = 131.7$		$\frac{131.7\times 126.1}{100} = 166.1$		$\frac{166.1\times 123.2}{100} = 204.8$		$\frac{204.8\times 103.7}{100} = 212.4$

प्र.10. निम्नलिखित आँकड़ों से, 4 वर्ष के चल माध्य की गणना कीजिए–

वर्ष	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
उत्पादन	30	32	22	24	12	26	20	14	16	18

हल

आँकड़ों के 4 वर्षीय चल माध्य की गणना

(1) वर्ष	(2) उत्पादन	(3) कुल 4 वर्षीय चल माध्य	(4) 4 वर्षीय चल माध्य (3) ÷ 4	(5) कॉलम (4) के कुल चलों की दो वस्तुएँ	(6) 4 वर्षीय केन्द्रित चल माध्य (5) ÷ 2
2001	30				
2002	32				
		108	27		
2003	22			49.5	24.75
		90	22.5		
2004	24			43.5	21.75
		84	21		
2005	12			41.5	20.75
		82	20.5		
2006	26			38.5	19.25
		72	18		
2007	20			37	18.5
		76	19		
2008	14			36	18
		68	17		
2009	16	–	–		
2010	18	–	–		

Working Notes : पहले 4 वर्षों के कुल चल = 30 + 32 + 22 + 24 = 108,

दूसरे 4 वर्षों के कुल चल = 32 + 22 + 24 + 12 = 90

पहले 4 वर्षों के औसत चल = $\frac{108}{4}$ = 27 और ·········· पहले और दूसरे चल योग

= 27 + 22.5 = 49.5 और ············

पहले चार वर्षों के केन्द्रित औसत चल = 49.5/2 = 24.75

खण्ड-स विस्तृत उत्तरीय प्रश्न

प्र.1. सूचकांक के अर्थ एवं परिभाषा को समझाइए तथा इसके महत्त्व एवं उपयोगिता का विस्तार से वर्णन कीजिए।

उत्तर

सूचकांक या निर्देशांक का अर्थ
(Meaning of Index Numbers)

अर्थ—सरल शब्दों में सूचकांक एक विशेष प्रकार के माध्य होते हैं जो कि आर्थिक एवं व्यापारिक जगत में होने वाले विभिन्न परिवर्तनों के सापेक्षिक अध्ययन के लिये प्रयोग किये जाते हैं। इनकी रचना में किसी एक समय के मूल्यों (values) को 100 मानकर दूसरे समय के मूल्यों का प्रतिशत ज्ञात किया जाता है। इस प्रकार सूचकांक प्रतिशत के रूप में व्यक्त किये गये औसत होते

हैं। ये परिवर्तनों के सूचक होते हैं, इसलिये इन्हें सूचकांक कहते हैं। इन्हें निर्देशांक या देशनांक या मूल्यानुपात (Price Relative) भी कहते हैं।

परिभाषाएँ—सूचकांक की मुख्य परिभाषाएँ इस प्रकार हैं—

ब्लेयर के अनुसार, "निर्देशांक एक विशिष्ट प्रकार के माध्य हैं।"

मरे एवं स्पाइगेल के अनुसार, "निर्देशांक एक ऐसा सांख्यिकीय माप है जो समय, भौगोलिक स्थिति या किसी अन्य विशेषता के आधार पर किसी चर-मूल्य या सम्बन्धित चर-मूल्यों के समूह में होने वाले परिवर्तनों को प्रदर्शित करता है।"

वैसल, विलेट तथा साइमोन के अनुसार, "एक निर्देशांक विशिष्ट प्रकार का माध्य है जो समय-समय अथवा स्थान-स्थान के सापेक्ष परिवर्तनों की माप करता है।"

होरेस सेक्राइस्ट के अनुसार, "सूचकांक अंकों की एक ऐसी श्रेणी है जिसके द्वारा किसी भी तथ्य के परिमाण में होने वाले परिवर्तनों का समय या स्थान के आधार पर मापन किया जा सकता है।"

क्राक्सटन एवं काउडेन के अनुसार, "सूचकांक सम्बन्धित चर मूल्यों के समूहों के परिमाणों के अन्तर को मापने की युक्तियाँ हैं।"

संक्षेप में, हम यह कह सकते हैं कि निर्देशांक अथवा सूचकांक एक विशिष्ट प्रकार के माध्य होते हैं जो आर्थिक जगत में होने वाले परिवर्तनों को सापेक्ष रूप में प्रस्तुत कर तुलनीय बनाते हैं।

निर्देशांकों का महत्त्व एवं उपयोगिता
(Importance and Utility of Index Numbers)

सूचकांकों का प्रयोग मूल्यों में परिवर्तनों का प्रभाव ज्ञात करने के लिये ही किया जाता था, परन्तु आधुनिक समय में इनका प्रयोग सामान्य मूल्य स्तर की प्रवृत्ति के माप तक ही सीमित नहीं है बल्कि जीवन-स्तर, औद्योगिक उत्पादन, कृषि उत्पादन, राष्ट्रीय आय, आयात-निर्यात, जनसंख्या, मजदूरी, खाद्यान्न स्थिति आदि समस्याओं का अध्ययन निर्देशांकों द्वारा किया जाता है। अब शायद ही कोई ऐसा क्षेत्र बचा हो जिसमें सूचकांकों का प्रयोग न होता हो। इस प्रकार निर्देशांक की उपयोगिता प्रत्येक क्षेत्र में है। इसी कारण निर्देशांक आर्थिक वायुमापक यन्त्र (Economic Barometers) कहे जाते हैं। जिस प्रकार वायुमापक यन्त्रों द्वारा वायु के दबाव व मौसम की स्थिति के विषय में अध्ययन किया जाता है और मौसम के बारे में पूर्वानुमान लगाया जाता है, ठीक उसी प्रकार उत्पादन, मूल्य, राष्ट्रीय आय, आयात-निर्यात के निर्देशांकों द्वारा वर्तमान आर्थिक परिस्थितियों का विश्लेषणात्मक अध्ययन किया जाता है तथा भविष्य की आर्थिक प्रवृत्तियों का पूर्वानुमान लगाया जाता है। आर्थिक व सामाजिक परिवर्तनों के तुलनात्मक अध्ययन के लिये निर्देशांक अत्यन्त उपयुक्त आधार प्रस्तुत करते हैं।

एक स्थान से दूसरे स्थान पर पहुँचने में रास्ते के चिह्नों का जो महत्व एक साधारण व्यक्ति के लिये है वही महत्व व्यवसायी के लिये सूचकांक का है। व्यवसायी इनकी सहायता से वस्तुओं के मूल्यों, उत्पादन, क्रय-विक्रय, आयात-निर्यात, माँग, मजदूरी आदि में होने वाले परिवर्तनों की जानकारी प्राप्त करता है और उसकी सहायता से भविष्य के बारे में नीति निर्धारित करके व्यवसाय का सफलतापूर्वक संचालन करता है। व्यवसाय में इनका महत्त्व **ब्लेयर** महोदय ने इस प्रकार स्पष्ट किया है—"सूचकांक व्यवसाय के पथ पर संकेत चिह्न और पथ-प्रदर्शक स्तम्भ हैं जो व्यवसायी को अपनी क्रियाओं के संचालन या प्रबन्ध का ढंग बताते हैं।"

निर्देशांकों के निम्नलिखित उपयोगों से इनका महत्त्व भली-भाँति स्पष्ट हो जायेगा—

1. **तुलनात्मक अध्ययन में सहायक**—निर्देशांकों की सहायता से विभिन्न तथ्यों का तुलनात्मक अध्ययन करना सरल होता है। इसका कारण यह है कि ये परिवर्तनों को सापेक्ष रूप में प्रस्तुत करते हैं। जिससे तुलना करने में कोई असुविधा नहीं होती। उदाहरणार्थ, भवन-निर्माण का ठेकेदार यदि यह जानना चाहे कि सामान्य रूप से भवन-निर्माण लागत में दो समयान्तरों के मध्य क्या परिवर्तन हो गया है तो उसे अनेक पदार्थों; जैसे—ईंट, चूना, इस्पात, टिम्बर, काँच, श्रम आदि के मूल्य परिवर्तनों को मापना होता है। इन पदार्थों के मूल्य अलग-अलग इकाइयों में व्यक्त होंगे तथा सभी पदार्थों के मूल्य में समान अनुपात में परिवर्तन भी नहीं होगा। निर्देशांक तकनीक की सहायता से ही वह यह ज्ञात कर सकता है कि औसत रूप में दो समयावधियों के मध्य भवन-निर्माण की लागत में क्या परिवर्तन हुआ है।
2. **जटिल तथ्यों को सरल बनाना**—निर्देशांकों की सहायता से ऐसे जटिल परिवर्तनों का माप सम्भव हो जाता है जिनका प्रत्यक्ष माप सम्भव नहीं होता है। उदाहरणार्थ किसी देश की व्यापारिक अवस्था का मापन किसी एक ही तथ्य के अध्ययन द्वारा प्रत्यक्ष रूप से सम्भव नहीं है। परन्तु व्यापारिक अवस्था को प्रभावित करने वाले तथ्यों; जैसे—कृषि उत्पादन, औद्योगिक उत्पादन, आयात-निर्यात, यातायात, बैंकिंग आदि की प्रगति के विश्लेषण के आधार पर व्यापारिक-क्रिया

निर्देशांकों की रचना की जा सकती है जिससे व्यापारिक अवस्थाओं में होने वाले परिवर्तनों की सामान्य प्रवृत्ति ज्ञात हो जाती है।

3. **नीति-निर्माण में सहायक**—सूचकांकों के उपयोग द्वारा सरकार, व्यवसायी, अर्थशास्त्री व सामान्य व्यक्ति को नीति निर्धारण और योजना निर्माण में सहायता मिलती है। उदाहरणार्थ, सूचकांकों के आधार पर ही सरकार व उद्योगपति कर्मचारियों को दिये जाने वाले महंगाई भत्ते का निर्धारण करते हैं। अनेक व्यावसायिक व आर्थिक क्रियाओं का मूल्यांकन भी सूचकांकों के आधार पर किया जाता है।
4. **भावी प्रवृत्तियों के संकेत सूचक**—निर्देशांकों की सहायता से भूतकालीन व वर्तमान सूचनाओं के आधार पर भावी प्रवृत्तियों के बारे में अनुमान लगाये जा सकते हैं। इसीलिये सूचकांकों को आर्थिक वायुमापक यन्त्र कहा गया है। उदाहरणार्थ यदि पिछले 10 वर्षों के कीमत निर्देशांकों के विश्लेषण से स्पष्ट होता है कि गत 10 वर्षों में कीमत स्तर में निरन्तर वृद्धि होती रही है तो वर्तमान परिस्थितियों को ध्यान में रखते हुये यह कहा जा सकता है कि भविष्य में भी कीमत स्तर में वृद्धि होगी। इस प्रकार सूचकांकों की सहायता से हमें भविष्य में होने वाली आर्थिक प्रवृत्ति के विषय में वर्तमान में ही संकेत मिल जाता है जिससे वर्तमान क्रियाओं को नियन्त्रित व संचालित किया जा सकता है।
5. **मूल्य स्तर में परिवर्तनों का अध्ययन**—मूल्य सूचकांकों की रचना करके सामान्य मूल्य स्तर, थोक मूल्य, फुटकर मूल्य, जीवन निर्वाह व्यय एवं मुद्रा की क्रय शक्ति में होने वाले परिवर्तनों का माप किया जाता है। इससे वास्तविक आय, मुद्रा का मूल्य, वास्तविक प्रगति वास्तविक राष्ट्रीय आय आदि का ज्ञान होता है।
6. **विभिन्न मूल्यों की अपस्फीति में सहायता**—सूचकांकों की सहायता से विभिन्न मूल्यों की अपस्फीति करने अर्थात् उनका वास्तविक मूल्य ज्ञात करने में सहायता मिलती है। मौद्रिक मजदूरी को वास्तविक मजदूरी में परिवर्तित करने के लिये निर्देशांकों का ही सहारा लेन पड़ता है।
7. **वेतन, महंगाई-भत्ता आदि निश्चित करने में सहायक**—उपभोक्ता मूल्य निर्देशांकों से समाज के विभिन्न वर्गों के रहन-सहन व्यय में होने वाले परिवर्तनों का पता चल जाता है। इसके आधार पर किसी वर्ग विशेष के न्यूनतम वेतन, महँगाई-भत्ता आदि के निश्चित करने में काफी सुविधा रहती है।
8. **मुद्रा की क्रय-शक्ति का माप**—सामान्य-मूल्य निर्देशांकों की सहायता से मुद्रा की क्रय-शक्ति में होने वाले परिवर्तनों का अनुमान लगाया जा सकता है तथा मुद्रा प्रसार व मुद्रा संकुचन की परिस्थितियों को नियन्त्रित करने के लिये उचित कार्यवाही की जा सकती है। उदाहरणार्थ, यदि 1990 की तुलना में वर्ष 2001 का सूचकांक 250 हो जाये तो इसका अर्थ है कि रुपये का मूल्य 40 पैसे रह गया है।
9. **जनसामान्य को लाभ**—विभिन्न प्रकार के निर्देशांकों की सहायता से जनसामान्य भी लाभान्वित होता है। इनके आधार पर सट्टेबाज अपने अनुमान लगाते हैं, बीमा कम्पनियाँ प्रीमियम की दर निश्चित करती हैं, बैंक ब्याज की दर निश्चित करते हैं, रेलवे भाड़े की दर निश्चित करती हैं।

उपर्युक्त विवरण से स्पष्ट है कि निर्देशांक सभी के लिये बहुत उपयोगी है। व्यावसायिक क्षेत्र में तो इनका विशेष महत्त्व है क्योंकि ये आर्थिक गतिविधियों में होने वाले परिवर्तन की सूचना प्रदान कर व्यापारियों का पथ-प्रदर्शन करते हैं। उत्पादन, माँग-पूर्ति, मूल्य, मजदूरी, आयात-निर्यात् के बारे में महत्वपूर्ण जानकारी निर्देशांक द्वारा ही प्राप्त होती है । वास्तव में निर्देशांक सरकार, व्यापारी वर्ग तथा जन-साधारण सभी के लिये उपयोगी है।

प्र.2. निर्देशांकों की विशेषताओं को समझाइए तथा इनकी सीमाओं का भी उल्लेख कीजिए।

उत्तर

निर्देशांकों की विशेषताएँ
(Characteristics of Index Numbers)

निर्देशांकों की निम्नलिखित विशेषताएँ होती हैं—

1. **प्रत्यक्ष मापन न होने वाले परिवर्तनों का माप**—निर्देशांक तकनीक का प्रयोग ऐसे तथ्यों को मापने के लिये किया जाता है जिन्हें प्रत्यक्ष रूप से नहीं मापा जा सकता है। ये तथ्य स्वयं विद्यमान नहीं होते हैं। 'मूल्य स्तर', 'रहन-सहन का व्यय', 'आर्थिक एवं व्यापारिक प्रक्रियायें', 'उत्पादकता' आदि ऐसे तथ्य हैं।
2. **विशिष्ट प्रकार के माध्य**—निर्देशांक एक विशेष प्रकार का माध्य है, क्योंकि साधारण माध्य में समंक एक रूप होते हैं और उनकी मापन-इकाई समान होती है। निर्देशांक विभिन्न मापन-इकाई में व्यक्त चरों का माध्य निकालता है।

3. **तुलना का आधार**—निर्देशांकों की प्रकृति तुलनात्मक होती है। तथ्यों की तुलना दो समयों, स्थानों अथवा अन्य किसी आधार पर की जा सकती है। व्यावहारिक रूप से तुलना समय के आधार पर ही करते हैं। तुलना के लिये जिसे आधार माना जाता है, उसे आधार वर्ष (Base Year) एवं जिस वर्ष की तुलना की जाती है उसे चालू वर्ष (Current Year) कहते हैं।
4. **सार्वभौमिक उपयोग**—सूचकांकों का प्रयोग केवल मूल्य स्तर में होने वाले परिवर्तनों के लिये ही नहीं किया जाता है, वरन इसके द्वारा उत्पादन, व्यापार, आर्थिक क्रियाओं, उत्पादकता आदि विभिन्न क्षेत्रों में परिवर्तनों का मापन किया जाता है। वास्तव में आज ऐसा कोई क्षेत्र नहीं है, जिसमें संख्यात्मक तथ्यों में तुलनात्मक परिवर्तनों को मापने के लिये सूचकांक का प्रयोग न होता हो।
5. **प्रतिशतों का माध्य**—निर्देशांक वास्तव में प्रतिशतों का औसत है, क्योंकि निर्देशांक बनाने के लिये एक समय या स्थान के मूल्यों को 100 मानकर दूसरे समय या स्थान के चल मूल्यों को प्रतिशतों में परिवर्तित कर उनका औसत निकाला जाता है। इस प्रकार निर्देशांक प्रतिशतों में व्यक्त किये जाते हैं जिससे परिवर्तन की सीमा स्पष्ट की जा सके। परन्तु यह ध्यान रखने योग्य है कि निर्देशांकों को प्रस्तुत करते समय प्रतिशत के संकेताक्षर (%) का प्रयोग नहीं किया जाता है।
6. **परिवर्तनों का सापेक्ष माप**—सूचकांकों की सहायता से समूह के तुलनात्मक या सापेक्ष परिवर्तनों का माप किया जाता है। उदाहरणार्थ, मूल्य-सूचकांक विशिष्ट वस्तुओं के मूल्यों में होने वाले वास्तविक अन्तरों को प्रकट नहीं करते बल्कि वे आधार वर्ष की तुलना में चालू वर्ष के मूल्य-स्तर के प्रतिशत परिवर्तनों का सामान्य सापेक्ष माप प्रस्तुत करते हैं। यदि 1990 में थोक मूल्य सूचकांक 100 हो और 2002 में 300 हो जाये तो इसका यह अर्थ हुआ कि 1990 की तुलना में 2002 में मूल्य-स्तर 200% बढ़ गया है।

सूचकांकों की सीमाएँ
(Limitations of Index Numbers)

निर्देशांकों की सार्वभौमिक उपयोगिता होते हुए भी इनकी अपनी कुछ सीमाएँ हैं जिनको इनकी रचना एवं अध्ययन करते समय ध्यान में रखना आवश्यक है। सूचकांकों की प्रमुख सीमाएँ निम्नलिखित हैं—

1. **न्यादर्श पर आधारित**—निर्देशांक की रचना में सभी इकाइयों को सम्मिलित नहीं किया जाता है, वरन कुछ प्रतिनिधि इकाइयों के चयन की सहायता से निर्देशांक तैयार कर लिये जाते हैं अर्थात् निर्देशांक न्यादर्शों पर आधारित होते हैं । इसलिये इनमें पूर्ण शुद्धता एवं विश्वसनीयता नहीं आ पाती। यदि न्यादर्श में शामिल की गई मदें समग्र का उचित प्रतिनिधित्व नहीं करती तो अध्ययन की जाने वाली समस्या के सम्बन्ध में निर्देशांक सही स्थिति प्रकट नहीं कर सकता।
2. **सापेक्ष परिवर्तनों की अनुमानित माप**—निर्देशांक निरपेक्ष परिवर्तनों की अपेक्षा सापेक्ष परिवर्तनों की ही माप करता है और वह भी एक अनुमान के रूप में। इनसे वास्तविक स्थिति का सही ज्ञान नहीं हो पाता क्योंकि ये केवल अनुमानत: संकेतक (approximate indicators) ही होते हैं। वस्तुत: निर्देशांक से ज्ञात निष्कर्ष केवल सामूहिक अथवा औसत रूप में ही सत्य होते हैं। किसी व्यक्तिगत इकाई पर इसके निष्कर्ष पूर्ण रूप से लागू नहीं किये जा सकते हैं। उदाहरणार्थ, यदि यह कहा जाये कि सन् 2000 की तुलना में सन् 2003 में सामान्य मूल्य निर्देशांक 160 हो गया है तो इसका तात्पर्य यह कभी भी नहीं होगा कि प्रत्येक वस्तु का मूल्य 60% बढ़ गया है। हो सकता है किसी वस्तु के मूल्य में 60% से अधिक वृद्धि हुई हो और किसी वस्तु के मूल्य में 60% से कम वृद्धि हुई हो, साथ ही यह भी हो सकता है कि कुछ वस्तुओं के मूल्य घट भी रहे हों, परन्तु सामान्य रूप से 60% की वृद्धि हुई है।
3. **विशिष्ट उद्देश्यों का प्रभाव**—विभिन्न निर्देशांक अलग-अलग उद्देश्यों को पूरा करते हैं। एक निर्देशांक जो एक उद्देश्य के लिये उचित है, अन्य उद्देश्य के लिये अनुपयुक्त हो सकता है। कोई भी निर्देशांक सर्व-उद्देशीय नहीं होता है। उदाहरण के लिये, थोक मूल्य निर्देशांक का प्रयोग जीवन लागत निर्देशांक के स्थान पर नहीं हो सकता।
4. **विभिन्न रीतियों का प्रयोग**—निर्देशांक की रचना विभिन्न रीतियों द्वारा की जा सकती है। अत: एक ही समस्या से सम्बन्धित उपलब्ध निर्देशांकों से भिन्न-भिन्न निष्कर्ष निकलते हैं क्योंकि उनके निर्माण की विधि भिन्न होती है। इसलिये निर्देशांकों का अध्ययन करते समय इस बात को भी ध्यान में रखना चाहिये।
5. **गुणात्मक तथ्यों के परिवर्तनों की उपेक्षा**—सूचकांकों का निर्माण करते समय गुणात्मक तथ्यों के परिवर्तनों पर कोई ध्यान नहीं दिया जाता। उदाहरणार्थ, यदि किसी वस्तु की किस्म में सुधार हो जाने के कारण उसका मूल्य बढ़ गया है तो सूचकांक तैयार करने में उसकी मूल्य वृद्धि सामान्य कारणों से मानी जायेगी,जो कि उचित नहीं है।

6. **निर्देशांकों की रचना सम्बन्धी सीमाएँ**—निर्देशांकों की रचना असावधानी से एवं त्रुटिपूर्ण नहीं होनी चाहिये अन्यथा निष्कर्ष सही नहीं निकलेंगे। इसलिये आधार वर्ष का चुनाव, भार का निर्धारण, माध्य का प्रयोग एवं सूत्रों का प्रयोग सावधानीपूर्वक उचित प्रकार से किया जाना चाहिये।

प्र.3. निर्देशांक की रचना में ध्यान रखने योग्य बातों को विस्तार से समझाइए।

उत्तर

निर्देशांक की रचना में ध्यान रखने योग्य बातें
(Points to be Considered in the Construction of Index Numbers)

निर्देशांकों की रचना करने के पूर्व निम्नलिखित समस्याओं पर विचार करना आवश्यक होता है—

1. **निर्देशांक का उद्देश्य परिभाषित करना**—निर्देशांक की रचना करने से पूर्व यह परम आवश्यक है कि उसके उद्देश्य को स्पष्ट रूप से परिभाषित कर लिया जाये। कोई भी निर्देशांक सर्व-उद्देश्यीय (all-purpose) नहीं होता है । उद्देश्य का सूक्ष्म रूप से निर्धारण किये बिना आगे की समस्याओं; जैसे—वस्तुओं का चुनाव, प्रतिनिधि मूल्यों का चुनाव, आधार वर्ष का चुनाव, माध्य का चुनाव आदि का समाधान असम्भव है। उदाहरण के लिये, यदि निर्देशांक का उद्देश्य सामान्य कीमत स्तर में होने वाले परिवर्तन को ज्ञात करना है तो हमें बहुत-सी वस्तुयें लेनी पड़ेंगी जबकि श्रमिकों के जीवन-निर्वाह निर्देशांक में वे वस्तुयें ही शामिल की जायेंगी जिनका प्रयोग सामान्यत: इन श्रमिकों द्वारा किया जाता है। अत: स्पष्ट है कि निर्देशांक की रचना करने से पूर्व उसके उद्देश्य को निश्चित कर लेना चाहिये।
2. **आधार वर्ष का चुनाव**—आधार वर्ष का चुनाव निर्देशांक रचना में सबसे महत्त्वपूर्ण कार्य है। इसी पर सम्पूर्ण परिणाम आधारित है, जैसा कि नाम से ही स्पष्ट है । इसी की नींव पर निर्देशांक का भव्य भवन निर्मित किया जाता है। इसलिये आवश्यक है कि इसका चुनाव करते समय पूर्ण सावधानी का प्रयोग किया जाये।
   एक निर्देशांक का आधार वर्ष वह वर्ष होता है जिससे अन्य वर्षों की तुलना की जाती है। अन्य शब्दों में, निर्देशांक का आधार एक वर्ष (base year) होता है, जिसके स्तर के आधार पर आगे के वर्षों के अध्ययन के अन्तर्गत चरों के परिवर्तनों को मापा जाता है। यह वर्ष एक सामान्य वर्ष (normal year) होना चाहिये, अर्थात् उस वर्ष न तो मूल्य-स्तर असाधारण रूप से ऊँचा हो और न नीचा हो। आधार वर्ष बहुत पुराना भी नहीं होना चाहिये। यह इसलिये आवश्यक होता है क्योंकि व्यक्ति सामान्यत: वर्तमान दशाओं की तुलना उस आधार अवधि से करना चाहते हैं जो अधिक पुरानी न हो। वर्तमान बदलती हुई परिस्थितियों में आधार वर्ष कभी भी एक दशक से पूर्व का नहीं होना चाहिये।
   संक्षेप में आधार वर्ष के चुनाव के लिये निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखना अत्यन्त आवश्यक है—
   (i) आधार वर्ष एक सामान्य वर्ष होना चाहिये।
   (ii) आधार वर्ष बहुत पुराना नहीं होना चाहिये।
   (iii) आधार स्थिर रहेगा या शृंखलाबद्ध।
3. **वस्तुओं का चुनाव**—मूल्य निर्देशांक वस्तुओं की सहायता से ही निर्मित किये जाते हैं। वास्तव में परिवर्तन वस्तुओं के मूल्यों में ही होता है इसलिए वस्तुओं का चुनाव महत्वपूर्ण है। निर्देशांक की रचना में शामिल की जाने वाली वस्तुओं की सूची को 'Regimen' या 'Basket' कहते हैं। किसी भी निर्देशांक में सभी पदों या वस्तुओं को शामिल कर लेना न तो सम्भव ही होता है और न आवश्यक ही। प्रत्येक निर्देशांक का उद्देश्य एक विशेष वर्ग से सम्बन्धित परिवर्तनों को मापना होता है। पदों का चुनाव किसी भी अवसर (chance) पर नहीं छोड़ा जाता बल्कि विचारात्मक प्रतिदर्श (Judgement Sample) द्वारा किया जाता है। उदाहरण के लिए, खाद्य पदार्थों का निर्देशांक बनाने में, खाद्य वस्तुओं के सूमह का चुनाव इस सावधानी से किया जायेगा जिससे उन वस्तुओं पर उपभोक्ता द्वारा खाद्य पर खर्च किये जाने वाले रुपये का एक बड़ा भाग खर्च होता हो। निर्देशांक के लिये चुने गये पद सम्बन्धित (relevant), प्रतिनिधि, विश्वसनीय तथा तुलना योग्य होने चाहिये।
4. **प्रतिनिधि मूल्यों का चुनाव**—वस्तुओं का चुनाव करने के पश्चात् उनके मूल्यों का चुनाव किया जाता है । मूल्य निर्देशांकों की रचना के लिये मूल्यों का चुनाव बहुत महत्त्वपूर्ण है क्योंकि परिवर्तन की मात्रा इन्हीं के आधार पर मापी जाती है। इनके चुनाव में यदि थोड़ी भी असावधानी की गई तो प्राप्त परिणाम भ्रमात्मक एवं अशुद्ध हो जायेंगे। इस सम्बन्ध में निम्नलिखित प्रश्न उठते हैं जिनका निश्चित उत्तर जान लेना अत्यन्त आवश्यक है।

(i) किन मूल्यों को लिया जाये अर्थात् थोक मूल्य लिये जायें या फुटकर मूल्य लिये जायें?
(ii) मूल्य कहाँ से लिये जायें क्योंकि एक वस्तु का मूल्य सभी स्थानों पर समान नहीं होता।
(iii) मूल्य मुद्रा में लिये जायें या वस्तु परिमाण (मात्रा) में।

वस्तुत: उपरोक्त प्रश्नों के उत्तर सूचकांक के उद्देश्य पर ही निर्भर करते हैं। उदाहरणार्थ, मूल्य निर्देशांक की रचना में अधिकतर थोक मूल्य ही लिये जाते हैं क्योंकि इनमें बहुत कम परिवर्तन होता है किन्तु उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की रचना में फुटकर मूल्यों का प्रयोग ही अधिक उपयुक्त माना जाता है। इसी प्रकार एक विशिष्ट स्थान के निवासियों का जीवन निर्वाह व्यय निर्देशांक बनाते समय उसी स्थान के मूल्यों को प्राप्त करना चाहिये।

5. **माध्य का चुनाव**—जैसा कि हम जानते हैं कि माध्य कई प्रकार के हो सकते हैं; जैसे—समान्तर माध्य, मध्यका, बहुलक, गुणोत्तर माध्य एवं हरात्मक माध्य आदि। निर्देशांक की रचना में इनमें से किसी भी माध्य का प्रयोग किया जा सकता है। अत: निर्देशांक की रचना के पूर्व यह निर्णय भी लेना होगा कि इसके लिये किस माध्य का प्रयोग किया जायेगा।
6. **भारांकन की विधि का चुनाव**—निर्देशांक की रचना हेतु चुनी गयी सभी वस्तुओं का महत्व एक समान नहीं होता है। कुछ वस्तुयें अधिक महत्वपूर्ण होती हैं तो कुछ कम । वस्तुत: अलग-अलग वस्तुओं का अलग सापेक्षिक महत्व होता है। उदाहरणार्थ, यदि गेहूँ का मूल्य दुगना तथा तम्बाकू का मूल्य आधा हो जाये तो वास्तविकता यह है कि उपभोक्ता को तम्बाकू का मूल्य आधा रह जाने से उतना लाभ नहीं होगा जितना गेहूँ का मूल्य दुगना हो जाने से नुकसान होगा। अत: यदि विभिन्न वस्तुओं के सापेक्षिक महत्व को ध्यान में रखे बिना ही निर्देशांक की रचना की जाती है तो ऐसे निर्देशांक से वास्तविक स्थिति का ज्ञान प्राप्त नहीं हो सकता। इसीलिये प्रत्येक वस्तु का उसके महत्व के अनुसार निर्देशांक पर प्रभाव डालने के लिये भारांकन विधि का प्रयोग किया जाता है।

यह तो स्पष्ट हो ही गया है कि विभिन्न वस्तुओं के सापेक्षिक महत्व अलग-अलग होने पर भारित निर्देशांक की रचना करनी चाहिये, परन्तु प्रश्न यह है कि विभिन्न वस्तुओं को किस प्रकार भार प्रदान किया जाये अर्थात् भारांकन की विधि क्या हो? वस्तुत: भारांकन विधि निर्देशांक के उद्देश्य पर निर्भर करती हैं, परन्तु फिर भी भार तर्कयुक्त एवं विवेकपूर्ण होना चाहिये। भार कभी भी ऐच्छिक या काल्पनिक नहीं होने चाहिये। तर्कयुक्त भार निश्चित करने के मुख्य आधार निम्नलिखित हैं—

1. वस्तुओं के उपभोग या उनके मूल्य के आधार पर
2. वस्तुओं के उत्पादन या उनके मूल्य के आधार पर
3. प्रस्तुत की गई वस्तुओं की बिक्री की मात्रा या उनके मूल्य के आधार पर अत: सूचकांकों की रचना से पूर्व यह भी निर्णय लेना पड़ता है कि भार देने की किस विधि का प्रयोग किया जायेगा।

प्र.4. स्थिर आधार रीति को उदाहरण सहित विस्तार से समझाइए।

उत्तर

स्थिर आधार रीति
(Fixed Base Method)

इस रीति के अन्तर्गत आधार मूल्य स्थिर रहता है इसका आशय यह है कि किसी एक वर्ष की अवधि या मूल्य को आधार मानकर अन्य वर्षों के निर्देशांकों की गणना की जाती है। स्थिर आधार दो प्रकार से चुने जाते हैं—1. एक वर्षीय स्थिर आधार और 2. बहु वर्षीय माध्य आधार।

1. एक-वर्षीय स्थिर आधार (One-year Fixed Base)

इस रीति के द्वारा सूचकांक की गणना करने के लिये किसी एक सामान्य वर्ष को आधार वर्ष के रूप में चुन लिया जाता है एवं अन्य सभी वर्षों के मूल्य-स्तर की तुलना उसी चयनित वर्ष के आधार पर की जाती है। स्थिर आधार वर्ष का चुनाव करते समय यह ध्यान रखना चाहिये कि वह पूर्णत: सामान्य वर्ष हो अर्थात् वह ऐसा वर्ष हो जिसमें बाढ़, युद्ध, महामारी आदि असामान्य प्रकोपों के कारण मूल्य-स्तर अस्त-व्यस्त न हो गया हो।

आधार वर्ष के मूल्य को P_0 तथा अन्य सभी वर्षों के मूल्यों को P_1 द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। जिस वर्ष को आधार माना जाता है, उस वर्ष का सूचकांक 100 मानते हैं। अन्य सभी वर्षों के लिये सूचकांक ज्ञात करने का सूत्र निम्नलिखित है—

$$\text{Index No. or Price Relative } (P.R.) = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

उदाहरण—निम्नलिखित आंकड़ों से 1988 को आधार मानकर सभी वर्षों के मूल्यानुपात (सरल निर्देशांक) ज्ञात कीजिए—

वर्ष	1988	1989	1990	1991	1992	1993
कीमत (₹ में)	120	140	150	165	175	240

हल—इस प्रकार, वर्ष 1988 की कीमत $= p_0 = 120, \ldots$

$$1988 \text{ को आधार वर्ष मानकर चालू वर्ष का कीमत सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष की कीमत}}{\text{आधार वर्ष (1988) की कीमत}} \times 100$$

वर्ष	कीमत	गणना	सूचकांक (आधार 1988 = 100)
1988	120	—	100
1989	140	$= \frac{140}{120} \times 100$	116.7
1990	150	$= \frac{150}{120} \times 100$	125.0
1991	165	$= \frac{165}{120} \times 100$	137.5
1992	175	$= \frac{175}{120} \times 100$	145.8
1993	240	$= \frac{240}{120} \times 100$	200

2. बहु-वर्षीय माध्य आधार (Multi-Year Average Base)

किसी एक निश्चित वर्ष को आधार के रूप में लेने से सूचकांकों की गणना में अशुद्धि की सम्भावना रहती है क्योंकि हो सकता है कि कम उत्पादन, लड़ाई-झगड़े, महामारी, मूल्य-नियन्त्रण, आयात-निर्यात आदि कारणों से वह वर्ष असामान्य रहा हो। दूसरे शब्दों में जब किसी एक वर्ष को सामान्य वर्ष के रूप में आधार वर्ष चुनने में कठिनाई आती है तो कुछ वर्षों की औसत कीमत को आधार के रूप में लेना अधिक अच्छा रहता है। ऐसी दशा में प्रदत्त निर्देशानुसार सम्बन्धित वर्षों का माध्य ज्ञात करके उसे P_0 माना जाता है एवं उपर्युक्त वर्णित एक-वर्षीय स्थिर आधार वाले सत्र की सहायता से सूचकांक ज्ञात कर लिये जाते हैं।

उदाहरण—वर्ष 1992 से 1995 तक को आधार मानते हुए निम्न आँकड़ों से सभी वर्षों के कीमत सूचकांक परिकलित कीजिए—

वर्ष	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
कीमत	84	105	123	147	168	210	189	231

हल—

$$P_0 = \text{वर्ष 1992 से 1995 तक की औसत कीमत}$$

$$= \frac{123 + 147 + 168 + 210}{4} = \frac{648}{4} = 162$$

सूत्र : $\text{चालू वर्ष का सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष की कीमत}}{\text{औसत कीमत}} \times 100$

वर्ष	मूल्य	गणना	सूचकांक
1990	84	$\frac{84}{162} \times 100$	51.85
1991	105	$\frac{105}{162} \times 100$	64.81

1992	123	$\frac{123}{162}\times 100$	75.93
1993	147	$\frac{147}{162}\times 100$	90.74
1994	168	$\frac{168}{162}\times 100$	103.70
1995	210	$\frac{210}{162}\times 100$	129.63
1996	189	$\frac{189}{162}\times 100$	116.67
1997	231	$\frac{231}{162}\times 100$	142.59

प्र.5. शृंखला आधार रीति को उदाहरण सहित समझाइए। इसके गुणों तथा अवगुणों का भी वर्णन कीजिए।

उत्तर

शृंखला आधार रीति
(Chain Base Method)

इस रीति में मूल्य अनुपातों को शृंखला अनुपात कहा जाता है इसी आधार पर इनके निर्देशांक शृंखला आधार निर्देशांक कहलाते हैं। इस रीति में प्रत्येक चालू वर्ष के लिए उसका पिछला वर्ष आधार वर्ष माना जाता है, उदाहरण के लिए, 2016 के लिए 2015; 2015 के लिए 2014......... इसी तरह अन्य वर्षों के लिए। इसका आशय यह है कि इन निर्देशांकों के निर्माण में आधार वर्ष, वर्ष प्रतिवर्ष बदलता रहता है। शृंखला अनुपात की गणना करने के लिए निम्न सूत्र प्रयोग किए जाते हैं—

1. शृंखला आधार सूचकांक $= \dfrac{\text{चालू वर्ष का मूल्य}}{\text{पिछले वर्ष का मूल्य}} \times 100$
2. औसत सापेक्ष शृंखला $= \dfrac{\text{कुल सापेक्ष शृंखला}}{\text{वस्तुओं या मदों की संख्या}}$
3. उभयनिष्ठ आधार से जुड़े शृंखला सूचकांक,

   चालू वर्ष के लिए शृंखला सूचकांक $= \dfrac{\text{पिछले वर्ष का शृंखला सूचकांक} \times \text{चालू वर्ष के लिए औसत सापेक्ष शृंखला}}{100}$

शृंखला आधार रीति के गुण (Advantages of Chain Base Method)

1. इन निर्देशांकों की सहायता से निकट के दो वर्षों के बीच मूल्यों में परिवर्तन की तुलना सरल हो जाती है जिससे प्रत्येक चालू वर्ष में ठीक उससे पिछले वर्ष की तुलना में मूल्यों में हुए परिवर्तनों की जानकारी मिल जाती है।
2. यह निर्देशांक मौसमी एवं चक्रीय परिवर्तन से प्रभावित नहीं होते हैं।
3. इन निर्देशांकों में पुरानी अनावश्यक मदों को छोड़ा जा सकता है और आवश्यक नई मदों को शामिल किया जा सकता है।

शृंखला आधार रीति के अवगुण (Disadvantages of Chain Method)

1. इन निर्देशांकों की रचना तुलनात्मक रूप से कठिन होती है और गणित्य होती है।
2. यह निर्देशांक दीर्घकालीन परिवर्तनों का तुलनात्मक अध्ययन करने के लिए उचित नहीं है।
3. इन निर्देशांकों में किसी एक स्थान पर अशुद्धि का प्रभाव अन्य सभी गणितीय परिणामों पर पड़ता है।

उदाहरण—निम्न छः वर्षों के लिए गेहूँ की कीमत दी हुई है। शृंखला मूल्यानुपातों की गणना कीजिए—

वर्ष	1989	1990	1991	1992	1993	1994
कीमत (रुपये प्रति क्विण्टल)	300	345	355	400	415	425

हल—चालू वर्ष की कीमत सापेक्ष शृंखला $= \dfrac{\text{चालू वर्ष की कीमत}}{\text{पिछले वर्ष की कीमत}} \times 100$

वर्ष	कीमत	गणना	कीमत सापेक्ष शृंखला (शृंखला आधारित सूचकांक)
1989	300	—	100
1990	345	$\frac{345}{300} \times 100$	115
1991	355	$\frac{355}{345} \times 100$	103
1992	400	$\frac{400}{355} \times 100$	113
1993	415	$\frac{415}{400} \times 100$	104
1994	425	$\frac{425}{415} \times 100$	102

प्र.6. आधार के रूपांतरण एवं स्थानान्तरण को उदाहरण सहित समझाइए।

उत्तर

आधार का रूपांतरण
(Base Conversion)

कभी-कभी स्थायी आधार सूचकांक को शृंखला आधार सूचकांक में एवं इसके विपरीत परिवर्तित किया जाता है। रूपांतरण के लिए उपयोग की जाने वाली विधियाँ निम्नलिखित हैं—

1. शृंखला आधार सूचकांक से स्थायी आधार सूचकांक में रूपांतरण (Conversion of Chain Base Index to Fixed Base Index)

शृंखला आधार को स्थायी आधार सूचकांक में परिवर्तित करने के लिए निम्नलिखित विधियों का उपयोग किया जाता है—

1. स्थायी आधार सूचकांक प्रथम वर्ष शृंखला आधार सूचकांक के समान होता है, यदि प्रथम वर्ष में किसी समस्या में आधार वर्ष के रूप में कार्य किया जाता है तो स्थायी आधार सूचकांक 100 होता है।
2. निम्नलिखित सूत्र का उपयोग सकल वर्षों के लिए स्थायी आधार सूचकांकों की गणना के लिए किया जाता है—
   चालू वर्ष का स्थायी आधार सूचकांक

$$= \frac{\text{चालू वर्ष का शृंखला आधार सूचकांक} \times \text{गत वर्ष का स्थायी आधार सूचकांक}}{100}$$

उदाहरण—नीचे दिए गए शृंखला आधार सूचकांक से स्थिर आधार सूचकांक को ज्ञात कीजिए—

वर्ष	2010	2011	2012	2013	2014
चालू आधार सूचकांक	136	162	148	154	185

हल—

सीबीआई का एफबीआई में रूपांतरण

वर्ष	CBI	रूपान्तरण	FBI
2010	136	—	136.00
2011	162	$\frac{162 \times 136}{100}$	220.32
2012	148	$\frac{148 \times 220.32}{100}$	326.1
2013	154	$\frac{154 \times 326.1}{100}$	502.2
2014	185	$\frac{185 \times 502.2}{100}$	929.07

2. स्थायी आधार सूचकांक से शृंखला आधार सूचकांक में रूपांतरण (Conversion of Fixed Base Index to Chain Base Index)

निम्नलिखित प्रक्रिया का उपयोग स्थायी आधार सूचकांक को शृंखला आधार सूचकांक में परिवर्तित करने के लिए किया जाता है—

1. सीबीआई के पास पूर्व से ही एफबीआई के समान आधार हैं।
2. निम्नलिखित सूत्र का उपयोग आगामी वर्ष के लिए स्थायी आधार सूचकांक से शृंखला आधारित सूचकांक की गणना करने के लिए किया जाता है—

$$\text{चालू वर्ष का सीबीआई} = \frac{\text{चालू वर्ष का एफबीआई}}{\text{गत वर्ष का एफबीआई}} \times 100$$

उदाहरण—निम्नलिखित आँकड़ों से स्थायी आधार सूचकांकों से, शृंखला आधार सूचकांक तैयार कीजिए—

वर्ष	2008	2009	2010	2011	2012	2013
एफबीआई	120	150	190	260	320	450

हल—

एफबीआई से सीबीआई में रूपान्तरण

वर्ष	FBI	रूपान्तरण	CBI
2008	120	—	120
2009	150	$\frac{150}{120} \times 100$	125.00
2010	190	$\frac{190}{150} \times 100$	126.67
2011	260	$\frac{260}{190} \times 100$	136.84
2012	320	$\frac{320}{260} \times 100$	123.08
2013	450	$\frac{450}{320} \times 100$	140.63

आधार स्थानान्तरण (Base Shifting)

आधार वर्ष में स्थानान्तरण से आशय यह है कि दिए गए आधार वर्ष के पुराने होने पर सूचकांकों की शृंखला के आधार को एक अवधि से दूसरी अवधि में स्थानान्तरण किया जाता है। आधार वर्ष में परिवर्तन होने पर पूरी शृंखला के नए निर्माण के साथ-साथ तुलना की बेहतर सम्भावना होती है। इस प्रकार आधार वर्ष के स्थानान्तरण के दौरान नए सूचकांक को वर्तमान वर्ष की पुरानी संख्या को आधार वर्ष की पुरानी सूचकांक से विभाजित करके निर्धारित किया जाता है। इससे प्राप्त परिणाम को 100 से गुणा किया जाता है। आधार वर्ष के स्थानान्तरण के सूत्र निम्नलिखित हैं—

$$P_{01} = \frac{P_0}{P_1} \times 100$$

जहाँ, P_0 = आधार वर्ष का सूचकांक, P_1 = आधार के रूप में लिए गए नए (या वर्तमान) सूचकांक।

उदाहरण—2005 से 2009 तक के आधार वर्ष में स्थानान्तरण करके निम्नलिखित आँकड़ों के लिए नई शृंखला का निर्माण कीजिए—

वर्ष	सूचकांक (2005 = 100)	वर्ष	सूचकांक (2005 = 100)
2005	100	2010	370
2006	130	2011	410
2007	180	2012	440
2008	220	2013	455
2009	300	2014	448

हल—

नए सूचकांक की गणना

Year	Old Index No. (2005 = 100)	New Index No. (2009 = 300)	Year	Old Index No. (2005 = 100)	New Index No. (2009 = 300)
2005	100	$\frac{100}{300} \times 100 = 33.33$	2010	370	$\frac{370}{300} \times 100 = 123.33$
2006	130	$\frac{130}{300} \times 100 = 43.33$	2011	410	$\frac{410}{300} \times 100 = 136.67$
2007	180	$\frac{180}{300} \times 100 = 60$	2012	440	$\frac{440}{300} \times 100 = 146.67$
2008	220	$\frac{220}{300} \times 100 = 73.33$	2013	455	$\frac{455}{300} \times 100 = 151.67$
2009	300	100.00	2014	448	$\frac{448}{300} \times 100 = 149.33$

प्र.7. सूचकांकों की अपस्फीति एवं शिरोबन्धन का उदाहरण सहित विस्तृत वर्णन कीजिए।

उत्तर

सूचकांकों की अपस्फीति
(Deflating of Index Numbers)

मूल्य स्तर में परिवर्तन आवंटित करने के पश्चात् किसी शृंखला के मूल्यों की समायोजित करने की तकनीक को अपस्फीति के रूप में जाना जाता है। यदि मूल्यों में वृद्धि होती है, तो कोई व्यक्ति पूर्व के वर्षों में उसी राशि से कम मात्रा में क्रय कर सकता है। ऐसा कहा जाता है कि मूल्य की क्रय शक्ति में कमी हो जाती है। परिणामस्वरूप, यह निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता है, कि मूल्य के आय में किसी भी वृद्धि के परिणामस्वरूप, जीवन स्तर में समान प्रतिशत में वृद्धि होती है। इसका अर्थ यह है कि वास्तविक आय, मूल्य आय से अधिक है, इसकी उचित प्रकार से तुलना करने के लिए निर्वाह लागत की सूचकांकों में परिवर्तन करने के लिए धन की आय को समायोजित करना आवश्यक होता है।

अतः, निर्वाह लागत की सूचकांक से धन आय की अपस्फीति के पश्चात् वास्तविक आय प्राप्त होती है।

$$\text{वास्तविक आय} = \frac{\text{मौद्रिक आय}}{\text{निर्वाह लागत सूचकांक}} \times 100$$

'वास्तविक मजदूरी' के साथ-साथ मूल्य शृंखला, रुपए की बिक्री आदि को ज्ञात करने के लिए अपस्फीति की तकनीक को व्यापक मूल्य सूचकांक के साथ बड़े पैमाने पर उपयोग किया जाता है। इस तकनीक के द्वारा मूल्यों की एक शृंखला जिसकी गणना वर्तमान मूल्यों पर की जाती है, एक दिए गए वर्ष के लिए निरंतर मूल्यों में परिवर्तित हो जाती है और मूल्य की क्रय शक्ति को मापने के लिए उपयोग की जाती है।

$$\text{वास्तविक मजदूरी} = \frac{\text{मुद्रा या नाममात्र मजदूरी}}{\text{मूल्य सूचकांक}} \times 100$$

$$\text{अपस्फीति मूल्य का वास्तविक मूल्य} = \frac{\text{चालू मूल्य}}{\text{चालू वर्ष का मूल्य सूचकांक}} \times 100$$

उदाहरण—निर्वाह सूचकांक की लागत में वृद्धि के आधार पर निम्नलिखित तालिका में दर्शायी गई प्रति व्यक्ति आय को परिभाषित कीजिए—

वर्ष	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
निर्वाह लागत सूचकांक	100	115	130	140	155	220	245	340
प्रति व्यक्ति आय (₹)	75	90	100	110	130	145	150	170

हल—

प्रति व्यक्ति आय अपस्फीति

वर्ष	जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक (2006 = 100)	वास्तविक प्रति पूँजी आय (₹)	वास्तविक आय (₹)
2006	100	75	75.00
2007	115	90	$\frac{90}{115} \times 100 = 78.26$
2008	130	100	$\frac{100}{130} \times 100 = 76.92$
2009	140	110	$\frac{110}{140} \times 100 = 78.57$
2010	155	130	$\frac{130}{155} \times 100 = 83.87$
2011	220	145	$\frac{145}{220} \times 100 = 65.90$
2012	245	150	$\frac{150}{245} \times 100 = 61.22$
2013	340	170	$\frac{170}{340} \times 100 = 50.00$

शिरोबन्धन (Splicing)

जब एक सूचकांक शृंखला का आधार वर्ष बहुत पुराना हो जाता है, तो इसे सामान्य रूप से समाप्त कर दिया जाता है और आधुनिक समय में गत वर्षों के साथ एक नयी शृंखला को आधार के रूप में प्रारम्भ किया जाता है। कभी-कभी इन दो शृंखलाओं को संयोजित करना आवश्यक हो जाता है।

यदि दो या दो अधिक अतिव्यापी सूचकांक शृंखला के संयोजन की प्रक्रिया को शिरोबन्धन कहा जाता है तो A को पुरानी शृंखला और B को नयी शृंखला कहा जाता है या तो B को A या इसके विपरीत कहा जा सकता है। जब B को A की शिरोबन्धन शृंखला का आधार बनाया जाता है तो वह शृंखला A के समान होता है। इसी प्रकार जब A को B की शिरोबन्धन का आधार बनाया जाता है तो, शिरोबन्धन शृंखला का आधार B शृंखला के समान होता है। शिरोबन्धन के लिए, न्यूनतम एक वर्ष तक दोनों की शृंखलाओं के सूचकांक समान होने चाहिए। सामान्य रूप से, यह वर्ष नयी शृंखला आधार वर्ष होता है। इसे देखते हुए हम दोनों स्थितियों में से प्रत्येक के लिए एक सुधार करके प्राप्त कर सकते हैं।

1. जब B को A से शिरोबन्धन किया जाता है।

$$\text{सुधार कारक} = \frac{\text{सुधार वर्ष का श्रेणी } A \text{ का सूचकांक} - \text{श्रेणी } B \text{ के आधार वर्ष का स्पोर्डिंग}}{100}$$

   शृंखला B के सूचकांक को इस सुधार कारक द्वारा गुणा किया जा सकता है जैसे जिससे शिरोबंधन शृंखला प्राप्त की जा सकती है।

2. जब A को B से शिरोबंधन किया जाता है। इस परिस्थिति में शृंखला A के साथ सूचकांकों को शिरोबन्धन शृंखला प्राप्त करने के लिए उपरोक्त सुधार, कारक द्वारा विभाजित किया गया है।

उदाहरण—नीचे दिए गए दो सूचकांक शृंखला है एक 1981 आधार वर्ष के रूप में और दूसरी 1982 आधार वर्ष के रूप में

श्रेणी A	**सूचकांक वर्ष**	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
		100	110	120	130	170	200	240	300	350
श्रेणी B	**सूचकांक वर्ष**	1989	1990	1991	1992					
		100	125	160	190					

1. B शृंखला से A शृंखला का शिरोबंध (या A शृंखला का अग्रसर)।
2. A शृंखला से B शृंखला का शिरोबंध (या B शृंखला का अग्रसर)।

हल— The Correction factor $= \frac{350}{100} = 3.5$

वर्ष	श्रेणी A	श्रेणी B	श्रेणी B का श्रेणी A में शिरोबन्धन	श्रेणी A का श्रेणी B में शिरोबन्धन
1981	100		100	$\frac{100\times 100}{350} = 28.6$
1982	110		110	$\frac{110\times 100}{350} = 31.4$
1983	120		120	$\frac{120\times 100}{350} = 34.3$
1984	130		130	$\frac{130\times 100}{350} = 37.1$
1985	170		170	$\frac{170\times 100}{350} = 48.6$
1986	200		200	$\frac{200\times 100}{350} = 57.1$
1987	240		240	$\frac{240\times 100}{350} = 68.6$
1988	300		300	$\frac{300\times 100}{350} = 85.7$
1989	350	100	350	100
1990		125	$\frac{125\times 350}{100} = 437.5$	125
1991		160	$\frac{160\times 350}{100} = 560$	160
1992		190	$\frac{190\times 350}{100} = 665$	190

प्र.8. उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का विस्तृत वर्णन कीजिए।

***अथवा* उपभोक्ता मूल्य सूचकांक के उद्देश्य, उपयोग एवं निर्माण को समझाइए।**

उत्तर

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक
(Consumer Price Index)

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक को सामान्य रूप से जीवन-निर्वाह की लागत कहा जाता है। यह उत्पाद के वास्तविक उपयोगकर्त्ता द्वारा भुगतान किए गए मूल्य में परिवर्तन करता है। मूल्य परिवर्तन विभिन्न प्रकार से विभिन्न व्यक्तियों के जीवन स्तर को प्रभावित करता है। इसे सामान्य सूचकांक का उपयोग करके नहीं मापा जा सकता है। इस कारण से उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का निर्माण किया जाता है। व्यक्ति विभिन्न प्रकार के वस्तुओं का उपयोग करते हैं और व्यक्तियों की आदत एक व्यक्ति से दूसरे व्यक्ति, एक स्थान से दूसरे स्थान तथा एक वर्ग से दूसरे वर्ग में भिन्न होती है। उपभोक्ता मूल्य सूचकांक द्वारा शामिल किए गए जनसंख्या के समूह को परिभाषित या निर्दिष्ट किया जाता है, जैसे—गरीब वर्ग, मध्य वर्ग, शहरी वर्ग, ग्रामीण वर्ग आदि भौगोलिक क्षेत्र हैं।

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक के उद्देश्य (Objectives of Consumer Price Index)

1. उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का उद्देश्य कर शुल्क आय की क्रय शक्ति पर 'मूल्य परिवर्तन' के प्रभाव को निर्धारित करना है।
2. यह मुद्रास्फीति को चिह्नित करता है।
3. उस स्थिति में जब मौद्रिक नीति की सहायता से निर्णय लिए जाते हैं, तब यह मुद्रास्फीति को नियंत्रित करने पर केंद्रित होता है।

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक के उपयोग (Uses of Consumer Price Index)

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक के महत्त्वपूर्ण उपयोग इस प्रकार हैं—

1. **महंगाई भत्ता एवं बोनस नीति के विनियमन**—महंगाई भत्ता एवं बोनस को निश्चित करने के लिए, विभिन्न नियोक्ता एवं सरकार उपकरण के रूप में सूचकांक का उपयोग करते हैं।
2. **मूल्य की क्रय शक्ति एवं वास्तविक मजदूरी के मूल्य का निर्धारण**—यह एक उपकरण के रूप में कार्य करता है जो मूल्य की क्रय शक्ति एवं वास्तविक मजदूरी के मूल्य को निम्नानुसार मापता है—

   (i) मुद्रा की क्रय शक्ति $= \dfrac{1}{\text{मूल्य सूचकांक}} \times 100$

   (ii) वास्तविक मजदूरी $= \dfrac{\text{मुद्रा मजदूरी}}{\text{मूल्य सूचकांक}} \times 100$

   वास्तविक आय सूचकांक $= \dfrac{\text{चालू वर्ष की वास्तविक आय}}{\text{स्थायी आधार वर्ष की वास्तविक आय}} \times 100$

   जहाँ, मूल्य सूचकांक = जीवन निर्वाह की सूचकांक लागत।
3. **आय एवं मूल्यों की अवस्फीति**—इसका उपयोग राष्ट्रीय खाते की आय को न्यूनतम करने के लिए किया जाता है।
4. **सरकारी नीतियों के निर्धारण**—सरकारी विभिन्न नीतियों जैसे कि आर्थिक नीति, आय नीति आदि को विनियमित करने के लिए उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का उपयोग किया जाता है।
5. **मूल्य स्थितियों के विश्लेषण**—इसका उपयोग किसी विशिष्ट समुदाय की मूल्य स्थिति का विश्लेषण करने के लिए किया जाता है।

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का निर्माण (Formation of Consumer Price Index)

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक के निर्माण में उपयोग की जाने वाली दो विधियाँ निम्नलिखित हैं—

1. **सम्पूर्ण व्यय विधि**—यह लैस्पियरे की विधि पर आधारित होती है। आधार वर्ष में किसी विशिष्ट समूह द्वारा उपभोग की जाने वाली वस्तुओं की मात्रा को मापने के लिए इसका व्यापक रूप से उपयोग किया जाता है—

$$\text{उपभोक्ता मूल्य सूचकांक} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

उदाहरण—सम्पूर्ण व्यय विधि का उपयोग करके निम्नलिखित आंकड़ों से 2010 के आधार पर 2014 के लिए उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की गणना कीजिए।

वस्तु	उपयोगित मात्रा	मूल्य	
		2010 में	**2014 में**
A	150	10	14
B	30	5	9
C	22	7	16
D	28	22	26

हल—सम्पूर्ण व्यय विधि के लिए $\Sigma p_0 q_0$, $\Sigma p_1 q_0$, का मान ज्ञात करते हैं, जिसकी गणना निम्नलिखित तालिका में की गई है—

वस्तु	q_0	p_0	p_1	$p_0 q_0$	$p_1 q_0$
A	150	10	14	1500	2100
B	30	5	9	150	270
C	22	7	16	154	352
D	28	22	26	616	728
				$\Sigma p_0 q_0 = 2420$	$\Sigma p_1 q_0 = 3450$

समूहीकृत व्यय विधि द्वारा उपभोक्ता मूल्य सूचकांक

$$= \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \frac{3450}{2420} \times 100 = 142.56$$

2. **पारिवारिक बजट विधि या सापेक्ष भारित विधि**—इसका उपयोग विभिन्न वस्तुओं पर एक औसत परिवार के कुल व्यय को निर्धारित करने के लिए किया जाता है। उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की गणना करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का उपयोग किया जाता है,

$$\text{उपभोक्ता मूल्य सूचकांक} = \frac{\Sigma PW}{\Sigma W}$$

(जहाँ), $P = \frac{p_1}{p_0} \times 100$ प्रत्येक मद के लिए; W = भारित मूल्य $(i.e.,)\ p_0 q_0$

नोट—'भारित मूल्यानुपात विधि' और 'परिवारिक बजट विधि' उपभोक्ता मूल्य सूचकांक को ज्ञात करने के लिए समान होते हैं।

उदाहरण—सापेक्ष भारित मूल्यानुपात की विधि का उपयोग करके निम्नलिखित आंकड़ों से 2009 के आधार पर 2013 के लिए उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का निर्माण कीजिए।

वस्तु	उपयोगिता मात्रा	मूल्य	
		2009 में	2013 में
A	110	6	9
B	40	8	14
C	15	4	19
D	70	12	21

हल—

वस्तु	q_0	p_0	p_1	मूल्य सापेक्ष $(P) = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	भार $(W) = p_0 \times q_0$	$P \times W$
A	110	6	9	150	660	99000
B	40	8	14	175	320	56000
C	15	4	19	475	60	28500
D	70	12	21	175	840	147000
योग				$\Sigma P = 975$	$\Sigma W = 1880$	$\Sigma PW = 330500$

$$\text{उपभोक्ता मूल्य सूचकांक} = \frac{\Sigma PW}{\Sigma W} = \frac{330500}{1880} = 175.79$$

प्र.9. समय उत्क्राम्यता परीक्षण और तत्त्व उत्क्राम्यता परीक्षण किन्हें कहते हैं? यह बताइए कि फिशर का आदर्श सूचकांक किस प्रकार इन परीक्षणों को सन्तुष्ट करता है?

उत्तर

उत्क्राम्यता का परीक्षण
(Test of Reversibility)

सूचकांकों के निर्माण के लिए विभिन्न विधियाँ उपलब्ध हैं, परन्तु समस्या यह है कि प्रदान की गयी स्थिति में सबसे उपयुक्त स्थिति को ज्ञात करना होता है। उपयुक्त विधि का चयन करने के लिए, निम्नलिखित परीक्षण प्रस्तावित है—

1. समय उत्क्राम्यता परीक्षण (Time Reversibility Test)

प्रोफेसर इरविंग फिशर ने विभिन्न परीक्षण दिए हैं जो यह परीक्षण करने के लिए विभिन्न विधियों को लागू कर सकते हैं कि यह विधि संतोषजनक होती है या नहीं। इसमें निम्नलिखित दो सबसे महत्वपूर्ण परीक्षण हैं—समय उत्क्राम्यता परीक्षण और तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण। समय उत्क्राम्यता परीक्षण यह परीक्षण करता है कि इसमें कोई भी विधि आगे या पीछे की दिशा में कार्य करती है या नहीं।

फिशर के अनुसार, "परीक्षण यह है कि सूचकांक की गणना करने का सूत्र ऐसा होना चाहिए कि यह तुलना के एक बिन्दु एवं दूसरे के मध्य समान अनुपात दिया जाता है, इससे कोई प्रभाव नहीं पड़ता है कि दोनों में से किसे आधार के रूप में लिया गया है। दूसरे शब्दों, जब किसी भी दो वर्षों के लिए आंकड़ों को एक ही विधि द्वारा व्यवहारित किया जाता है, परन्तु उत्क्राम्यता आधारों के साथ, सुरक्षित किए दो सूचकांक एक-दूसरे के पारस्परिक होने चाहिए जिससे उनके उत्पाद में एकता हो। गणितीय रूप से, निम्नलिखित सम्बन्ध संतुष्ट होने चाहिए—

$$P_{01} \times P_{10} = 1$$

जहाँ, P_{01} = समय के लिए सूचकांक "1" समय पर "0" आधार के रूप में,

P_{10} = आधार के रूप में समय "0" पर समय "1" के लिए।

लैस्पियरे की विधि एवं पाश्चे की विधि से परीक्षण संतुष्ट नहीं हैं—जहाँ, लैस्पियरे की विधि का उपयोग किया जाता है—

$$P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}; \text{ and } P_{10} = \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \text{ और } P_{01} \times P_{10} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \neq$$ जहाँ परीक्षण संतुष्ट नहीं है।

जहाँ पाश्चे की विधि का उपयोग किया जाता है—

$$P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}; \text{ and } P_{10} = \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0} \text{ और } P_{01} \times P_{10} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \neq 1$$ जहाँ परीक्षण संतुष्ट नहीं है।

इसकी निम्नलिखित विधियाँ हैं जो इस विधि को संतुष्ट करती है—

1. फिशर का आदर्श सूत्र
2. साधारण गुणोत्तर माध्य का सापेक्ष मूल्य
3. संपूर्ण स्थायी भार
4. स्थायी भार के सापेक्ष मूल्य का भारित गुणोत्तर माध्य
5. मार्शल एजवर्थ विधि

फिशर का आदर्श सूत्र परीक्षण को संतुष्ट करता है—

$$\text{फिशर विधि के अनुसार, } P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$$

समय परिवर्तन अर्थात् 0 को 1 से तथा 1 को 0 से,

$$P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}} \text{ और } P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}} = \sqrt{1} = 1$$

अत: फिशर का आदर्श सूचकांक इस परीक्षण को संतुष्ट करता है।

2. कारक उत्क्राम्यता परीक्षण (Factor Reversibility Test)

फिशर के अनुसार, "जैसा कि प्रत्येक सूत्र को असंगत परिणामों को प्रदान किए बिना दो बार के परस्पर विनिमय की अनुमति प्रदान करनी चाहिए, इसलिए यह असंगत परिणाम प्रदान किये बिना मूल्यों एवं मात्राओं को परस्पर विनिमय की अनुमति प्रदान करनी चाहिए, अर्थात्, दो परिणामों को एक साथ गुणा करने पर वास्तविक मूल्य अनुपात प्रदान करना चाहिए।" दूसरे शब्दों में, परीक्षण यह है कि मात्रा में परिवर्तन से गुणा किए गए मूल्य में परिवर्तन किसी दिए गए वर्ष में दिए गए वस्तु के कुल मूल्य के समान होने चाहिए, मात्रा एवं प्रति इकाई मूल्य का गुणनफल (कुल मूल्य = $P \times q$) है। पूर्ववर्ती वर्ष में एक वर्ष में कुल मूल्य का अनुपात $\dfrac{P_1 q_1}{P_1 q_0}$ है।

यदि P_1 एवं P_0 मूल्यों में q_1 और q_0 को चालू वर्ष और आधार वर्ष में मात्राओं का प्रतिनिधित्व करते हैं, तथा यदि P_{01} चालू वर्ष और q_0 मूल्य में परिवर्तन का प्रतिनिधित्व करता है, तो चालू वर्ष में मात्रा का परिवर्तन निम्न होगा है—

$$P_{10} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

यदि उत्पाद मूल्य अनुपात के समान नहीं तो इस परीक्षण के सन्दर्भ में, एक या दोनों सूचकांकों में त्रुटि हो सकती है। अत: केवल फिशर के आदर्श सूचकांक इस परीक्षण को संतुष्ट करते हैं—

सत्यापन : $$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$$

अत: P को q में और q को P में परिवर्तन करने से हमें प्राप्त होता है—

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}}$$

और $$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}} = \sqrt{\frac{(\Sigma p_1 q_1)^2}{(\Sigma p_0 q_0)^2}} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

$\therefore\ P_{01} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$ कारक परिवर्तन परीक्षण फिशर द्वारा दी गई आदर्श सूचकांक से संतुष्ट होता है।

उदाहरण—फिशर आदर्श सूचकांक का उपयोग करके सूचकांक की गणना कीजिए और यह दिखाइए कि यह समय उत्क्राम्यता परीक्षण एवं कारक परीक्षण को सन्तुष्ट करता है।

	आधार वर्ष		चालू वर्ष	
	मात्रा	मूल्य	मात्रा	मूल्य
A	18	12	14	15
B	24	9	22	17
C	21	3	16	11
D	7	15	5	9

हल—

सूचकांक की गणना

वस्तु	q_0	p_0	q_1	p_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
A	18	12	14	15	270	216	210	168
B	24	9	22	17	408	216	374	198
C	21	3	16	11	231	63	176	48
D	7	15	5	9	63	105	45	75
					$\Sigma p_1q_0 = 972$	$\Sigma p_0q_0 = 600$	$\Sigma p_1q_1 = 805$	$\Sigma p_0q_1 = 489$

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100 = \sqrt{\frac{972}{600} \times \frac{805}{489}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{782460}{293400}} \times 100 = \sqrt{2.66} \times 100 = 163.1$$

1. **समय उत्क्राम्यता परीक्षण**—$P_{01} \times P_{10} = 1$ होने पर समय उत्क्राम्यता परीक्षण संतुष्ट होता है।

$$P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}} = \sqrt{\frac{489}{805} \times \frac{600}{972}} = 0.61$$

$$P_{01}P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0} \times \frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1} \times \frac{\Sigma P_0 q_1}{\Sigma P_1 q_1} \times \frac{\Sigma P_0 q_0}{\Sigma P_1 q_0}} = \sqrt{1} = 1$$

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{972}{600} \times \frac{805}{489} \times \frac{489}{805} \times \frac{600}{972}} = \sqrt{1} = 1$$

2. **कारक उत्क्राम्यता परीक्षण**—कारक उत्क्राम्यता परीक्षण संतुष्ट होता है, जब

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$$

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}}$$

$$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{972}{600} \times \frac{805}{489} \times \frac{489}{600} \times \frac{805}{972}} = \frac{805}{600}, i.e., \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

$$\therefore \quad P_{01} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

इसलिए, दिए गए आँकड़े समय उत्क्राम्यता परीक्षण एवं कारक उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करते हैं।

प्र.10. काल-श्रेणी से आप क्या समझते हैं? काल-श्रेणी विश्लेषण के महत्त्व को विस्तार से वर्णन कीजिए।

उत्तर

काल-श्रेणी का अर्थ एवं परिभाषाएँ
(Meaning and Definitions of Time Series)

'काल-श्रेणी' का आशय ऐसी श्रेणी या समंकमाला से है, जिसमें 'काल' अर्थात् समय के आधार पर समंक प्रस्तुत किये जाते हैं। समय का माप दिन, सप्ताह, माह, वर्ष, सेकण्ड एवं घण्टा कुछ भी हो सकता है। दैनिक तापमान,मासिक मूल्य, वार्षिक उत्पादन आदि सभी काल-श्रेणी के उदाहरण हैं। काल-श्रेणी के अन्तर्गत दो प्रकार के चर-मूल्य होते हैं—(i) स्वतन्त्र चर-मूल्य (independent variable), तथा (ii) आश्रित वर-मूल्य (dependent variable)। स्वतन्त्र चर-मूल्य समय को प्रदर्शित करते हैं जबकि आश्रित चर-मूल्य समय के साथ-साथ समंकों के मूल्य में होने वाले परिवर्तनों के प्रभाव को प्रदर्शित करते हैं। संक्षेप में काल-श्रेणी दो चर मूल्यों में कारण (cause) तथा प्रभाव (effect) का सम्बन्ध स्थापित करती है। इन चरों में से एक चर 'समय' है जोकि स्वतन्त्र चर होता है तथा दूसरा चर 'समंक' है जोकि आश्रित चर कहलाता है। काल-श्रेणी को 'ऐतिहासिक श्रेणी' (Historical Series) अथवा 'समयानुसार श्रेणी' (Chronological Series) भी कहते हैं। ऐसे अध्ययन जो काल-श्रेणी से सम्बन्धित हैं, काल-श्रेणी के विश्लेषण (Analysis of Time Series) के अन्तर्गत आते हैं। काल-श्रेणी की प्रमुख परिभाषाएँ निम्नलिखित हैं—

कैनी तथा **कीपिंग** के अनुसार, "समय पर आधारित समंक समूह काल-श्रेणी कहलाते हैं।"

क्राक्सटन एवं **काउडेन** के अनुसार, "समय के किसी माप के आधार पर प्रस्तुत समंकों का व्यवस्थित क्रम काल-श्रेणी कहलाता है।"

वर्नर हिर्श के अनुसार, "समय के क्रमिक बिन्दुओं के तत्संवादी चर के मूल्यों का व्यवस्थित क्रम ही काल-श्रेणी कहलाता है।"

स्पाइगेल के अनुसार, "काल-श्रेणी निश्चित समयानुसार (प्रायः समान अन्तराल पर) लिये गये प्रेक्षणों का समुच्चय है।"

निष्कर्ष—जिस श्रेणी के चर मूल्य (variables) समय के प्रभाव को प्रकट करते हैं, उसे काल-श्रेणी कहते हैं।

काल-श्रेणी विश्लेषण का महत्त्व/उपयोगिता
(Importance/Utility of Analysis of Time Series)

काल-श्रेणी विश्लेषण की उपयोगिता न केवल आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्रों में है वरन् समाजशास्त्री, वैज्ञानिक एवं अनुसन्धानकर्त्ता सभी के लिये उपयोगी है। निम्नलिखित कारणों से यह विश्लेषण अत्यन्त उपयोगी है—

1. **भूतकाल के व्यवहार का विश्लेषण**—काल-श्रेणी के विश्लेषण से भूतकालीन व्यवहारों का ज्ञान सरलता से हो सकता है। यदि हम एक समय से दूसरे समय तक के समंकों का अवलोकन करें तो हमें पता चल सकता है कि परिवर्तन किन परिस्थितियों में तथा किन कारणों से हुये हैं। भूतकालीन परिवर्तनों के अध्ययन से भविष्य के लिये उपयोगी निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं और उपयुक्त नीति अपनाकर व्यवहारों पर नियन्त्रण किया जा सकता है।
2. **पूर्वानुमान में सहायता**—काल-श्रेणियों के विश्लेषण से भावी नियोजन में काफी सहायता मिलती है। भूतकालीन प्रवृत्ति के आधार पर भावी दीर्घकालीन प्रवृत्ति का अनुमान लगाया जा सकता है। संक्षेप में, इस विश्लेषण से भविष्य के लिये अनुमान लगाया जा सकता है तथा परिवर्तनों के कारण होने वाली किसी सम्भावित हानि से बचने के उपाय किये जा सकते हैं।

3. **तुलनात्मक अध्ययन में सहायक**—विभिन्न काल-श्रेणियों की परस्पर तुलना करके उनसे अनेक महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। उदाहरण के लिये, एक फर्म अपनी विभिन्न वर्षों या महीनों के आधार पर तैयार की गई बिक्री-मात्रा, उत्पादन लागत तथा लाभार्जन समंकों की काल-श्रेणी की सहायता से अपने क्रिया-कलापों का तुलनात्मक अध्ययन कर सकती है।
4. **उपलब्धियों का मूल्यांकन**—काल-श्रेणी के विश्लेषण से पूर्व निर्धारित प्रमापों तथा वास्तविक उपलब्धियों की तुलना की जा सकती है और उनके अन्तरों के कारणों का भी विश्लेषण किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, एक व्यवसायी वर्ष 2002 के लिये 5,00,000 रुपये की बिक्री का अनुमान करता है और यदि उसकी बिक्री 4,00,000 रुपये की होती है, तो वह बिक्री में कमी के कारणों का विश्लेषण कर सकता है।
5. **व्यापार-चक्रों का अनुमान**—काल-श्रेणी के विश्लेषण से आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्रों में होने वाले मौसमी एवं चक्रीय परिवर्तनों का पूर्व ज्ञान हो जाता है। चक्रीय उच्चावचनों के आधार पर व्यापार-चक्रों का अनुमान लगाया जा सकता है एवं उचित नीतियाँ अपनाकर इनके दुष्प्रभावों से बचा जा सकता है।

प्र.11. काल-श्रेणी को कितने वर्गों में विभाजित किया गया है? प्रत्येक का विस्तृत वर्णन कीजिए।

उत्तर

काल-श्रेणी के अंग या संघटक
(Components of Time Series)

वस्तुत: किसी काल-श्रेणी पर अनेक दीर्घकालिक तथा अल्पकालिक परिवर्तनों का सामूहिक प्रभाव पड़ता है। इन परिवर्तनों को निश्चित वर्गों में बाँटा जा सकता है। ये वर्ग ही काल-श्रेणी के संघटक कहलाते हैं। संक्षेप में, काल-श्रेणी के अंग या संघटक से अभिप्राय उन परिवर्तनों से है जिनका विश्लेषण एवं अध्ययन काल-श्रेणियों के अन्तर्गत किया जाता है।
काल-श्रेणी के मुख्य संघटकों को निम्नलिखित वर्गों में बाँटा जा सकता है—

1. सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति या उपनति (Secular Trend)
2. नियमित अल्पकालीन उच्चावचन (Regular Short-Time Oscillations)
   (i) आर्त्तव विचरण या मौसमी परिवर्तन (Seasonal Variations)
   (ii) चक्रीय उच्चावचन (Cyclical Fluctuations)
3. अनियमित या दैव उच्चावचन (Irregular or Random Fluctuations)

1. **सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति या उपनति**—प्राय: प्रत्येक काल-श्रेणी में समय के अनुसार उतार-चढ़ाव होते रहते हैं, परन्तु यदि काल-श्रेणी का काफी लम्बे समय तक अध्ययन किया जाये तो हम यह देखेंगे कि उतार-चढ़ाव के बावजूद उसमें परिवर्तन की प्रवृति एक विशेष दिशा में होती है अर्थात् परिवर्तनों की प्रवृत्ति या तो बढ़ने की होती है या फिर घटने की। सरल शब्दों में एक लम्बी अवधि में किन्हीं समंकों की घटने-बढ़ने की प्रवृत्ति को दीर्घकालीन प्रवृत्ति कहा जाता है।
   सिम्पसन एवं काफ्का के अनुसार, "प्रवृत्ति जिसे उपनति अथवा दीर्घकालीन प्रवृत्ति भी कहा जाता है, श्रेणी की एक समयावधि में बढने या घटने की आधारभूत प्रवृत्ति होती है।"
   उदाहरण के लिये, भारतवर्ष में गेहूँ के मूल्यों की काल-श्रेणी पर विचार कीजिये। किसी भी वर्ष के दौरान गेहूँ के मूल्यों में उतार-चढ़ाव होता रहता है। गेहूँ की फसल जब अप्रैल-मई के महीने के आस-पास बाजार में आती है तो मूल्यों में कमी आ जाती है। लेकिन गेहूँ बोने का समय आते-आते भावों में फिर तेजी आ जाती है। इस प्रकार गेहूँ के भावों में उतार-चढ़ाव का क्रम हर साल चलता रहता है। परन्तु यदि अनेक वर्षों के लिये गेहूँ के भावों का अध्ययन करें तो हम देखेंगे कि मूल्यों में निश्चित रूप से बढोत्तरी होती रहती है। इस प्रकार हम देखते हैं कि अल्पकाल के लिये इन परिवर्तनों की दिशा विपरीत होते हुये भी दीर्घकाल के लिये परिवर्तनों की एक निश्चित दिशा हो सकती है।
   इसी प्रकार यदि पिछले 50 वर्षों की भारतवर्ष की जनसंख्या का विश्लेषण करें तो उसकी बढ़ती हुई प्रवृत्ति मिलेगी। यदि मृत्यु दर का विश्लेषण करें तो उसमे घटने की प्रवृत्ति मिलेगी। कभी-कभी स्थिर प्रवृत्ति (stable trend) भी हो सकता है।
2. **नियमित अल्पकालीन उच्चावचन**—किसी काल-श्रेणी में होने वाले अल्पकालीन उतार-चढ़ावों को अल्पकालीन उच्चावचन कहते हैं। ये परिवर्तन दोनों दिशाओं में होते रहते हैं। अल्पकालिक परिवर्तन नियमित या नियतकालिक (periodic) अथवा अनियमित (irregular) हो सकते हैं। नियत कालक्रम के अनुसार बार-बार होने वाले

उतार-चढ़ाव नियमित या नियतकालिक अल्पकालीन उच्चावचन कहलाते हैं। नियमित अल्पकालीन उच्चावचनों को निम्नलिखित दो भागों में बाँटा जा सकता है।

(i) **आर्त्तव या मौसमी विचरण**—किसी काल-श्रेणी में एक ही वर्ष के अन्दर जलवायु (climate) अथवा रीति-रिवाज (custom) में परिवर्तनों के कारण नियमित तथा बार-बार होने वाले अल्पकालीन उतार-चढावों को आर्त्तव या मौसमी विचरण कहा जाता है। इस प्रकार के परिवर्तनों का सम्बन्ध प्राय: मौसम से होता है जिसे निश्चित समय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इस निश्चित समय को दिन, सप्ताह, माह, तिमाही या छमाही अवधि के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, परन्तु यह समयान्तर सामान्यत: एक वर्ष से कम ही होता है। आर्त्तव विचरण होने के बहुत से कारण हो सकते हैं। जलवायु एवं मौसम में परिवर्तन के कारण अलग-अलग वस्तुओं की माँग, उत्पादन एवं मूल्य पर प्रभाव पड़ता है। उदाहरण के लिये, अधिक सर्दी में ऊनी वस्त्रों की माँग बढ़ जाना, अधिक गर्मी में शीतल पेय एवं कूलर तथा पंखों की बिक्री बढ़ जाना, बर्फ के मूल्य में वृद्धि हो जाना, वर्षा ऋतु में छातों एवं बरसातियों की माँग बढ़ जाना। रीति रिवाजों, आदतों एवं फैशन आदि के कारण भी आर्त्तव विचराण होना स्वाभाविक है। विवाहों के मुहूर्त के पूर्व सोना, चाँदी, आभूषण, वस्त्र आदि की माँग एवं मूल्य में वृद्धि दृष्टिगोचर होती है। दशहरा, होली, दीपावली, ईद आदि त्यौहारों के अवसर पर मिठाई, चीनी आदि के सम्बन्ध में भी ऐसी ही प्रवृत्ति दृष्टिगोचर होती है। बच्चों के स्कूल खुलने पर स्कूल ड्रेसों, पुस्तकों, लेखन सामग्री आदि की बिक्री अधिक होती है। इस प्रकार से प्रतिवर्ष उस विशेष मौसम में अन्य समय की तुलना में होने वाले अधिक या कम विचरणों को मापना आवश्यक है ताकि भावी मौसमी परिवर्तनों का शुद्धता से सही अनुमान लगाया जा सके। व्यापारिक प्रतिष्ठानों के लिये आर्त्तव या मौसमी विचरणों का ज्ञान बहुत जरूरी है ताकि प्रबन्धकीय निर्णय सरलतापूर्वक लिये जा सकें।

(ii) **चक्रीय उच्चावचन**—आर्त्तव विचरण की तरह चक्रीय उच्चावचन भी नियतकालिक होते हैं अर्थात् एक निश्चित समय के बाद घटित होते रहते हैं, परन्तु इनकी अवधि प्राय: एक वर्ष से अधिक होती है। चक्रीय उच्चावचन व्यापार चक्रों (Business Cycles) के कारण उत्पन्न होते हैं।

बर्स व मिचेल के अनुसार, "अनेक आर्थिक क्रियाओं में लगभग एक ही समय घटित होने वाली प्रसार एवं संकुचन की क्रमिक तरंगों को व्यापार चक्र कहा जाता है।"

इन उच्चावचनों को चक्रीय इसलिये कहा जाता है क्योंकि इनका क्रम चक्रीय स्वभाव का होता है। एक के बाद दूसरी अवस्था की पुनरावृत्ति स्वयं ही होती रहती है। सामान्यत: प्रत्येक चक्रीय उच्चावचन की चार अवस्थायें होती हैं—(i) समृद्धि (Prosperity), (ii) प्रतिसार (Recession), (iii) अवसाद (Depression), तथा पुनरुत्थान (Recovery)। यद्यपि चक्रीय उच्चावचन की कोई निश्चित अवधि नहीं होती फिर भी एक व्यावसायिक चक्र मुख्य रूप से 3 वर्षीय, 5 वर्षीय, 7 वर्षीय अथवा 11 वर्षीय हो सकता है। प्रत्येक पाँच वर्ष बाद गन्ने का उत्पादन अधिक बढ़ जाना, प्रत्येक तीसरे वर्ष आम की फसल बहुत अच्छी होना, प्रत्येक दस वर्ष बाद वाणिज्य के विद्यार्थियों की संख्या अधिकतम हो जाना आदि चक्रीय उच्चावचन के ही उदाहरण हैं। सूत्रों में चक्रीय उच्चावचनों के लिये '*C*' संकेताक्षर का प्रयोग किया जाता है।

3. **अनियमित या दैव उच्चावचन**—काल-श्रेणी में उपर्युक्त तीन परिवर्तनों—उपनति, मौसमी व चक्रीय परिवर्तनों को नियमित परिवर्तन (Regular Variation) कहते हैं। इसके अतिरिक्त काल-श्रेणी में ऐसे परिवर्तन भी पाये जाते हैं जो किसी भी निश्चित रूप या क्रम में नहीं आते बल्कि संयोग अथवा दैविक कारणों से उत्पन्न होते हैं। किसी वर्ष फैक्टरी में आग लग जाने से लाभों में कमी हो जाना या हड़ताल हो जाने के कारण उत्पादन में कमी आ जाना, युद्ध होने से पैट्रोलियम पदार्थों की कमी हो जाना, भूकम्प, सूखा, बाढ़ दैविक कारणों से व्यापारिक क्रियाओं में अनियमितता आ जाना ऐसी बाते हैं जिनका पूर्वानुमान लगाना सम्भव नहीं है। इन परिवर्तनों को ही अनियमित या दैव उच्चावचन कहते हैं। दैव उच्चावचन चूँकि किसी काल-क्रम से प्रभावित नहीं होते, अत: यह कहना कठिन है कि कितने समय के पश्चात् ऐसे उच्चावचन दृष्टिगोचर होंगे। किसी भी काल-श्रेणी में नियमित परिवर्तनों को समाप्त करके जो शेष परिवर्तन बचे रहते हैं, उन्हें अनियमित परिवर्तन कहते हैं। क्रमहीन होने के कारण इनका कोई वैज्ञानिक व विश्लेषणात्मक अध्ययन नहीं किया जा सकता। क्रमहीन उच्चावचनों को व्यर्थ नहीं समझना चाहिये क्योंकि कभी-कभी ये इतने व्यापक होते हैं कि काल-श्रेणी में नियमित उच्चावचन उत्पन्न कर देते हैं। संक्षेप में, ऐसे उच्चावचनों की प्रमुख विशेषताएँ इस प्रकार हैं—(1) ऐसे

उच्चावचनों का पूर्वानुमान नहीं किया जा सकता, (2) इन उच्चावचनों का कोई निश्चित प्रारूप नहीं होता, (3) ये अल्पकालिक उच्चावचन होते हैं, (4) इनके कारण अनियमित परिवर्तन होते हैं। सूत्रों में इन उच्चावचनों के लिए I संकेताक्षर प्रयोग किया जाता है।

प्र.12. काल-श्रेणी का विश्लेषण तथा काल-श्रेणी के संघटकों का विश्लेषणात्मक मापन समझाइए। योज्य मॉडल एवं गुणात्मक मॉडल में अन्तर भी स्पष्ट कीजिए।

उत्तर

काल-श्रेणी का विश्लेषण या विघटन-आशय एवं मॉडल
(Analysis or Decomposition of Time Series : Meaning and Model)

जैसाकि प्र० 11 में स्पष्ट किया जा चुका है कि किसी काल-श्रेणी के मूल समंकों (Original Data or O) पर दीर्घकालीन प्रवृत्ति, आर्तव या मौसमी विचरण, चक्रीय उच्चावचन एवं अनियमित उच्चावचन का सामूहिक प्रभाव होता है। काल श्रेणी के इन संघटकों को अलग-अलग करके इनका विश्लेषण एवं अध्ययन ही काल-श्रेणी का विश्लेषण या विघटन कहलाता है।
प्रो० स्पीगेल (Spiegel) के अनुसार, "किसी भी काल-श्रेणी के चार संघटकों (T, C, S और I) को अलग-अलग करके उनका अध्ययन या मापन ही काल-श्रेणी का विश्लेषण या विघटन कहलाता है।"
निष्कर्ष—संक्षेप में हम यह कह सकते हैं कि काल-श्रेणी का विश्लेषण एक प्रकार की ऐसी गणितीय तकनीक है जो किसी समंक माला में होने वाले परिवर्तनों के विभिन्न कारणों एवं उनके प्रभावों का मापन करती है।

काल-श्रेणी के विभिन्न प्रतिरूप (Time Series Models)

काल श्रेणी के उपर्युक्त चारों संघटकों का विश्लेषणात्मक मापन निम्नलिखित दो मॉडल पर आधारित है—
1. **योगात्मक प्रतिरूप या योज्य मॉडल**—यह मॉडल इस मान्यता पर आधारित है कि चारों संघटकों का योग मूल समंक (O) के बराबर होता है अर्थात् यह मॉडल सभी संघटकों को अवशेष के रूप में मानता है।
सुत्रानुसार,
$$O = T + S + C + I$$
जहाँ, O = मूल डाटा, T = प्रवृत्ति, S = मौसमी विचरण, C = चक्रीय उच्चावचन, I = अनियमित उच्चावचन
योज्य मॉडल की उपर्युक्त मान्यता के आधार पर दीर्घकालिक उपनति (T) को मूल समंकों में से घटाकर ($O - T$) अल्पकालिक उच्चावचनों ($S + C + I$) को अलग किया जा सकता है—
$$O - T = S + C + I$$
अल्पकालीन उच्चावचनों में से मौसमी विचरणों (S) को घटाकर चक्रीय व अनियमित परिवर्तनों ($C + I$) का अनुमान लगाया जा सकता है—
$$O - T - S = C + I$$
इसी प्रकार अल्पकालिक उच्चावचनों ($O - T$) में से मौसमी और चक्रीय उच्चावचनों ($S + C$) को घटाकर अनियमित परिवर्तन (I) ज्ञात किये जा सकते हैं—
$$O - T - (S + C) = O - T - S - C = I$$
स्मरण रहे, योगात्मक प्रतिरूप इस मान्यता पर आधारित है कि काल श्रेणी के चारों घटक परस्पर स्वतन्त्र हैं। इसका अर्थ यह है कि ये चारों घटक चार अलग-अलग कारणों के प्रभाव के कारण उत्पन्न होते हैं एवं एक घटक में होने वाले परिवर्तनों का दूसरे घटक के कारण होने वाले परिवर्तनों पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।
2. **गुणात्मक मॉडल**—यह मॉडल इस मान्यता पर आधारित है कि मूल समंक (O) चारों संघटकों के गुणनफल के बराबर होता है। सूत्रानुसार—
$$O = T \times S \times C \times I = TSCI$$
काल श्रेणी के इस मॉडल का प्रयोग अल्पकालीन विचरणों का माप करने और उन्हें अलग करने के लिये किया जाता है।
सूत्रानुसार,
$$\frac{O}{T} = S \times C \times I = SCI; \quad \frac{O}{T \times C} = S \times I; \quad \frac{O}{T \times S \times C} = I$$
यह सदैव ध्यान रखना होगा कि इस मॉडल के अन्तर्गत दीर्घकालीन प्रवृत्ति को मूल समंकों की इकाई के रूप में व्यक्त किया जाता है, जबकि शेष संघटकों को अनुपात के रूप में प्रदर्शित किया जाता है।

योज्य मॉडल एवं गुणात्मक मॉडल में अन्तर
(Differences between Additive and Multiplicative Models)

1. योज्य मॉडल में मूल समंक, सभी संघटकों के योग के बराबर होते हैं जबकि गुणात्मक मॉडल में मूल समंक सभी संघटकों के गुणनफल के बराबर होते हैं।
2. योज्य मॉडल में सभी संघटक मूल समंक की इकाई में व्यक्त किये जाते हैं जबकि गुणात्मक मॉडल में केवल दीर्घकालीन प्रवृत्ति ही मूल समंक की इकाई में व्यक्त की जाती है और शेष संघटक अनुपात के रूप में व्यक्त किये जाते हैं।
3. योज्य मॉडल में विभिन्न संघटक परस्पर निर्भर नहीं होते जबकि गुणात्मक मॉडल में विभिन्न संघटकों में परस्पर आश्रितता एवं बीजगणितीय सम्बन्ध पाया जाता है।
4. योज्य मॉडल में दीर्घकालीन प्रवृत्ति के बढ़ने या घटने पर भी अधिकांश मौसमी परिवर्तन स्थिर रहते हैं जबकि गुणात्मक मॉडल में मौसमी परिवर्तनों का दीर्घकालीन प्रवृत्ति पर अनुपात स्थिर रहता है।

प्र.13. चल-माध्य रीति से आप क्या समझते हैं? विषम अवधि तथा सम अवधि से सम्बन्धित चल माध्य ज्ञात करने की प्रक्रिया को उदाहरण सहित समझाइए।

उत्तर

चल-माध्य रीति
(Moving Average Method)

यह काल-श्रेणी की दीर्घकालीन उपनति ज्ञात करने की सर्वाधिक प्रचलित विधि है। यह विधि केवल दीर्घकालीन उपनति ज्ञात करने के काम में ही नहीं आती है वरन् मौसमी व चक्रीय उच्चावचनों एवं अनियमित परिवर्तनों के सन्दर्भ में भी इस रीति का व्यापक प्रयोग किया जाता है। इस विधि के अन्तर्गत काल-श्रेणी के समंकों में से किसी भी घटक का प्रभाव दूर किया जा सकता है।

चल-माध्य, काल-श्रेणी के समंकों के 'विशिष्ट' समान्तर माध्य होते हैं। चल माध्य एवं समान्तर माध्य में मुख्य अन्तर यह है कि समान्तर माध्य सम्पूर्ण अवधि के लिये एक-ही होता है। जबकि चल-माध्य अनेक होते हैं। इस रीति में सर्वप्रथम यह निश्चित करना पड़ता है कि चल माध्य कितने वर्षीय हो? क्योंकि अवधि के विषम (odd) होने पर चल माध्य 3, 5, 7, 9, 11 वर्षीय हो सकता है और अवधि सम (even) होने पर चल माध्य 4, 6, 8, 12 वर्षीय हो सकता है। यद्यपि इसके लिये कोई निश्चित नियम नहीं है, फिर भी चल-माध्य की अवधि का चुनाव करते समय मूल्यों में उतार-चढ़ाव व पदों की संख्या को ध्यान में रखा जाना चाहिये।

विषम अवधि से सम्बन्धित चल माध्य ज्ञात करने की प्रक्रिया
(Process to determine Moving Average Related with odd Period)

तीन-वर्षीय चल-माध्य ज्ञात करने के लिये निम्नलिखित प्रक्रिया अपनाई जायेगी—

1. सर्वप्रथम तीन-तीन वर्षीय चल योग (moving total) लगाया जायेगा और यह योग प्रथम 3 वर्षों के ठीक बीच में (दूसरे वर्ष में) लिख दिया जायेगा।
2. इसके पश्चात् प्रथम वर्ष छोड़कर अगले तीन वर्षों का योग तीसरे वर्ष के सामने, फिर दूसरा वर्ष छोडकर अगले तीन वर्षों का योग चौथे वर्ष के सामने लिखा जायेगा। यह क्रम उस समय तक चलता रहेगा जब तक कि योग में अन्तिम वर्ष का मूल्य शामिल न हो जाये।
3. प्रत्येक चल योग में 3-3 का भाग देकर चल माध्य निकाल लिया जायेगा।

पाँच-वर्षीय चल-माध्य ज्ञात करने के लिये निम्नलिखित प्रक्रिया अपनाई जायेगी—

1. प्रदत्त काल श्रेणी के सर्वप्रथम पाँच मूल्यों को जोडिये और प्राप्त योग को तीसरे वर्ष (मध्यक वर्ष) के सामने रख दीजिये।
2. इसके बाद प्रथम वर्ष के मूल्य को छोड़कर और छठे वर्ष के मूल्य को शामिल करके प्राप्त योग को चौथे वर्ष के सामने रख दीजिये। यह क्रिया तब तक करते रहिये जब तक कि अन्तिम वर्ष का मूल्य शामिल न हो जाये।
3. इस प्रकार प्राप्त किये गये 'चल-माध्य योगों' को चल-माध्य की अवधि अर्थात् 5 से भाग दे दीजिये। ये मूल्य ही चल-माध्य होंगे।
4. पाँच वर्षीय चल-माध्य की गणना करने पर श्रेणी के पहले दो और अंतिम दो पदों का चल-माध्य नहीं निकलेगा। इसी प्रकार 3 वर्षीय चल माध्य में पहला और अन्तिम पद रिक्त होगा और 7 वर्षीय चल-माध्य में पहले तीन और अंतिम तीन पदों के चल-माध्य नहीं निकाले जा सकेंगे।

सूत्रानुसार—तीन-वर्षीय चल-माध्य— $\frac{a+b+c}{3}, \frac{b+c+d}{3}, \frac{c+d+e}{3}, \frac{d+e+f}{3}, ...$

पाँच-वर्षीय चल-माध्य— $\frac{a+b+c+d+e}{5}, \frac{b+c+d+e+f}{5}, \frac{c+d+e+f+g}{5}$

सात-वर्षीय चल-माध्य— $\frac{a+b+c+d+e+f+g}{7}, \frac{b+c+d+e+f+g+h}{7} ....$

स्पष्टीकरण हेतु निम्नलिखित उदाहरण देखिए—

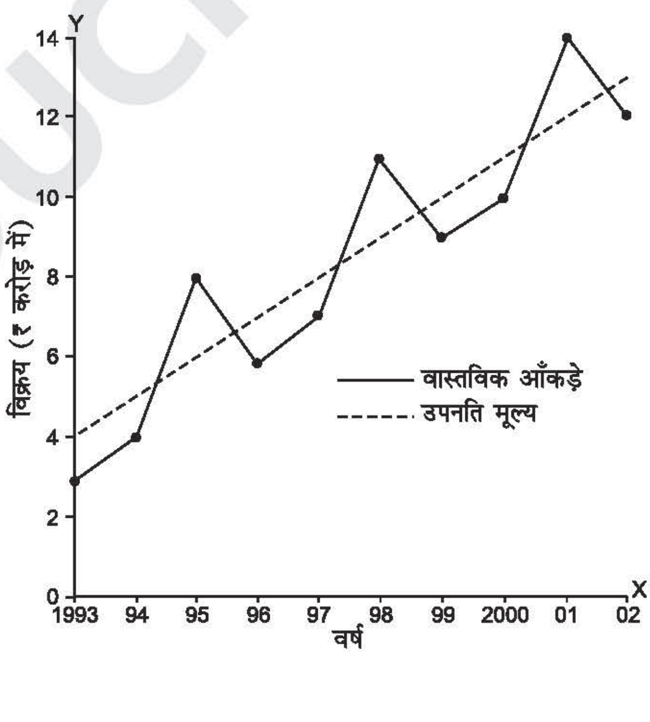
उदाहरण—निम्नलिखित समंक एक देश की कुल बिक्री से सम्बन्धित है। इनका बिन्दु रेखीय प्रदर्शन कीजिये और तीन वर्षीय चल माध्य द्वारा उपनति मूल्य दर्शाइये।

वर्ष	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
विक्रय (₹ करोड़ में)	3	4	8	6	7	11	9	10	14	12

हल—

तीन-वर्षीय चल माध्य की गणना

वर्ष	विक्रय (₹ करोड़ में)	तीन वर्षीय चल योग	तीन वर्षीय चल माध्य
1993	3	–	–
1994	4	15	5
1995	8	18	6
1996	6	21	7
1997	7	24	8
1998	11	27	9
1999	9	30	10
2000	10	33	11
2001	14	36	12
2002	12		



सम अवधि से सम्बन्धित चल माध्य ज्ञात करने की प्रक्रिया
(Process to Determine Moving Average Related with Even Time Period)

प्राय: चल माध्य विषम संख्या (odd numbers 3, 5, 7, 9) की आवर्तिता (periodicity) के आधार पर निकाले जाते हैं। परन्तु कभी-कभी आवर्तिता (periodicity) सम संख्या (Even Number) पर ही मिलती है। ऐसी स्थिति में चल माध्यों को किन समंकों के सम्मुख लिखा जाये इसमें कठिनाई आती है। इस कठिनाई को दूर करने के लिये पहले आवर्तिता के आधार पर योग ज्ञात कर लिया जाता है। जिन्हें सम्बन्धित समंकों के केन्द्रीय स्थान पर लिखते हैं फिर इन योगों को दो वर्षीय योग लेकर औसत ज्ञात कर लेते हैं। दो वर्षीय योगों के मध्य में इस औसत को लिखने से इसकी स्थिति मूल समंक के सामने की बन जाती है। उदाहरणार्थ, चार-वर्षीय चल-माध्य ज्ञात करने के लिये निम्नलिखित प्रक्रिया अपनाई जायेगी—

1. सर्वप्रथम चार-चार वर्षीय चल योग निकाले जायेंगे। इनमें पहला योग दूसरे और तीसरे वर्ष के मध्य में, दूसरा योग तीसरे और चौथे वर्ष के मध्य में और इसी प्रकार शेष योग लिखे जायेंगे।
2. इसके पश्चात् इन चल योगों के दो-दो वर्षीय चल योग लगाये जायेंगे। पहला चल योग तीसरे वर्ष के ठीक सामने आयेगा। फिर इसी क्रम में चल योग लिखे जायेंगे।
3. पुन: किये गये चल योगों में 8 से भाग देकर चल माध्य निकल जायेगा।

उदाहरण—निम्नलिखित समंकों के लिये चार वर्षीय चल माध्यों की विधि द्वारा उपनति मूल्य ज्ञात कीजिये—

वर्ष	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
मान	506	620	1,036	673	588	696	1,116	738	663

हल—

चार वर्षीय चल माध्यों की गणना

वर्ष	सूचकांक	वर्षीय चल योग	जोड़ों का चल योग	वर्षीय चल माध्य $\left(C=\frac{(iv)}{8}\right)$
(i)	(ii)	(iii)	(vi)	(v)
1995	506		–	–
1996	620		–	–
	→	2,835		
1997	1,036	→	5,752	719.0
	→	2,917		
1998	673	→	5,910	738.8
	→	2,993		
1999	588	→	6,066	758.3
	→	3,073		
2000	696	→	6,211	776.4
	→	3,138		
2001	1116	→	6,351	793.9
	→	3,213		
2002	738		–	–
2003	663		–	–

प्र.14. न्यूनतम वर्ग रीति को समझाइए तथा इसका वर्गीकरण करते हुए सरल रेखीय प्रवृत्ति अन्वायोजन का विस्तृत वर्णन कीजिए।

उत्तर

न्यूनतम वर्ग रीति
(Method of Least Squares)

किसी काल-श्रेणी की दीर्घकालीन उपनति को ज्ञात करने की यह सर्वश्रेष्ठ रीति मानी जाती है। इस रीति के अन्तर्गत गणितीय समीकरणों के प्रयोग द्वारा, न्यूनतम वर्ग की मान्यता के आधार पर काल-श्रेणी के लिये, 'सर्वाधिक उपयुक्त रेखा' (Line of Best Fit) खींची जाती है। यह रेखा सरल (straight) भी हो सकती है और परवलयिक वक्र (parabolic curve) के रूप में

भी। इस 'सर्वाधिक उपयुक्त रेखा' का स्वरूप उसके समीकरण पर निर्भर है। प्रसामान्य समीकरणों की सहायता से खींची जाने वाली न्यूनतम वर्ग रेखा एक ऐसी रेखा है जिससे मूल समंकों के बिन्दुओं के विचलनों के वर्गों का योग अन्य किसी भी रेखा की तुलना में न्यूनतम होता है। इसलिये इस रीति को न्यूनतम वर्ग रीति कहा जाता है। यह सर्वाधिक उपयुक्त रेखा अथवा सर्वोत्कृष्ट रेखा निम्नलिखित मान्यताओं पर आधारित है—

1. $\Sigma (Y - Y_c) = 0$: प्रदत्त मूल्यों और तत्संवादी प्रवृत्ति मूल्यों के विचलनों का योग शून्य होता है तथा,
2. $\Sigma (Y - Y_c)^2$ = न्यूनतम : इस रेखा से विभिन्न मूल्यों के विचलनों के वर्गों का जोड़ अन्य किसी रेखा से निकाले गये विचलन वर्गों की तुलना में न्यूनतम होता है। उपर्युक्त दोनों सूत्रों में—

Y = मूल समंक। $Y_c = Y$ के संगणित मूल्य।

न्यूनतम वर्ग रीति के आधार पर प्रवृत्ति निर्धारण को तीन वर्गों में बाँटा जा सकता है—

1. सरल रेखीय प्रवृत्ति अन्वायोजन
2. परवलय-वक्रीय या अ-रेखीय अन्वायोजन
3. अर्द्ध-लघुगणकीय या घातांकीय।

सरल रेखीय प्रवृत्ति अन्वायोजन (Fitting a Straight Line Trend)

न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा रेखीय प्रवृत्ति ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित समीकरण का प्रयोग किया जाता है—

$$Y_c = a = bX$$

(आधारभूत समीकरण)

Y_c = अभीष्ट उपनति मूल्य
X = काल एकक अथवा समय इकाई
a तथा b = अचर मूल्य

अचर मूल्य अचर मूल्य (a) को y-अन्त: खण्ड भी कहते हैं। यह मूल्य बिन्दु (0) और y अक्ष पर स्थित उस बिन्दु का अन्तर है जहाँ से उपनति रेखा आरम्भ होती है। यदि काल श्रेणी के मध्य वर्ष को मूल बिन्दु (0) माना जाता है तो (a) का अर्थ काल श्रेणी के मूल्यों (y) के समान्तर माध्य से होता है। इसी प्रकार b प्रवृत्ति रेखा के ढलान की ओर संकेत करता है अर्थात् यह बताता है कि समय की एक इकाई बढ़ने से उपनति रेखा कितनी ऊपर अथवा कितनी नीचे की ओर अग्रसर होती है।

अचर मूल्यों का परिकलन (Calculation of Constants)

इस रीति के अन्तर्गत अचर मूल्यों की गणना के लिये निम्नलिखित दो रीतियों का प्रयोग किया जाता है—(i) दीर्घ रीति, (ii) लघु रीति।

(i) **दीर्घ रीति**—इस रीति के अनुसार a तथा b अचर मूल्यों का परिकलन करने हेतु निम्नलिखित गणन प्रक्रिया अपनाई जाती है—

1. सर्वप्रथम किसी भी समय इकाई या वर्ष को मूल बिन्दु (origin) मानकर समय विचलन (Time Deviation) (x) ज्ञात किये जाते हैं। मूल बिन्दु किसी भी समय इकाई या वर्ष को माना जा सकता है परन्तु सामान्यतया प्रदत्त काल-श्रेणी में सर्वप्रथम समय इकाई या वर्ष से ठीक पूर्व की समय इकाई या वर्ष को ही मूल बिन्दु माना जाता है जिसके परिणामस्वरूप प्रदत्त काल श्रेणी में नियमित समयान्तर (1 वर्ष का अन्तर) होने पर काल श्रेणी के प्रारम्भ से 1, 2, 3, 4......... क्रम संख्यायें समय विचलन के रूप में प्राप्त होती हैं। इन क्रम संख्याओं का योग ΣX ज्ञात कर लिया जाता है।
2. उक्त क्रम संख्याओं के वर्गों का योग ΣX^2 ज्ञात करते हैं।
3. X और मूल समंकों अर्थात् Y श्रेणी के तत्संवादी मूल्यों की गुणा करके उनका जोड ΣXY निकाल लिया जाता है।
4. Y श्रेणी के मूल्यों का योग करके ΣY प्राप्त किया जाता है।
5. इसके बाद निम्नलिखित दो असामान्य समीकरणों (Normal Equations) में उपर्युक्त परिकलित किये गये मूल्यों को आदिष्ट (Substitute) करके 'a' तथा 'b' के मूल्य प्राप्त कर लिये जाते हैं।

$$\Sigma Y = Na + b\Sigma X \quad \text{...(i)}$$
$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2 \quad \text{...(ii)}$$

6. अन्त में 'a' तथा 'b' के मूल्य ज्ञात हो जाने के बाद सरल रेखा के आधारभूत समीकरण ($Y = a + bX$) का प्रयोग करके प्रवृत्ति मूल्य निकाल लिये जाते हैं।

उदाहरण—निम्नलिखित समंकों से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सरल रेखीय प्रवृत्ति प्रदान कीजिये—

वर्ष	1997	1998	1999	2000	2001	2002
उत्पादन	5	7	9	10	12	17

हल— **न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सरल रेखीय प्रवृत्ति की गणना**

वर्ष	उत्पादन लाख टन (y)	1996 से समय विचलन (x)	x^2	xy	उपनति मूल्य $Y_c = a + bx$
1997	5	1	1	5	$2.3 + (2.2 \times 1) = 4.5$
1998	7	2	4	14	$2.3 + (2.2 \times 2) = 6.7$
1999	9	3	9	27	$2.3 + (2.2 \times 3) = 8.9$
2000	10	4	16	40	$2.3 + (2.2 \times 4) = 11.1$
2001	12	5	25	60	$2.3 + (2.2 \times 5) = 13.3$
2002	17	6	36	102	$2.3 + (2.2 \times 6) = 15.5$
$n = 6$	$\Sigma y = 60$	$\Sigma x = 21$	$\Sigma x^2 = 91$	$\Sigma xy = 248$	$\Sigma Y_c = 60$

$$\Sigma Y = Na + b\Sigma X \quad \ldots(i)$$
$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2 \quad \ldots(ii)$$

ज्ञात मूल्यों को उपर्युक्त समीकरणों में आदिष्ट करने पर,

$$60 = 6a + 21b \quad \ldots(i)$$
$$248 = 21a + 91b \quad \ldots(ii)$$

समीकरण (i) में 7 तथा (ii) में 2 से गुणा करके घटाने पर,

$$42a + 147b = 420 \quad \ldots(i)$$
$$42a + 182b = 496 \quad \ldots(ii)$$
$$- \quad - \quad -$$
$$-35b = -76$$
$$b = 76/35 = 2.2 \text{ लगभग}$$

b का मूल्य समीकरण (i) में रखने पर a का मूल्य ज्ञात किया जा सकता है—

$$6a = 60 - (2.2 \times 21) = 60 - 46.2$$
$$6a = 13.8 \quad \text{or} \quad a = \frac{13.8}{6} = 2.3$$

सरल रेखीय प्रवृत्ति $\quad Y_c = a + bx \quad$ or $\quad Y_c = 2.3 + 2.2x$

(ii) **लघु रीति**—'a' तथा 'b' अचर मूल्यों का मान ज्ञात करने के लिये पूर्व वर्णित दीर्घ रीति की तुलना में लघु रीति अधिक सरल है। न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा उपनति मूल्य ज्ञात करने के लिये व्यवहार में इस रीति का सर्वाधिक प्रयोग किया जाता है। यहाँ पर यह उल्लेखनीय है कि इस रीति का प्रयोग तभी किया जा सकता है जबकि प्रदत्त काल-श्रेणी में विभिन्न समय-मापों के बीच समान समयान्तर हो। यदि समान समयान्तर नहीं है तो इस रीति का प्रयोग नहीं किया जा सकता, जबकि दीर्घ रीति प्रत्येक दशा में प्रयोग की जा सकती है। इस रीति के अन्तर्गत गणन क्रिया निम्न प्रकार है—

1. सर्वप्रथम प्रदत्त काल-श्रेणी में ठीक बीच वाले वर्ष अर्थात् मध्यका-वर्ष (middle or medium year) को मूल बिन्दु शून्य मानते हुये सभी वर्षों के कालिक विचलन (time deviation) ज्ञात कर लेते हैं। जिन्हें X वाले खाने (Column) में लिखते हैं। ऐसी दशा में ΣX सदैव शून्य होगा।
2. विभिन्न समय विचलनों (X) के वर्ग करके X^2 वाले खाने में लिखते हैं जिसका योग ΣX^2 होता है।
3. X एवं मूल समंकों अर्थात् Y-श्रेणी के तत्संवादी मूल्यों की गुणा करके उनका योग ΣXY ज्ञात कर लेते हैं।
4. Y-श्रेणी के मूल्यों का योग करके ΣY ज्ञात कर लेते हैं।
5. 'a' तथा 'b' अचर मूल्यों का मान ज्ञात करने के लिये निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग करते हैं—

$$a = \frac{\Sigma Y}{N} \quad \text{or} \quad b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}$$

6. अन्त में, आधारभूत समीकरण ($Y = a + bX$) में क्रमश: X के मूल्यों को आदिष्ट करके उपनति मूल्य ज्ञात किये जाते हैं और फिर उनको रेखा-पत्र पर अंकित कर दिया जाता है।

स्पष्टीकरण हेतु निम्नलिखित उदाहरण देखिये—

उदाहरण—चीनी उत्पादित करने वाले एक फैक्ट्री के उत्पादन के समंक (हजार क्विंटलों में) नीचे दिये हुए हैं। (i) न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सरल रेखा उपनति निश्चित कीजिये, (ii) समंकों को इन उपनति के साथ बिन्दुरेखीय चित्र पर दिखाइये तथा (iii) 2005 वर्ष के लिये उपनति मूल्य का अनुमान कीजिये।

वर्ष	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
उत्पादन (हजार क्विंटल)	80	90	92	83	94	99	92

हल— (i)

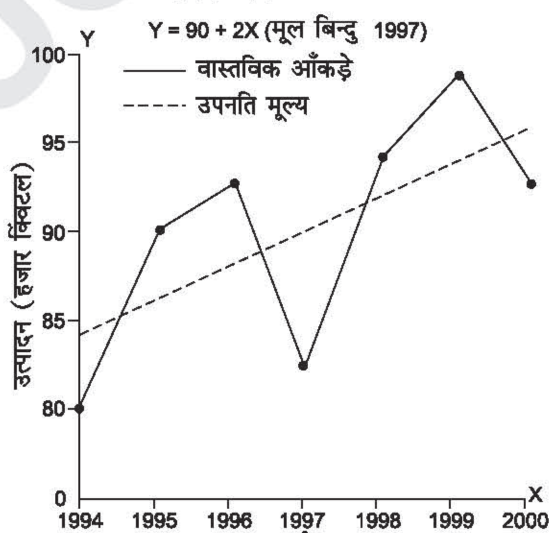
न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा प्रवृत्ति मूल्यों की गणना

वर्ष	उत्पादन (हजार क्विंटल) (Y)	1997 से समय विचलन (X)	X^2	XY	उपनति मूल्य $Y_c = a + bX$	
1994	80	–3	9	–240	$90+(2\times-3)$	84
1995	90	–2	4	–180	$90+(2\times-2)$	86
1996	92	–1	1	–92	$90+(2\times-1)$	88
1997	83	0	0	0	$90+(2\times0)$	90
1998	94	+1	1	+94	$90+(2\times1)$	92
1999	99	+2	4	+198	$90+(2\times2)$	94
2000	92	+3	9	+276	$90+(2\times3)$	96
योग $N = 7$	**630** ΣY	**0** ΣX	**29** ΣX^2	**56** ΣXY		**630** ΣY_c

$$a = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{630}{7} = 90 \quad \text{or} \quad b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{56}{28} = 2$$

सरल रेखा उपनति

(ii)



(iii) वर्ष 2005 के लिए अनुमानित प्रवृत्ति मूल्य

$$\text{समय विचलन}\,(x) = 2005 - 1997 = +\,8$$

$$Y_c = a + bx = 90 + (2 \times 8) = 106 \text{ (हजार क्विंटल)}$$

प्र.15. परवलय-वक्रीय या अ-रेखीय प्रवृत्ति अन्वायोजन का उदाहरण सहित विस्तृत वर्णन कीजिए।

उत्तर

परवलय-वक्रीय या अ-रेखीय प्रवृत्ति अन्वायोजन
(Fitting a Parabolic or Non-Linear Trend)

उन स्थितियों में जब समंकों में प्रतिवर्ष वृद्धि या ह्रास की दर समान नहीं होती अर्थात् b का मूल्य स्थिर रहने की आशा न हो, तो वहाँ रेखीय समीकरण से सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति का विश्लेषण करना उचित नहीं होता क्योंकि वृद्धि अथवा ह्रास की दर तीव्र होने के कारण सरल रेखा के द्वारा सही पूर्वानुमान नहीं किया जा सकता। ऐसी दशा में सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति ज्ञात करने के लिये निश्चित घात (द्वितीय, तृतीय या चतुर्थ आदि) का परवलयिक वक्र या एकेन्द्रित वक्र खींचना पड़ता है। जैसाकि पीछे बताया जा चुका है कि सरल रेखीय मूल समीकरण में 'a' तथा 'b' दो अचर होते हैं। द्वितीय घात के परवलयिक वक्र के मूल समीकरण में 'c' एक अतिरिक्त अचर मूल्य लिया जाता है। तृतीय घातीय प्रवृत्ति के लिये 'd' एक और अचर मूल्य लिया जाता है, आदि। जितने अचर मूल्य होंगे, उतने ही प्रसामान्य समीकरण बनेंगे। यहाँ हम केवल द्वितीय घात के परवलयिक वक्र की विवेचना कर रहे हैं। इस वक्र का मूल समीकरण इस प्रकार है—

$$Y = a + bX + cX^2$$

मूल समीकरण में X के वर्ग मूल्य (अधिकतम) होने के कारण ही यह द्विघातीय प्रवृत्ति समीकरण कहलाती है। यदि c का मान धनात्मक है तो वक्र का झुकाव ऊपर की ओर (upward bulge) होगा और c का मान ऋणात्मक होने पर झुकाव नीचे की ओर (downward bluge) होगा।

उपर्युक्त मूल समीकरण में a, b तथा c अचर मूल्य हैं, जिन्हें ज्ञात करने के लिये निम्नलिखित तीन प्रसामान्य समीकरणों को प्रयोग किया जाता है—

$$\Sigma Y = Na + b\Sigma X + c\Sigma X^2 \quad \ldots\text{(i)}$$

$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3 \quad \ldots\text{(ii)}$$

$$\Sigma X^2 Y = a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4 \quad \ldots\text{(iii)}$$

उपर्युक्त तीनों समीकरणों को हल करके 'a', 'b' तथा 'c' का मूल्य ज्ञात हो जायेगा जिन्हें मूल समीकरण में रखकर प्रवृत्ति-मूल्य प्राप्त कर लिये जाते हैं।

यदि समय विचलन (Time Deviations) काल-श्रेणी के ठीक बीच वाले वर्ष से लिये गये हों तो ΣX तथा ΣX^3 का मान शून्य हो जायेग और ऐसी दशा में निम्नलिखित प्रसामान्य समीकरणों का प्रयोग करेंगे—

$$\Sigma Y = Na + C\Sigma X^2 \quad \ldots\text{(i)}$$

$$\Sigma XY = b\Sigma X^2 \qquad \left(\therefore b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}\right) \quad \ldots\text{(ii)}$$

$$\Sigma X^2 Y = a\Sigma X^2 + C\Sigma X^4 \quad \ldots\text{(iii)}$$

लघु रीति द्वारा अचरांक a, b व c को निम्नलिखित सूत्रों के द्वारा प्रत्यक्ष रूप से भी ज्ञात किया जा सकता है—

$$a = \frac{\Sigma Y - c\Sigma X^2}{N};\ b = \frac{\Sigma XY^2}{\Sigma X^2};\ C = \frac{N\,(\Sigma X^2 Y) - \Sigma X^2\ \Sigma Y}{N\,\Sigma X^4 - (\Sigma X^2)^2}$$

उदाहरण—निम्नलिखित समंकों से एक द्वितीय घात के परवलय का आसंजन कीजिये और विभिन्न वर्षों के लिये उपनति मूल्यों का आकलन कीजिये—

वर्ष	1996	1997	1998	1999	2000	2001
आय (₹)	460	420	430	520	584	610

हल—

द्वितीय घात के परवलय के आसंजन की गणना

वर्ष	आय (Y)	X ($X-1998.5$)	X^2	X^3	X^4	XY	X^2Y
1996	460	–5	25	–125	625	–2,300	11,500
1997	420	–3	9	–27	81	–1,260	3,780
1998	430	–1	1	–1	1	–430	430
1999	520	+1	1	+1	1	+520	520
2000	584	+3	9	+27	81	+1,752	5,256
2001	610	+5	25	+125	625	+3,050	15,250
$N = 6$	**3024** ΣY	**0** ΣX	**70** ΣX^2	**0** ΣX^3	**1414** ΣX^4	**1,332** ΣXY	**36,736** ΣX^2Y

उपनति समीकरण (Trend Equation)—

$$Y_c = a + bX + cX^2$$

सामान्य समीकरण (Normal Equation)—

$$\Sigma Y = Na + b\Sigma X + c\Sigma X^2 \quad \text{...(i)}$$

$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3 \quad \text{...(ii)}$$

$$\Sigma X^2Y = a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4 \quad \text{...(iii)}$$

समीकरणों में मान प्रतिस्थापित करने पर,

$$b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{1332}{70} = 19.03$$ (दूसरी समीकरण के आधार पर)

$$3{,}024 = 6a + 70c \quad \text{...(i)}$$

$$36{,}736 = 70a + 1414c \quad \text{...(iii)}$$

समीकरण (i) को 35 से तथा समीकरण (iii) को 3 से गुणा करके प्रथम समीकरण को तृतीय समीकरण में से घटाने पर,

$$1{,}10{,}208 = 210a + 4{,}242c$$

$$1{,}05{,}840 = 210a + 2{,}450c$$

$$- \quad - \quad -$$

$$4{,}368 = 1{,}792c \quad \text{या} \quad c = \frac{4{,}368}{1{,}792} = 2.44$$

c का समान समीकरण (i) में रखने पर,

$$6a + (70 \times 2.44) = 3{,}024$$

$$6a = 3{,}024 - 170.8 = 2853.2 \quad \text{या} \quad a = \frac{2853.2}{6} = 475.53$$

अतः परवलयिक समीकरण $Y_c = 475.53 + 19.03X + 2.44X^2$

उपनति मूल्यों की गणना—

वर्ष	उपनति मूल्य
1996	$475.53 + (19.03 \times -5) + (2.44 \times 25) = 441.38$
1997	$475.53 + (19.03 \times -3) + (2.44 \times 9) = 440.40$
1998	$475.53 + (19.03 \times -1) + (2.44 \times 1) = 458.94$
1999	$475.53 + (19.03 \times 1) + (2.44 \times 1) = 497.00$
2000	$475.53 + (19.03 \times 3) + (2.44 \times 9) = 554.58$
2001	$475.53 + (19.03 \times 5) + (2.44 \times 25) = 631.68$

❑

मॉडल पेपर

व्यावसायिक सांख्यिकी

B.Com.-I (SEM-I) [पूर्णांक : 75

नोट—सभी खण्डों को निर्देशानुसार हल कीजिए।

खण्ड-अ : अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

*निर्देश—**सभी पाँच प्रश्नों** के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न **3 अंक** का है। अधिकतम 75 शब्दों में अतिलघु उत्तर अपेक्षित हैं।*

1. भारतीय संविधान में सूची का विभाजन कितने वर्गों में किया गया है?

2. सविचार निदर्शन व दैव निदर्शन में अन्तर स्पष्ट कीजिए।

3. निम्नलिखित आवृत्ति बंटन के लिए विस्तार तथा विस्तार का गुणांक ज्ञात कीजिए—

प्राप्तांक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
छात्रों की संख्या	10	12	8	16	14	10

4. प्रत्यक्ष सम्बन्ध से आप क्या समझते हैं?

5. सूचकांक का क्या महत्व हैं? समझाइए।

खण्ड-ब : लघु उत्तरीय प्रश्न

*निर्देश—निम्नलिखित तीन प्रश्नों में से किन्हीं **2 प्रश्नों** के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न **7.5 अंक** का है। अधिकतम 200 शब्दों में लघु उत्तर अपेक्षित हैं।*

6. प्राथमिक आँकड़ों/समंकों के लाभ संक्षेप में लिखिए।

अथवा प्राथमिक एवं द्वितीयक आँकड़ों की तुलना कीजिए।

7. निम्नलिखित सारणी में 350 पुरुषों की ऊँचाइयाँ दी गई हैं। समूह की ऊँचाई के माध्य की गणना कीजिए।

ऊँचाई (सेमी में)	159	161	163	165	167	169	171	173
व्यक्तियों की संख्या	1	2	9	48	131	102	40	17

अथवा निम्न आँकड़ों से बहुलक की गणना कीजिए—

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
छात्रों की संख्या	6	8	7	12	26	20	11	10

8. निम्नलिखित आँकड़ों से कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए—

X/Y	0-20	20-40	40-60
10-25	10	5	3
25-40	4	40	8
40-55	6	9	15

अथवा सूचकांकों के प्रकारों को समझाइए तथा इनको वर्गीकृत भी कीजिए।

खण्ड-स : विस्तृत उत्तरीय प्रश्न

*निर्देश—निम्नलिखित पाँच प्रश्नों में से किन्हीं **3 प्रश्नों** के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न **15 अंक** का है। अधिकतम 500-800 शब्दों में विस्तृत उत्तर अपेक्षित हैं।*

9. सांख्यिकी के महत्त्व का वर्णन करते हुए इसकी सीमाओं की व्याख्या कीजिए।

अथवा प्राथमिक समंकों से क्या अभिप्राय है? उनके संकलन की विभिन्न विधियों का संक्षेप में वर्णन कीजिए। क्या सभी परिस्थितियों में कोई एक रीति सर्वोत्तम कही जा सकती है?

10. गुणोत्तर माध्य की परिभाषा दीजिए और इसके गुण तथा दोषों की विवेचना कीजिए। इसका उपयोग कब होता है, समझाइए।

अथवा हरात्मक माध्य से आप क्या समझते हैं? इसके गुण तथा दोषों एवं गणना की विवेचना कीजिए। किन परिस्थितियों में आप इसके प्रयोग की सिफारिश करेंगे?

11. अपकिरण का क्या अर्थ है? अपकिरण का प्रयोग, माप, उद्देश्य एवं रीतियों का वर्णन कीजिए।

अथवा कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक को विस्तार से समझाइए तथा इसकी सहायता से सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना भी समझाइए।

12. सतत् श्रेणी में सह-सम्बन्ध गुणांक को उदाहरण सहित समझाइए।

अथवा आधार के रूपांतरण एवं स्थानान्तरण को उदाहरण सहित समझाइए।

13. उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का विस्तृत वर्णन कीजिए।

अथवा निम्नलिखित आँकड़े 20 व्यक्तियों के वजन तथा ऊँचाई के हैं। द्विचरीय आवृत्ति वितरण तैयार कीजिए जिसमें वजन के लिए वर्गान्तर 115 – 125 पौण्ड, 125 – 135 पौण्ड आदि तथा ऊँचाई के लिए 62 – 64 इन्च, 64 – 66 इन्च, – और इसी प्रकार हों।

क्र०सं०	वजन (पौण्ड)	ऊँचाई (इंच)	क्र० सं०	वजन (पौण्ड)	ऊँचाई (इंच)
1	170	70	11	163	70
2	135	65	12	139	67
3	136	65	13	122	63
4	137	64	14	134	68
5	148	69	15	140	67
6	124	63	16	132	69
7	117	65	17	120	66
8	128	70	18	148	68
9	143	71	19	129	67
10	129	62	20	152	67

❑